

非可微分関数を含むバックステッピング法

Backstepping with nonsmooth functions

井前 譲*, ○ 尾形 秀規**

Joe Imae*, ○ Hideki Ogata**

*岩手大学工学部, **岩手大学大学院

Faculty of Engineering, Iwate University

キーワード: 非可微分関数, バックステッピング, リアプノフ関数,

Clarke の一般化微係数, 関数近似

連絡先: 〒020 盛岡市上田 4-3-5, 岩手大学工学部機械工学科

井前 譲 Tel.: 019(621)6401, Email: jima@iwate-u.ac.jp

1. 緒言

近年, 不確定要素を含む非線形システムに対する設計手法の開発において, バックステッピング法が注目を集めている. バックステッピング法とは, ある種の単純な制御器構成手順を, 対象システムに繰り返し適用することにより安定化制御器を設計する手法である (2章に詳述). ところで, 例えば飽和要素を含む場合, システムの動特性は急に変化する. このようなシステムに対してバックステッピング法は一般には適用できない. 最近, Kokotovic ら¹⁾は Clarke の一般化方向微係数を用いて, 必ずしも微分可能ではない関数(以後, 非可微分関数という)を含む場合のバックステッピング法を提案した. しかし, その制御器設計は複雑であり, かつ試行錯誤的である.

本論文では新たな非可微分バックステッピング法を提案する. 非可微分関数の近似関数を利用することにより比較的簡単な制御器設計法となっているのが特徴である.

2. バックステッピング法

まず微分可能な場合のバックステッピング法について説明する. バックステッピング法とは対象システム

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (1)$$

$$f(0,0) = 0, \quad x \in R^n, y \in R^l$$

を漸近安定させる制御器 $u = v(x, y)$ を求めるとき, システム(1)の部分システム

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2)$$

の制御器 $u = \mu(x)$ とリアプノフ関数 $V(x)$ により制御器 $u = v(x, y)$ を構成する手法である.

具体的には, システム(1)のリアプノフ関数 $U(x, y)$ を,

$$U(x, y) = V(x) + \frac{1}{2} [y - \mu(x)]^2 \quad (3)$$

とおき、(3)式の時間微分を負にすることで次式の制御器を得る。

$$v(x, y) = -k[y - \mu(x)] + \mu'(x)f(x, y) - V'(x)\tilde{f}_\mu(x, y) \quad (4)$$

ここで、定数 $k > 0$ 、かつ

$$\tilde{f}_\mu(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x, \mu(x) + s[y - \mu(x)]) ds$$

$$f(x, y) = f(x, \mu(x)) + [y - \mu(x)]\tilde{f}_\mu(x, y) \quad (5)$$

3. 非可微分バックステッピング法

$f(x, y), V(x), \mu(x)$ を Lipchitz 連続な非可微分関数 (C^0) とする。ここで、 $V(x)$ に対する Clarke の一般化勾配 $\partial V(x)$ と一般化方向微係数 $V_\mu^0(x)$ を定義する。すなわち $\partial V(x)$ は微分できる点では勾配 $V'(x)$ を表し、微分できない点ではその点における勾配の集合を表す。また、

$$V_\mu^0(x) = V^0(x; f(x, \mu(x))) = \max \partial V(x) f(x, \mu(x)) \quad (6)$$

である。(6)式が常に負であることは、微分可能な場合の時間微分が常に負であることに対応する。

さて、 $V(x), \mu(x)$ の可微分近似関数 (C^1) をそれぞれ $V_j(x), \mu_j(x)$ とし、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} V_j(x) = V(x), \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j(x) = \mu(x)$$

とする。このとき、次の定理を得る。

[定理] ある j に対し、ある定数 $\psi > 0$ 、 $\delta > 0$ を

$$\psi \geq \max |V_j'(x) - \partial V(x)| \quad (7)$$

$$\delta \geq \max |\mu_j'(x) - \partial \mu(x)| \quad (8)$$

とおく。このとき、次の条件を満たす場合、システム(1)を漸近安定にする制御器 $u = v(x, y)$ が存在する。

(a) $V(x)$ は常に正で、 $\mu(0) = 0$ である。

(b) $V_\mu^0(x)$ は常に負である。

(c) (9)式を満たす C^0 の正值関数 $\sigma(x)$ が存在する。

$$\frac{\sigma(x)}{2} \delta^2 |f(x, \mu(x))|^2 \leq -V_\mu^0(x) \quad (9)$$

[証明] システム(1)のリアプノフ関数 $U(x, y)$ を(3)式のようにおくと $\partial U(x, y)$ は

$$\partial U(x, y) \subset \partial V(x) \times \{0\} + [y - \mu(x)] [(-\partial \mu(x)) \times \{1\}]$$

