

連続変形法による最適制御問題の数値解法

A computational method for optimal control problems via continuation methods

井前讓*, ○井上和弘**, 高橋淳也**

Joe Imae*, ○ Kazuhiro Inoue**, Junya Takahasi**

*岩手大学工学部, **岩手大学大学院

*Faculty of Engineering, Iwate University

**Graduate school of Engineering, Iwate University

キーワード: 数値解法, 最適制御問題, 連続変形法, 非可微分問題

連絡先: 〒020 盛岡市上田 4-3-5, 岩手大学工学部機械工学科
井前 讓 Tel: 019(621)6401, E-mail: jima@iwate-u.ac.jp

1. はじめに

非線形最適制御問題に対し最適制御アルゴリズムはその解を求める有力な手法の1つといわれる。しかし、対象とする関数は可微分でなければならず、必ずしも微分可能ではない関数(非可微分関数)が含まれる場合、最適制御アルゴリズムは適用できない。対象システムの大規模化、複雑化に伴いアルゴリズムの適用範囲の拡大が望まれている。本論文では、非可微分関数を含む場合の最適制御問題を扱う。具体的には、連続変形法¹⁾の考え方に着目し、通常最適制御問題と非可微分のそれとを連続的に関連づけることにより、非可微分な場合にも適用可能な新たな最適制御アルゴリズムを提案する。その際、統一的手法の確立が困難との判断から2つの場合に分けて議論する。

2. 最適制御問題

2.1 通常最適制御問題

最適制御問題は一般に次のように定式化される。すなわち、状態方程式、初期状態がそれぞれ

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

で与えられるとき、評価関数

$$J = G(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t)) dt \quad (2)$$

を最小にする操作量 $u(t)$ を求める問題である。

ただし、 $x: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ は絶対連続関数。

$u: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ は本質的有界な可測関数とし、 f, G, L は連続的微分可能関数とする。

この場合、アルゴリズムは以下のように与えられる。

[アルゴリズム]²⁾

<ステップ0> $\beta \in (0,1)$, $M_2 \in (0,1)$ とする。

<ステップ1> 可測関数 $u^0(t): [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ を選び, $i=0$ とする。

<ステップ2> $u^i(t)$ を用いて, 式(1)より $x^i(t)$ を求める。

<ステップ3> 式(3)-(5)より, $\delta x^i(t), K^i(t), r^i(t), \delta u^i(t)$ を求める。

$$\begin{aligned} \delta x^i(t) = & [f_x(t, x^i, u^i) \\ & + f_u(t, x^i, u^i)(C^i)^{-1} \{f_u(t, x^i, u^i)^T K(t)\}] \delta x(t) \\ & + f_u(t, x^i, u^i)(C^i)^{-1} \{f_u(t, x^i, u^i)^T r(t) \\ & - L_u(t, x^i, u^i)^T\}, \delta x(t_0) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} K^i(t) = & -K(t)f_x(t, x^i, u^i) - f_x(t, x^i, u^i)K(t) + B^i \\ & + \{K(t)f_u(t, x^i, u^i)\}(C^i)^{-1} \{-f_u(t, x^i, u^i)^T K(t)\}, \\ K(t_1) = & -A^i \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} r^i(t) = & -f_x(t, x^i, u^i)^T r(t) + L_u(t, x^i, u^i)^T \\ & + \{-K(t)f_u(t, x^i, u^i)\}(C^i)^{-1} \{-L_u(t, x^i, u^i)^T \\ & + f_u(t, x^i, u^i)^T r(t)\}, r(t_1) = -G(x(t_1)) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \delta u^i(t) = & (C^i)^{-1} [\{f_u(t, x^i, u^i)^T K(t)\} \delta x(t) \\ & + f_u(t, x^i, u^i)^T r(t) - L_u(t, x^i, u^i)^T] \end{aligned} \quad (6)$$

<ステップ4> $\alpha^i = 1$

<ステップ5> $u^{i+1}(t) = u^i(t) + \alpha^i \delta u^i(t)$ とおき, $u^{i+1}(t)$ を用いて, 式(14)より $x^{i+1}(t)$ を求める。もし,

$$J(u^{i+1}) - J(u^i) \leq -\alpha^i M_2 \int_{t_0}^{t_1} H_u(t, x^i, u^i, p^i) \delta u^i dt \quad (7)$$

