

## カーネル表現を用いた非線形既約分解法

### Nonlinear factorization via kernel representation

井前讓\*, ○小田島哲也\*\*, 千田健一\*\*

Imae Joe\*, ○Tetsuya Odasima\*\*, Kenichi chida\*\*

\*岩手大学工学部, \*\*岩手大学大学院

\*Faculty of Engineering, Iwate University

\*\*Graduate school of Engineering, Iwate University

キーワード: 非線形システム, 既約分解, カーネル表現, Youla のパラメータ表現

連絡先: 〒020 盛岡市上田 4-3-5, 岩手大学工学部機械工学科

井前 讓 Tel. : 019(621)6401, Email : jima@iwate-u.ac.jp

## 1. 緒言

制御系設計において、フィードバック系を安定化するコントローラ的设计は重要である。線形領域では、安定化コントローラが一つ与えられるとき、安定化コントローラのすべてがパラメータ表現可能であることはよく知られている (Youla のパラメータ表現)。最近、Youla のパラメータ表現を非線形領域に拡張する研究が盛んである。例えば、Paice<sup>1,2)</sup>らは左既約分解の非線形版といわれるカーネル表現を用いて、また、藤本<sup>3)</sup>らは強可検出性の概念を導入することにより、それぞれ拡張に成功している。しかしながら前者は右既約分解の考えを併用しており、得られた結果は複雑である。また、後者は、右既約分解は用いないものの強可

検出性を仮定しており、その適用範囲に疑問が残る。

本論文では右既約分解および強可検出性を用いることなく、カーネル表現のみにより Youla のパラメータ表現の非線形化を試みる。

## 2. 安定性

微分方程式 (1) で表された制御対象  $G$  があるとする。

$$G: \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (1)$$

$u$  を入力信号,  $U$  を入力信号の空間,  $U^s$  を安定な入力信号の空間,  $U^u$  を不安定な入力信号の空間とし、同じように、 $y$  を出力信号,  $Y$  を出力信号の空間,  $Y^s$  を安定な出力

信号の空間,  $Y^u$  を不安定な出力信号の空間とする. また  $x$  を状態量,  $X$  を状態空間とし, 次の条件を満たすものとする.

$$\begin{aligned} U &= U^s \cup U^u, U^s \cap U^u = \phi, 0 \in U^s \\ Y &= Y^s \cup Y^u, Y^s \cap Y^u = \phi, 0 \in Y^s \end{aligned} \quad (2)$$

また, 安定な信号と安定な信号の和は安定, 安定な信号と不安定な信号の和は不安定であるとする.

[定義1 (写像の安定性)]

もし制御対象  $G$  が, すべての初期状態  $x_0 \in X$  に対して  $U^s$  から  $Y^s$  への写像であるならば, 制御対象  $G$  は安定であるという.

[定義2 (well-posed 性)]

制御対象  $G$  のコントローラを  $K$  とする. そのとき, 図1のような閉ループシステムで, 任意の安定な外乱  $w_1, w_2$  に対して出力  $u, u', y, y'$  が存在し, 一意的に決定されるとき, 閉ループシステム  $\{G, K\}$  は well-posed であるという.

[定義3 (閉ループシステムの安定性)]

任意の安定な外乱  $w_1, w_2$  に対して出力  $u, u', y, y'$  が安定ならば, well-posed な閉ループシステム  $\{G, K\}$  は安定であるという.

### 3. カーネル表現

[定義4 (安定カーネル表現)]

非線形システム

$$\Sigma: \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, u) \\ z = h(x, y, u) \end{cases} \quad (3)$$

が, 以下の条件を満たすとき制御対象  $G$  の安定カーネル表現という.

- (i) すべての初期状態  $x_0 \in X$  と, すべての  $u \in U$  に対して,  $z = 0$  であるとき (3) 式は唯一の解  $y \in Y$  を持ちそれは同じ初

期状態  $x_0$  と入力  $u$  に対する (1) 式の出力に等しい.

- (ii) すべての初期状態  $x_0 \in X$  とすべての  $z \in Z^s$  に対して,  $u \in U^s, y \in Y^s$  のとき, (3) 式には唯一の解  $u, y$  が存在する.