で与えられる¹⁾。また、 $U(x, y)$ の一般化方向微係数を

$$U_v^0(x, y) = U^0((x, y); f(x, y), v(x, y)) = \max \partial U(x, y) \begin{bmatrix} f(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} \quad (10)$$

とおくと(11)式が得られる。

$$U_v^0 \leq V_\mu^0 + \max [y - \mu(x)] [v(x, y) - \partial \mu(x) f(x, y) + \partial V(x) \tilde{f}_\mu(x, y)] \quad (11)$$

ここで、 $v(x, y)$ を

$$v(x, y) = -K(x, y)[y - \mu(x)] - E(x, y) + \mu_j'(x)f(x, y) - V_j'(x)\tilde{f}_\mu(x, y) \quad (12)$$

とおく。ただし現時点では、 $K(x, y), E(x, y)$ はいずれも決定されていないとする。(12)式を(11)式に代入して、

$$\begin{aligned}
U_v^0(x, y) \leq & V_\mu^0 - K(x, y)[y - \mu(x)]^2 \\
& - [y - \mu(x)]E(x, y) \\
& + \delta |y - \mu(x)| |f(x, \mu(x))| \\
& + \delta [y - \mu(x)]^2 |\tilde{f}_\mu(x, y)| \\
& + \psi |y - \mu(x)| |\tilde{f}_\mu(x, y)| \quad (13)
\end{aligned}$$

を得る。ここで、(13)式の第4項に相加・相乗平均を適用して、(9)式を用いると

$$\begin{aligned}
& \delta |y - \mu(x)| |f(x, \mu(x))| \\
& \leq [y - \mu(x)]^2 \frac{1}{\sigma(x)} - \frac{1}{2} V_\mu^0(x) \quad (14)
\end{aligned}$$

であり、また、 $E(x, y)$ を

$$E(x, y) = \begin{cases} \psi \frac{y - \mu(x)}{|y - \mu(x)|} |\tilde{f}_\mu(x, y)| & y \neq \mu(x) \\ 0 & y = \mu(x) \end{cases} \quad (15)$$

とおくと

$$[y - \mu(x)]E(x, y) = \psi |y - \mu(x)| |\tilde{f}_\mu(x, y)| \quad (16)$$

である。したがって、 $K(x, y)$ を

$$K(x, y) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sigma(x)} + \delta |\tilde{f}_\mu(x, y)| \quad (17)$$

とおくとき、(14)式、(16)式、(17)式より(13)式を変形して、

$$U_v^0 \leq \frac{1}{2} V_\mu^0 - \frac{1}{2} [y - \mu(x)]^2 \quad (18)$$

となる。これより、制御器(12)を用いるときシステム(1)は漸近安定であることが言える。

(証明終了)

4. 例題

非可微分な2次元システムをとりあげる。

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + x + 2|x| - |y| \\ \dot{y} = u \end{cases} \quad (19)$$

ここに、

$$f(x, u) = x^2 + x + 2|x| - |u| \quad (20)$$

次に、リアプノフ関数が可微分な場合と非可微分な場合とに分けて検討する。

(1) $V(x) = x^2$ とする可微分な場合

まず、システム(20)を漸近安定させる $\mu(x)$ を求め、 $f(x, \mu(x))$ 、 $V_\mu^0(x)$ などを計算する。

$$\mu(x) = \max\{0, 2x|x| + 4x\} \quad (21)$$

$$f(x, \mu(x)) = -x(1 + |x|) \quad (22)$$

$$\partial V(x) = 2x$$

$$V_\mu^0(x) = -2x^2(1 + |x|)$$

$$\tilde{f}_\mu(x, y) = \begin{cases} -1 & y \geq 0 \\ 1 + \frac{2\mu(x)}{y - \mu(x)} & y < 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\partial \mu(x) = \begin{cases} 4x + 4 & x > 0 \\ [0 \ 4] & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (24)$$