ならば, ステップ6へ。それ以外は, $\alpha^i = \beta \alpha^i$ とおいて, ステップ5を繰り返す。ここに,

$$H(t, x, u, p) = -L(t, x, u, p) + p^T f(t, x, u, p)$$

であり, $p^i(t)$ は式(21)の解である。

$$\dot{p}(t) = -f_x(t, x^i, u^i)^T p(t) + L_x(t, x^i, u^i)^T$$

$$p(t_1) = -G_x(x^i(t_1))^T$$

<ステップ6> もし評価関数の値が収束したと判断したとき終了する。それ以外は $i=i+1$ とおいて, ステップ3へ戻る。

2.2 非可微分最適制御問題

前述の最適制御問題では, f, G, L が可微分な場合を取り扱うのに対し, 本論文では非可微分な場合を扱う。ここで, この非可微分な問題に対する接近法として, f, G, L の近似関数 f_i, G_i, L_i を見つけるのが簡単な場合と困難な場合の2つの場合に分けて考える。

● 近似関数法

f, G, L の近似関数 f_i, G_i, L_i を見つけるのが簡単な場合について考える。

いま,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f, \lim_{i \rightarrow \infty} G_i = G, \lim_{i \rightarrow \infty} L_i = L$$

となるような可微分関数列 $\{f_i\}, \{G_i\}, \{L_i\}$ が存在するとする。このとき, f, G, L を f_i, G_i, L_i に置き換えることで, 2.1 節の最適制御問題を導く。すなわち, 状態方程式及び評価関数

$$\dot{x}(t) = f_i(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

$$J_i = G_i(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L_i(t, x(t), u(t)) dt$$

のもとに最適解を求め, $i \rightarrow \infty$ として最適制御問題を連続的に変形することにより非可微分な問題の最適解を探し出す方法である。

(注意) 実際の計算では必ずしも $i \rightarrow \infty$ とする必要はなく, 評価関数が落ち着いたところで終了すればよい。

● 区間延長法

近似関数 f_i, G_i, L_i を見つけるのが困難な場合について考える。関数 f, G, L が全領域において非可微分関数であったとしても, 現実的には (x, u) がある領域内では可微分となることがある。そして, そのような領域内に議論を限定すれば 2.1 節の最適制御問題として解くことができると考えられる。しかしながらこのような

場合、従来のアルゴリズムでは成功率が低いとされている。なぜなら繰り返し計算の途中で必ずと言っていいほど可微分領域をはみ出してしまふからである。本論文ではそれを防ぐため、ある意味の最適解を可微分領域内で連続的に変形し徐々に必要とする最適解に近づけていく方法を探る。具体的には、解法可能な制御時間までの最適解を求め、その最適操作量を制御時間も含め、連続的に変形し必要とする制御時間までの最適解を求める。この方法では最適解は可微分領域内に存在することが前提である。

3. アルゴリズム

3.1 近似関数法

<ステップ0> システム f, G, L を f_i, G_i, L_i に置き換える。

<ステップ1> f_i, G_i, L_i の最適制御問題を解く。

<ステップ2> 前回の最適操作量 $u(t)$ を基に $i=i+1$ としたシステムの最適制御問題を解く。

<ステップ3> 前回の評価関数値 J と比較して、 J が安定したら終了。それ以外はステップ2へ。

3.2 区間延長法

<ステップ0> 評価関数 J が発散せず、最適制御問題を解くことが出来る制御時間 t_f までの最適解を求める。このときの刻み数を n_s とする。

<ステップ1> 前回求められた最適操作量 $u(t)$ のデータの末尾に σ 個のデータを付加する。付加するデータは $u(t_f)$ とする。

<ステップ2> ステップ1で構成された $u(t)$ を基に最適解を求める。この時点で、制御時間は $t_f = t_f + \sigma t_s / n_s$ となっている。

<ステップ3> 制御時間 t_f が終端時刻 t_1 に到達したら終了。それ以外はステップ1へ。

4. 数値実験

簡単な最適制御問題により2種類の提案アルゴリズムの有効性を示す。微分積分計算の刻み数は500とした。まず、従来のアルゴリズムを試みる。次に、従来のアルゴリズムに内点ペナルティ法を併用した場合を試みる。最後に、本アルゴリズム(2種類)を適用する。