本論文では, 制御対象  $G$  のカーネル表現を

$$R_G: Y \times U \rightarrow Z_G \quad (4)$$

と表し,

$$z_G = R_G(y, u) \quad (5)$$

と表記する. また, 制御対象  $G$  のコントローラ  $K$  が

$$K: \begin{cases} \dot{\xi} = \alpha(\xi, y) \\ u = \beta(\xi, y) \end{cases} \quad (6)$$

で表され, カーネル表現

$$R_K: U \times Y \rightarrow Z_K \quad (7)$$

を持つとする (図2参照).

[定義5 (弱 well-posed 性)]

このとき, カーネル表現 (4), (7) を持つ閉ループシステム  $\{G, K\}$  が, すべての初期状態  $x_0 \in X, \xi_0 \in X_K$ , そしてすべての  $z_G \in Z_G^s, z_K \in Z_K^s$  に対して, 信号  $y, u$  が一意的に決められるならば, その閉ループシステムは弱 well-posed であるという.

[定義6 閉ループシステムの弱安定性]

閉ループシステム  $\{G, K\}$  が, 弱 well-posed であるとする. そのとき, カーネル表現 (4), (7) を持つ閉ループシステム  $\{G, K\}$  が, すべての初期状態  $x_0 \in X, \xi_0 \in X_K$ , そしてすべての  $z_G \in Z_G^s, z_K \in Z_K^s$  に対して, 信号  $y, u$  が安定であるならば, その閉ループシステムは弱安定であるという.

本論文では特に, 制御対象  $G$  とコントローラ  $K$  が

$$R_G: \begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ z_G = y - h(x, u) \end{cases} \quad (8)$$

$$R_K: \begin{cases} \dot{\xi} = \alpha(\xi, y) \\ z_K = u - \beta(\xi, y) \end{cases} \quad (9)$$

の形のカーネル表現を持つ場合についてのみ検討する。

また、任意の安定な外乱( $w_1, w_2$ )が加わる場合、 $R_G, R_K$ は、

$$R_G: \begin{cases} \dot{x} = f(x, u + w_1) \\ z_G = y - h(x, u + w_1) \end{cases} \quad (10)$$

$$R_K: \begin{cases} \dot{\xi} = \alpha(\xi, y + w_2) \\ z_K = u - \beta(\xi, y + w_2) \end{cases} \quad (11)$$

となり、図3のように表せる。

#### 4. 外乱がないシステムのパラメータ表現

カーネル表現  $R_S, R_Q$  を持つシステム  $S, Q$  を考える。このとき、システム  $S, Q$  のカーネル表現を

$$R_S: Z_G \times Z_K \rightarrow Z_S \quad (12)$$

$$R_Q: Z_K \times Z_G \rightarrow Z_Q$$

とする。また、システム  $G_S, K_Q$  を次のカーネル表現を持つものとして定義する。

すなわち

$$R_{G_S}: Y \times U \rightarrow Z_S \quad (13)$$

$$R_{K_Q}: U \times Y \rightarrow Z_K$$

であり、 $u, y$  の関数として、

$$z_S = R_S(R_G(y, u), R_K(u, y)) \quad (14)$$

$$z_Q = R_Q(R_K(u, y), R_G(y, u))$$

と表される。閉ループシステム  $\{S, Q\}, \{G, K\}, \{G_S, K_Q\}$  のカーネル表現を  $R_{\{S, Q\}}, R_{\{G, K\}}, R_{\{G_S, K_Q\}}$  とするとき

$$R_{\{G_S, K_Q\}} = R_{\{S, Q\}} \cdot R_{\{G, K\}} \quad (15)$$

がいえる。ここに、 $R_{\{G_S, K_Q\}}$  と  $R_{\{S, Q\}} \cdot R_{\{G, K\}}$  のブロック線図は、図4または、図5で与えられる。

[補助定理 ( $\{G_S, K_Q\}$  と  $\{S, Q\}$  の弱安定性)]<sup>1)</sup>

閉ループシステム  $\{G, K\}$  が弱 well-posed かつ弱安定であるとする。そのとき、閉ループシステム  $\{S, Q\}$  が弱 well-posed かつ弱安定であることと、閉ループシステム  $\{G_S, K_Q\}$  が弱 well-posed かつ弱安定であることは、同値である。