ここで、 $V(x)$ は可微分なので $V_j(x) = V(x)$ とする。また近似関数 $\mu_j(x) \in C^1$ を次のように構成する(図1)。

$$\mu_j(x) = \begin{cases} 2x^2 + 4x & x \geq \lambda \\ a(x + \lambda^*)^2 - \lambda^* & -\lambda^* \leq x \leq \lambda \\ 0 & x \leq -\lambda^* \end{cases} \quad (25)$$

ただし、 $\lambda \rightarrow 0 (j \rightarrow \infty)$ であり、

$$\lambda^* = \frac{\lambda}{1 + \lambda} \quad a = \frac{2(\lambda^* + 1)}{\lambda + \lambda^*}$$

したがって、

$$\max |V'_j(x) - \partial V(x)| = 0$$

$$\max |\mu'_j(x) - \partial \mu(x)| \leq 2.5$$

であることにより、 $\psi = 0, \delta = 2.5$ とする。

以上より、本定理によりシステム(19)を漸近安定させる制御器 $v(x, y)$ は

$$\sigma(x) = \frac{1}{5(1 + |x|)}$$

$$K(x, y) = 9 + 7|x|$$

とおくことにより、

$$v(x, y) = -(9 + 7|x|)[y - \mu(x)] + \mu'_j(x)f(x, y) - 2x\tilde{f}_\mu(x, y) \quad (26)$$

で与えられる。ここで、参考のため Kokotovic らの方法により制御器を構成し、 x の初期値を 0.4、 y の初期値を 2.0 として数値計算による比較を行った (図 2, 図 3)。なお、 $K(x, y)$ 、 $v(x, y)$ に対応する $\bar{K}(x, y)$ 、 $\bar{v}(x, y)$ を以下のように与えた。

$$\bar{K}(x, y) = 4 + 5(1 + |x|) + 2(1 + |x|)^3 + \frac{1}{2}(1 + |x|)^3 x^2$$

$$\bar{v}(x, y) = -\bar{K}(x, y)[y - \mu(x)] \quad (27)$$

Kokotovic らの方法に比べ比較的簡単な手順をとりながらも同様な性能傾向を示しており興味深い。

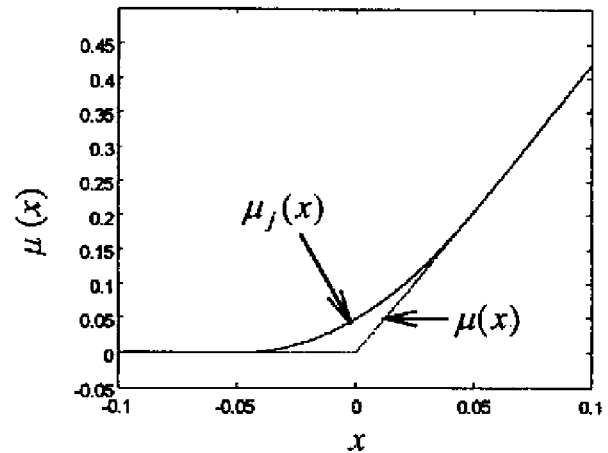


図 1. $\mu(x)$ と $\mu_j(x)$

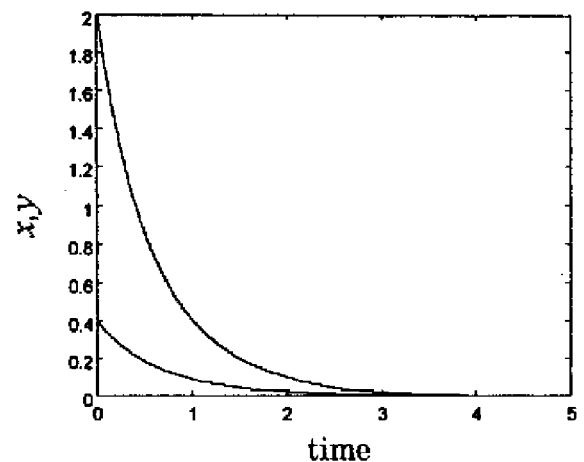


図 2. 状態量 (本手法)