Fig.1 に示すようなシステムを考える³⁾。質量 m の車が摩擦なしに、質量を無視できるガイドレールの上を動く。時間を τ として車の位置を r とする。この車は質量のないばねで固定されている。 $r(\tau) = r_0$ のときばねに力は加わっていない。このガイドレールは $r(\tau) = 0$ を中心にトーションスプリングを介して回転している。 $\varphi(\tau)$ はガイドレールの回転角、 $\varphi_0(\tau)$ はモータの軸の回転角である。 $\varphi(\tau) = \varphi_0(\tau)$ のときトーションスプリングに力は加わっていない。このとき運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} mr''(\tau) - mr(\tau)(\varphi'(\tau))^2 + \kappa_1(r(\tau) - r_0) &= 0 \\ 2mr(\tau)r'(\tau)\varphi'(\tau) + mr(\tau)^2\varphi''(\tau) + \kappa_2(\varphi(\tau) - \varphi_0(\tau)) &= 0 \end{aligned}$$

ここでプライムは τ に関する微分を表し、 κ_1, κ_2 はそれぞればねとトーションスプリングのばね定数を表す。次に、標準化した時間 $t = \omega_0\tau$ と距離 $\rho(t) = \sqrt{\kappa_1/\kappa_2}r(t/\omega_0)$ 、 $\rho_0 = \sqrt{\kappa_1/\kappa_2}r_0$ (ここで $\omega_0 = \sqrt{\kappa_1/m}$) を導入する。 $x_1(t) = \varphi(t/\omega_0)$, $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$, $x_3(t) = \rho(t)$, $x_4(t) = \dot{x}_3(t)$, $u(t) = \varphi_0(t/\omega_0)$ とするとこのシステムの状態方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{u(t) - x_1(t)}{x_3^2(t)} - \frac{2x_2(t)x_4(t)}{x_3(t)} \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) &= x_2^2(t)x_3(t) - (x_3(t) - \rho_0) \end{aligned} \quad (8)$$

いま、 $\rho_0 = -10$ とし、平衡状態の1つとして軌道を与える。

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \sqrt{26}t \\ \bar{x}(t) &= [\sqrt{26}t, \sqrt{26}, 0.4, 0]^T \end{aligned} \quad (9)$$

そして、評価関数を次のように与える。

$$J(x, u, \bar{x}, \bar{u}) = \frac{1}{2} (x(t_f) - \bar{x}(t_f))^T \bar{S} (x(t_f) - \bar{x}(t_f)) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [(x(t) - \bar{x}(t))^T \bar{Q} (x(t) - \bar{x}(t)) + (u(t) - \bar{u}(t))^T \bar{R} (u(t) - \bar{u}(t))] dt$$

ここで最終時間 $t_f = 5$, $\bar{Q} = I$, $\bar{R} = 0.1$, $\bar{S} = I$ とする。

[最適制御問題]

システム方程式が(8)式で与えられ, x_3 の初期値が $x_3(0) = 1.4$ とするとき, すみやかに平衡状態(9)に戻るための最適操作量を求めよ。

この問題の場合, 可微分条件を満足しない要素は $1/x_3, 1/x_3^2$ である。

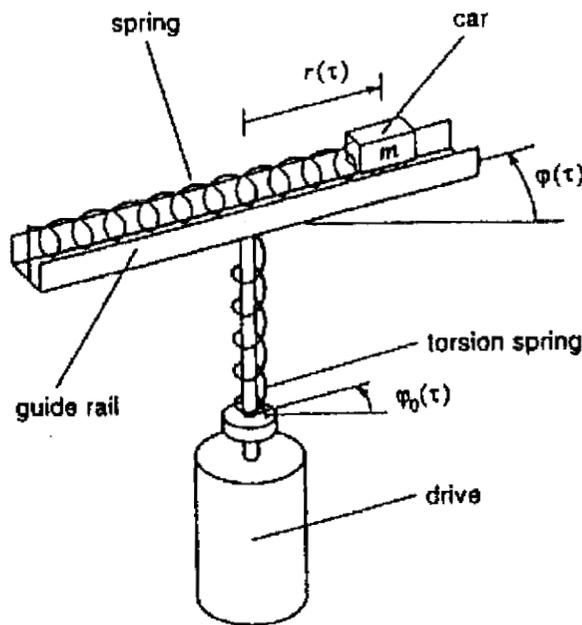


Fig.1: 対象システム

4.1 従来のアルゴリズム

従来のアルゴリズムで解こうとした場合, 繰り返し計算の過程において, $x_3 = 0$ の近傍で状態方程式が発散し計算は続行不能となった。最適解は $x_3 = 0$ を通過しないにも拘らず計算不能に陥る現象が見られた。