#### 5. 外乱が加わるシステムのパラメータ表現

Youla のパラメータ表現の非線形化に関する定理を示す。すなわち、図4において外乱  $w_1, w_2$  が加わる場合である (図6)。 $G, K$  が前節のように  $S, Q$  によりパラメータ化される場合、図6の外乱に対する安定性を検討する。なお、図6において、 $S, Q$  を取り除いたループを図7とする。

[定理]

閉ループシステム  $\{G, K\}$  が well-posed で安定、かつ、図7においてすべての安定な  $z_G, z_K$  に対して、 $z'_G, z'_K$  が安定であると仮定する。そのとき、閉ループシステム  $\{S, Q\}$  が well-posed で安定であるならば、閉ループシステム  $\{G_S, K_Q\}$  は、well-posed で安定である。

(証明)

いま、図5に外乱  $w_1, w_2, w_3, w_4$  を加えた図8を考える。まず、初めに、図6と図8の等価性を導く。

図6のシステム  $z'_G, z'_K$  は

$$z'_G = h(x, u + w_1) - h(x, u) + w_2 + z_G$$

$$z'_K = \beta(\xi, y + w_2) - \beta(\xi, y) + w_1 + z_K \quad (16)$$

で与えられる。これに対し、図8のシステム  $S, Q$  の入力信号は、

$$\begin{aligned} z'_K &= w_3 + z_K \\ z'_G &= w_4 + z_G \end{aligned} \quad (17)$$

で、与えられる。ところで、

$$\begin{aligned} w_3 &= \beta(\xi, y + w_2) - \beta(\xi, y) + w_1 \\ w_4 &= h(x, u + w_1) - h(x, u) + w_2 \end{aligned} \quad (18)$$

なる信号が与えられるとき、(16)、(17)式は等価な信号となる。したがって、 $w_1 \sim w_4$ に関し(18)式の関係があるとき、図6、8は等価である。

本証明はこの等価性を利用する。仮定より、閉ループシステム $\{G, K\}$ は、任意の安定な外乱に対して安定である。閉ループシステム $\{S, Q\}$ が、任意の安定な外乱 $(w_3, w_4)$ に対して安定であるならば、閉ループシステム $\{G_s, K_Q\}$ は、任意の安定な外乱に対して安定であるといえる(図6と図8の等価性より)。よって、定理が証明される。

## 6. 結言

閉ループシステム $\{S, Q\}$ が安定な場合、 $S, Q$ をパラメータとする閉ループシステム $\{G_s, K_Q\}$ は安定となることを明らかにした。また、制御対象 $G$ を安定にするコントローラは、システム $S$ をゼロシステムとすることにより、パラメータ $Q$ (安定なシステム)を含む、カーネル表現 $R_{K_Q}$ を持つことがわかる。

## 参考文献

- 1) Paice, A.D.B.; Schaft van der, A.J.; The class of stabilizing nonlinear plant-controller pairs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41-5, 634/645 (1996)
- 2) Paice, A.D.B.; Schaft van der, A.J.; The

Youla Parameterization for Nonlinear Feedback Systems with Additive Disturbances, *Proceedings of the 34th Conference on Decision & Control*, 2976-2981 (1996)

3) 藤本・杉江：観測器に基づく kernel 表現を用いた非線形安定化コントローラのパラメトリゼーション, 第26回 制御理論シンポジウム資料, 329/332(1997)

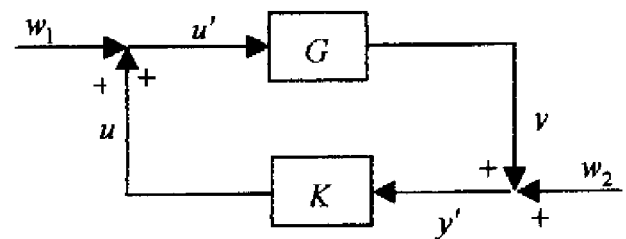


Fig.1 The closed loop system  $\{G, K\}$

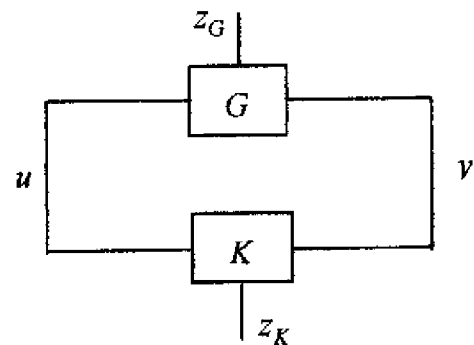


Fig.2 The closed loop system with  $R_G$  and  $R_K$  (no disturbances)