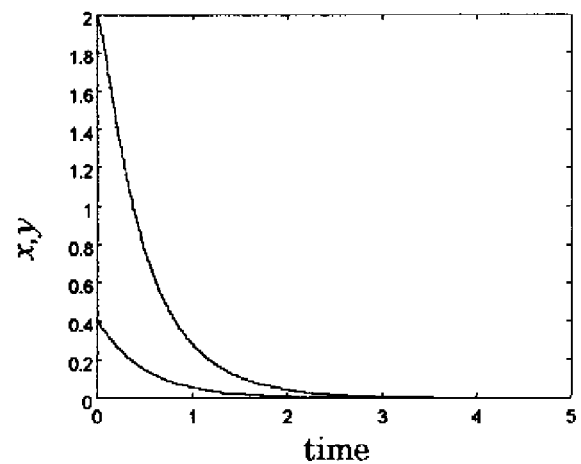


図 3. 状態量 (Kokotovic らの方法)

(2) $V(x) = |x|$ とする非可微分な場合

部分システムを漸近安定させる $\mu(x)$ を (21)式のようにおく. また, $\partial V(x)$ は

$$\partial V(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ [-1 \ 1] & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (28)$$

となる. ゆえに (22), (28)式より

$$V_{\mu}^0(x) = -|x|(1+|x|)$$

が得られる. ここで, $\mu_j(x) \in C^1$ は前述と同じとし, 近似関数 $V_j(x) \in C^1$ を

$$V_j(x) = \begin{cases} |x| & |x| \geq \lambda \\ \frac{1}{2\lambda}x^2 + \frac{\lambda}{2} & |x| \leq \lambda \end{cases} \quad (29)$$

とする(図4). このとき,

$$\max |V_j'(x) - \partial V(x)| \leq 1.5$$

であることにより, $\psi = 1.5$ とおく. また, (1)の場合と同様に $\delta = 2.5$ とおく.

以上より, システム(19)を漸近安定させる制御器 $v(x, y)$ は

$$\sigma(x) = \frac{1}{7|x|(1+|x|)}$$

$$K(x, y) = 3 + 7|x|(1+|x|)$$

$$E(x, y) = \begin{cases} 1.5 \frac{y - \mu(x)}{|y - \mu(x)|} |\tilde{f}_{\mu}(x, y)| & y \neq \mu(x) \\ 0 & y = \mu(x) \end{cases} \quad (30)$$

とおくことにより, (12)式で与えられる.

ここで, (1)の場合と同様の数値計算を行い, 状態量 x, y を図5に, 操作量 $v(x, y)$ を図6に示す.

ここで, $E(x, y)$ が不連続関数になっているために, 図6においてチャタリングが現れている.

なお, Kokotovic らの方法では, 制御器の構成は極めて困難と考えられる.

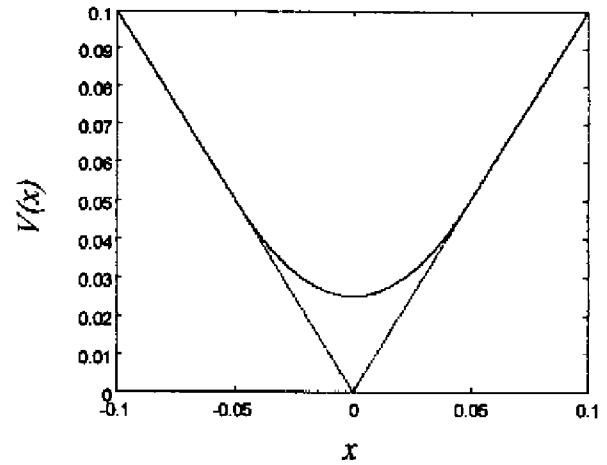


図4. $V(x)$ と $V_j(x)$

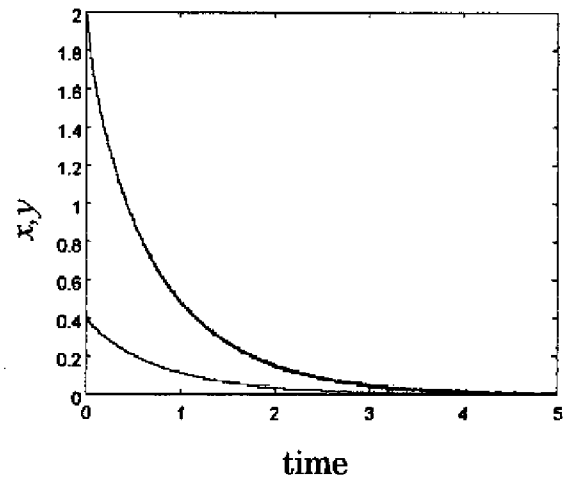


図5. 状態量 ($V(x) = |x|$)