4.2 内点ペナルティ併用法

このシステムは $x_3 = 0$ で状態方程式が発散するので, $x_3 = 0$ を通過しないように $x_3 \geq 0.1$ なる制限を課した。したがって, 状態量拘束条件下の最適制御問題となるため, 内点ペナルティ法を併用した。その際の拡張評価関数 \tilde{J} は

$$\tilde{J} = J + \int \frac{r}{z_3 - 0.1} dt$$

r : 内点ペナルティパラメータ

とした。しかし, この場合にも評価関数の改善は見られず, 計算不能に陥った。

4.3 提案するアルゴリズム

● 近似関数法

今回は状態方程式の $1/x_3, 1/x_3^2$ を $x_3 = 0$ 近傍において, それぞれ 5 次式, 4 次式で近似した。例えば, $y = 1/x_3$ を $|x_3| < a$ で 5 次式近似すると次のようになる (Fig.2)。

$$y = \frac{1}{a^6} x_3^5 - \frac{3}{a^4} x_3^3 + \frac{3}{a^2} x_3 \quad (|x_3| < a)$$

したがって, システム(1)の \dot{x}_2 を次のように近似した。

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & (u - x_1) \left(\frac{1}{a^6} x_3^4 - \frac{3}{a^4} x_3^2 + \frac{3}{a^2} \right) \\ & - 2x_2 x_4 \left(\frac{1}{a^6} x_3^5 - \frac{3}{a^4} x_3^3 + \frac{3}{a^2} x_3 \right) \end{aligned} \quad (|x_3| < a)$$

ここに

$$a = \left(\frac{1}{2} \right)^i$$

このような近似関数のもと, $i = 0$ からスタートし, $i = 3$ で最適解に到達した (Fig.3)。近似関数をどのように選定するかは問題点はあるものの, 従来の最適制御アルゴリズムをそのまま機械的に適用するだけで十分であり, 比較的簡単である。

● 区間延長法

次に, 制御区間を延長する方法をこの問題に適用する。試行錯誤の結果, $t_s = 2, \sigma = 20$ とした。また, 制御時間 $t_f = 5$ で刻み数 $n = 500$ となるように初回刻み数を $n_s = 200$ とした (Fig.4, Fig.5)。この方法は, 可微分領域内に軌道をと

どめるため区間延長の仕方に難点があり試行錯誤を必要とするものの、近似関数に注意を払う必要がなく比較的簡便な方法である。但し、計算時間に関しては近似関数法の方が比較的短い傾向を示した。

5. 結言

制御対象が非可微分要素を含む場合の最適制御アルゴリズムを2種類提案した。そして、提案した2つのアルゴリズム同士の比較を行った。どちらも1長1短がありケースバイケースの使い方が必要と思われる。

参考文献

- 1) Stephen L. Richter, Raymond A. DeCarlo: Continuation Methods: theory and Applications, IEEE Transactions on Circuits And Systems, vol. CAS-30, NO 6. 347/352 (1983)
- 2) 井前謙, 他2名, 日本機械学会論文集 (C編) 62-600, 3168/3174 (1996)
- 3) Konrad Reif, Klaus Weinzierl, Andreas Zell and Rolf Unbehauen: Application of Homotopy Methods to Nonlinear Control Problems, Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, 533/538 (1996)