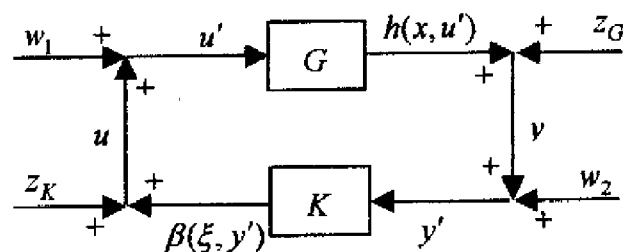


Fig.3 The closed loop system with  $R_G$  and  $R_K$  (non-zero disturbances)

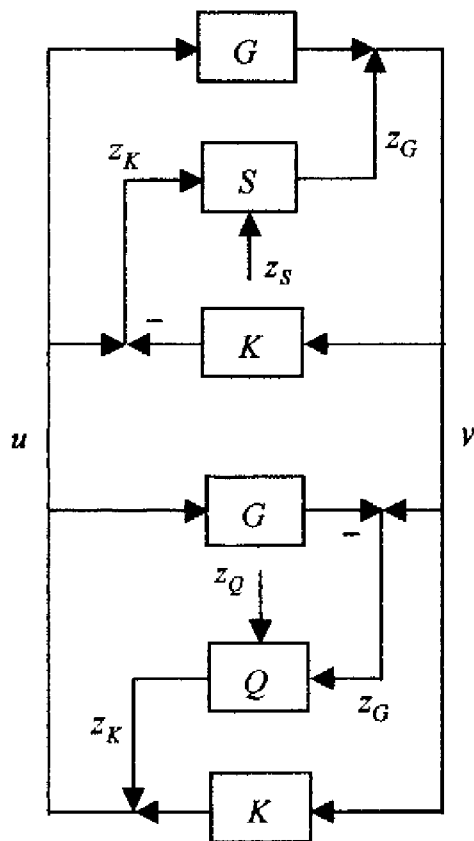


Fig.4 The closed loop system with  $R_{\{G_s, K_Q\}}$  (no disturbances)

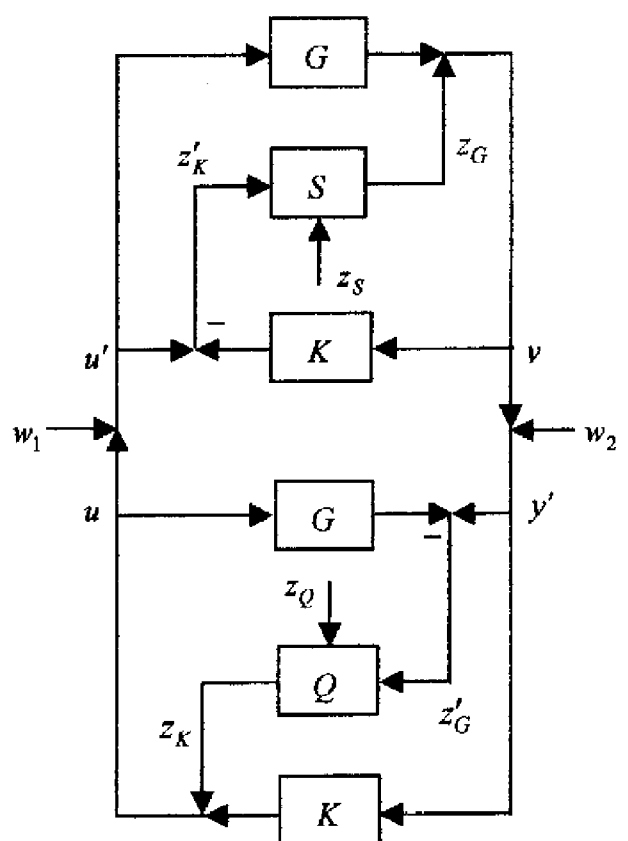


Fig.6 The closed loop system with  $R_{\{G_s, K_Q\}}$  (non-zero disturbances)