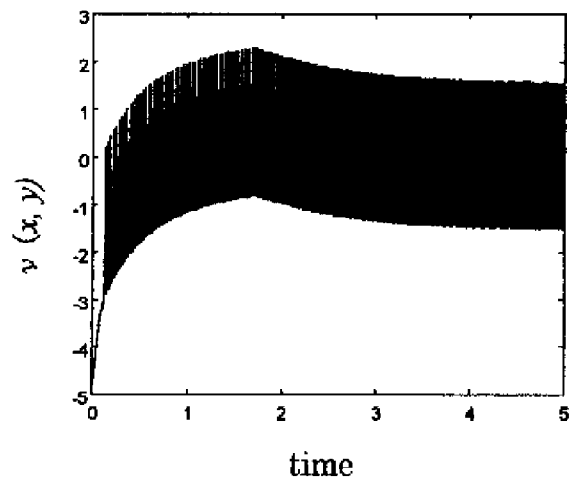


図6. 操作量 ($V(x) = |x|$)

また実用面からはチャタリング現象の回避が望ましく、一つの方法として、(30)式を

$$E(x,y) = 1.5 \frac{y - \mu(x)}{|y - \mu(x)| + \theta} |\tilde{f}_\mu(x,y)|$$

θ : 十分小さい定数 (31)

とおくことによって、チャタリング現象を回避することができる(図7, 図8)。

5. 結言

新たな非可微分バックステッピング法を提案した。そしてKokotovicらの方法では制御器を見つけることが極めて困難な例題を取り上げ本手法を適用した。その結果、本手法がより有効であることを明らかにした。

なお、チャタリング現象回避については今後の課題としたい。

参考文献

- 1) R.A.Freeman and P.V.Kokotovic, Backstepping Design with Nonsmooth Nonlinearities, Nonlinear Control Systems Design 1995, Tahoe City, 1995

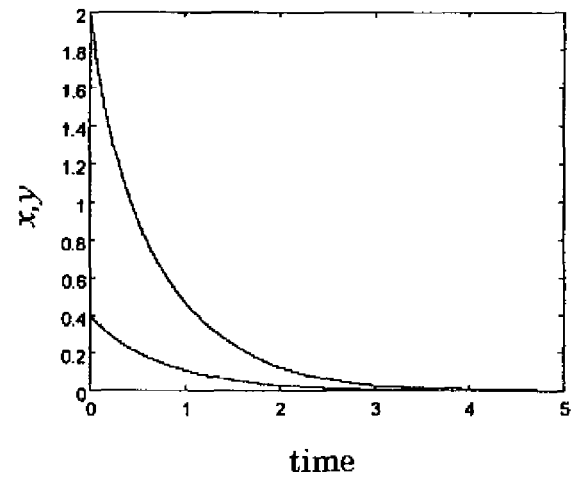


図7. 状態量 (チャタリング回避)

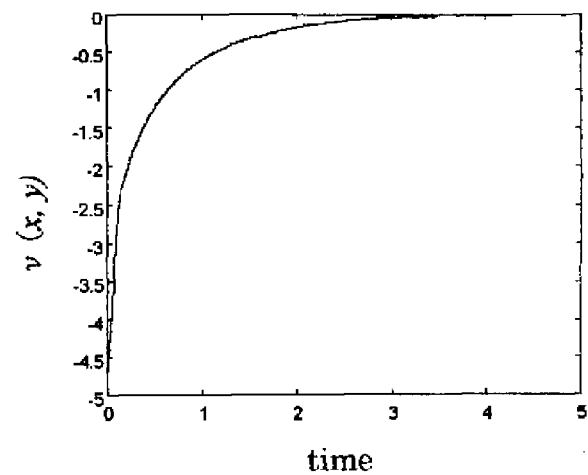


図8. 操作量 (チャタリング回避)