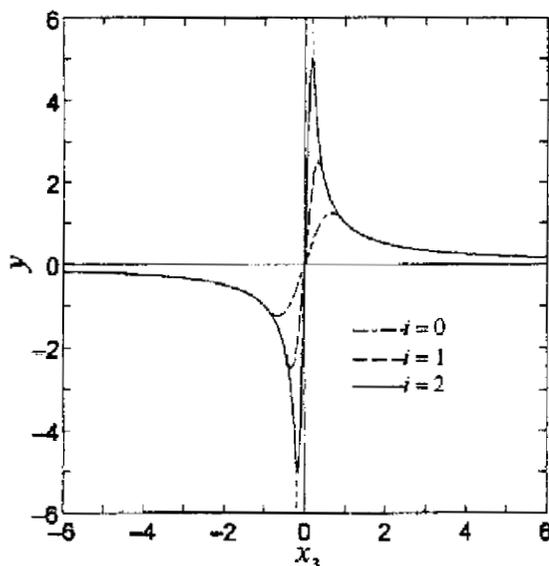


Fig.2: $1/x_3$ の近似

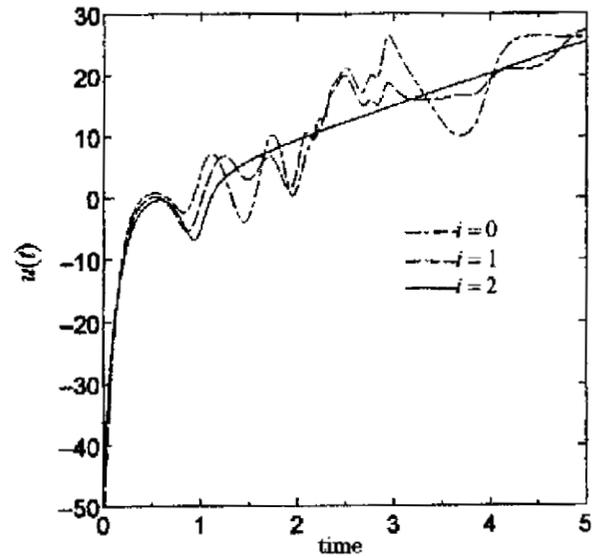


Fig.3: 操作量 $u(t)$ (近似関数法)

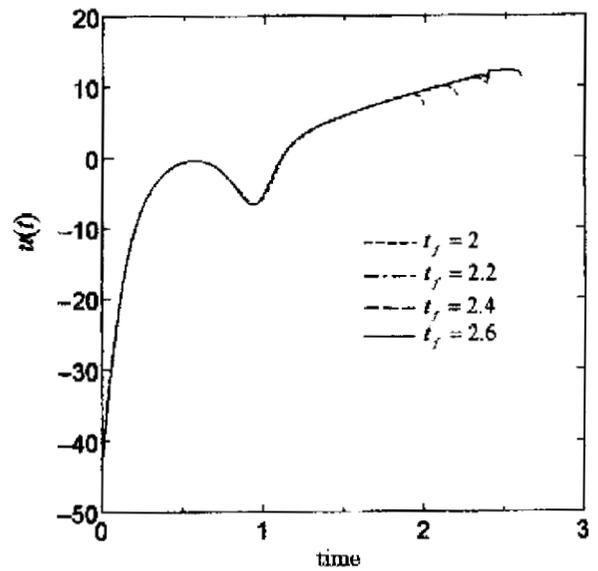


Fig.4: 操作量 $u(t)$
(区間延長法, $t_f = 2, 2.2, 2.4, 2.6$)

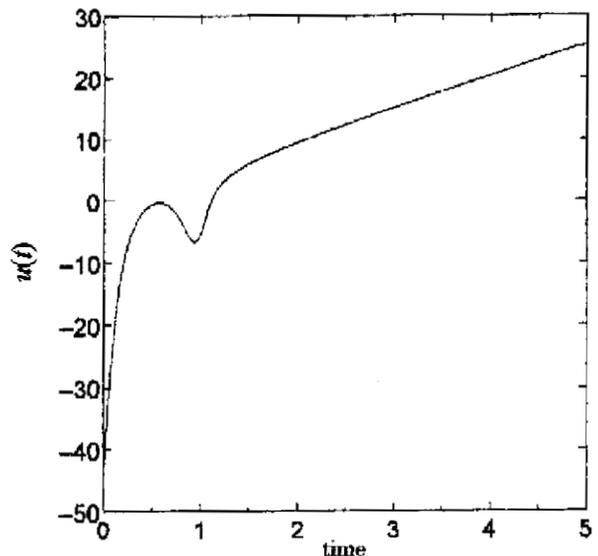


Fig.5: 操作量 $u(t)$
(区間延長法, $t_f = 5$)