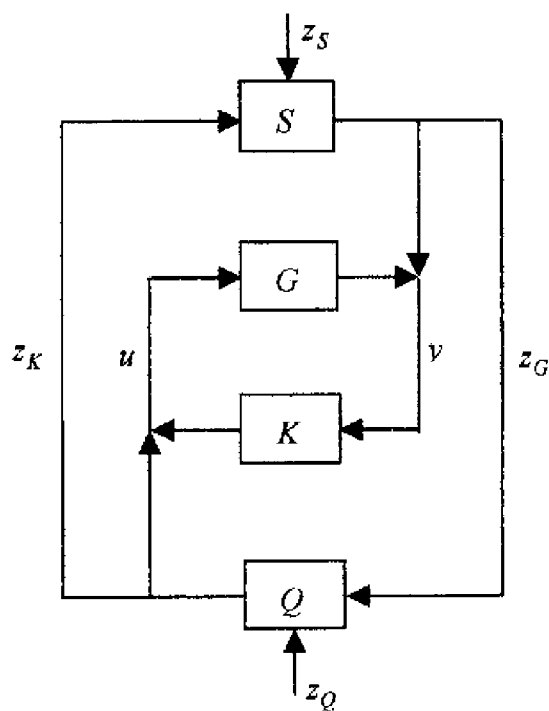


Fig.5 The closed loop system with  $R_{\{S, Q\}}$  and  $R_{\{G, K\}}$  (no disturbances)

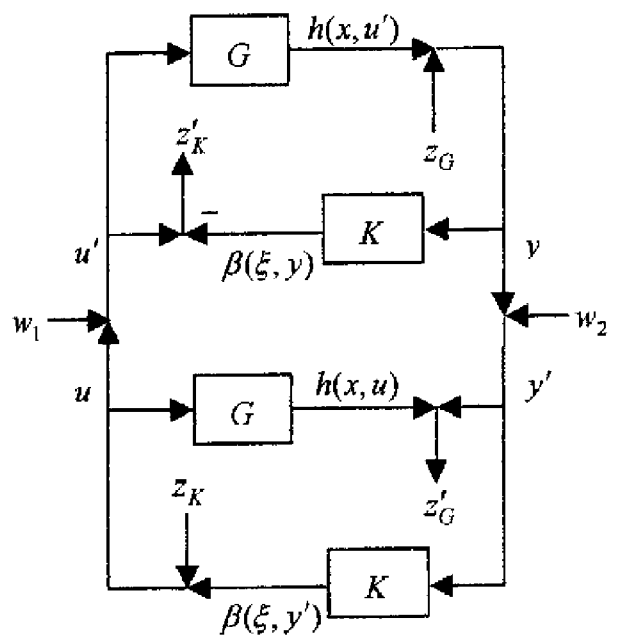


Fig.7 The closed loop system with  $R_{\{S, Q\}}$  and  $R_{\{G, K\}}$

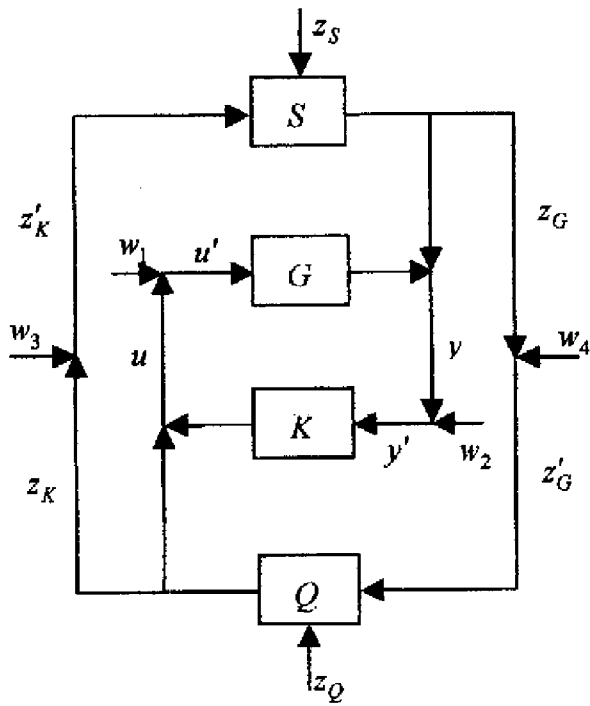


Fig.8 The closed loop system  
 with  $R_{(S,Q)}$  and  $R_{(G,K)}$   
 (non-zero disturbances)