

間欠的観測によるカオスダイナミクスの推定

Estimation of chaotic dynamics via an intermittent observation of driving signals

○長谷川武史*, 本間経康**, 阿部健一*

○Takeshi Hasegawa*, Noriyasu Honma**, Kenichi Abe*

*東北大学大学院工学研究科, **東北大学医療技術短期大学部

*Graduate School of Engineering, Tohoku University

**Dept of Radiological Tech., Col. of Medical Sciences, Tohoku University

キーワード : 同期 (synchronization), カオス (chaos), 推定 (estimation)

連絡先 : 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉05 東北大学 大学院 工学研究科 電気・通信工学専攻 阿部研究室
長谷川武史, Tel.: (022)217-7074, Fax.: (022)263-9290, E-mail: hase@abe.ecei.tohoku.ac.jp

1. はじめに

現代制御理論における状態方程式をもとにした設計法では、状態量が直接観測できるという前提にたつて議論される場合が多い。しかし、現実にはシステムの状態変数のすべてを直接観測することは困難であり、多くの場合制御対象の外部から直接観測することのできる出力量などをもとにして、状態量を推定することが必要になる³⁾。

状態量を推定するには一般にそのシステムの挙動を(近似的に)表すモデルが得られれば良い。しかしシステムがカオスである場合、たとえ全く等しいモデルが得られたとしても、微小な測定誤差などがシステム全体に影響を与える大きさにまで増幅されるという初期値敏感性²⁾のためにそれに対する対策が必要となる。

Pecoraらによって提案されたカオスシステムの同期法は、2つの同じシステム間に初期誤差がある場合でも、一方のシステムからある特別な状態

量(ドライブ信号)を観測することにより、別のシステムから残りの状態量を精度良く推定できる手法である⁶⁾。

同期法により初期値敏感性に対する解決策は見出されたが、同期法はシステムを記述する式を必要とするため、システムが既知でなければならない。したがってシステムが未知の場合は何らかのモデルによってシステムを同定したのち、モデルにドライブ信号を入力して同期させる方法が考えられる。Otawaraらは、モデルとしてニューラルネットワークを用いることにより、未知カオスシステムを比較的良い精度で同期させることに成功している⁵⁾。

しかし、従来の同期法は常にドライブ信号を観測する必要があるため、たとえば離散時間システムの場合、次の時刻における値を予測できるに過ぎず、時系列の長期推定などには応用できない。また、実際の制御などへの応用では、誤差は小さい

ほど望ましいが常に0であることが要求されることは少なく、むしろ許容誤差が指定されている場合も多い。

2. 同期法

Pecoraらは共通のドライブ信号を用いることによって、カオスシステムを同期させる方法を示した。以下にそのシステム構成法の概要を述べる。はじめに、 n 次元システム

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$$

を考える。ここで、 $\mathbf{x} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$ として2つのサブシステム $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $\mathbf{w} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)$ に分割する。 \mathbf{v} , \mathbf{w} はそれぞれドライブシステム、応答システムと呼ばれている。

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{h}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad (3)$$

つぎに、 \mathbf{w} と等しいシステム(モデルシステム) $\hat{\mathbf{w}} = (\hat{x}_{k+1}, \hat{x}_{k+2}, \dots, \hat{x}_n)$ を用意する。

$$\dot{\hat{\mathbf{w}}} = \mathbf{h}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{w}}) \quad (4)$$

これら2つのシステムの応答システムに着目して、次式で定義される時刻 t における誤差 $e(t)$ の大きさについて考える。

$$e(t) = \|\mathbf{w}(t) - \hat{\mathbf{w}}(t)\| \quad (5)$$

\mathbf{f} がカオスを生み出す非線形関数の場合、全く等しい2つのシステムを用意したとしても、初期値がほんのわずかでも異なれば、カオスの初期値敏感性のために誤差が拡大し、未来の状態 $\mathbf{w}(t)$ の値を $\hat{\mathbf{w}}$ から予測することは不可能になってしまう(Fig.1)。すなわち、 $e(0) = \|\mathbf{w}(0) - \hat{\mathbf{w}}(0)\| \neq 0$ であれば、任意の時刻における $e(t)$ は原理的に予測できないこ

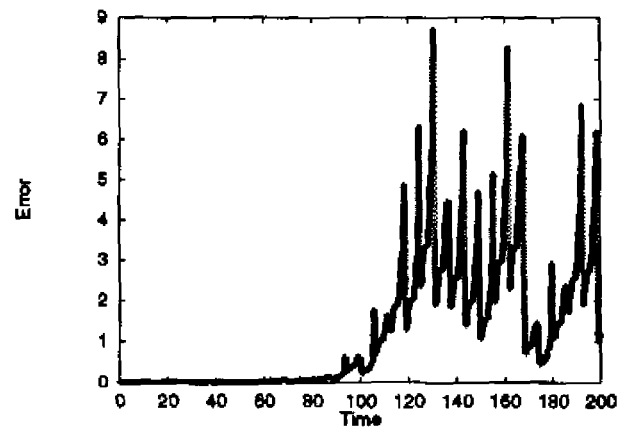


Fig. 1 カオスの初期値敏感性

とを意味する。そこで、2つのシステムの \mathbf{v} を共通の信号(ドライブ信号)とする、つまり

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \quad (6)$$

とする(Fig.2)。このようなシステムを構成することによって、たとえシステムがカオスであり初期値が異なっても、推定誤差を抑制することが可能である。すなわち同期することが可能である(Fig.3)。 \mathbf{v} は2つのシステム \mathbf{x} と $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{v}, \hat{\mathbf{w}})$ で共通であるから、システム全体の挙動として同期を考えると、

$$\forall \mathbf{x}(0) \neq \hat{\mathbf{x}}(0)$$

$$\|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\| \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow \infty) \quad (7)$$

と書くこともできる。ただし、(7)式が成り立つためには、応答システム \mathbf{w} のリアプノフ指数(サブリアプノフ指数)が負であることが必要である⁶⁾。リアプノフ指数は誤差の拡大を表す指標であり、その値が正であればカオスであることが知られている。

3. 提案同期法

従来の同期法は、常にドライブ信号を観測する必要があるため、時系列の長期予測は不可能であった。ここでは、ある時間はドライブ信号を必要としない、すなわち間欠的なドライブ信号による同期法を提案する(Table.1)。

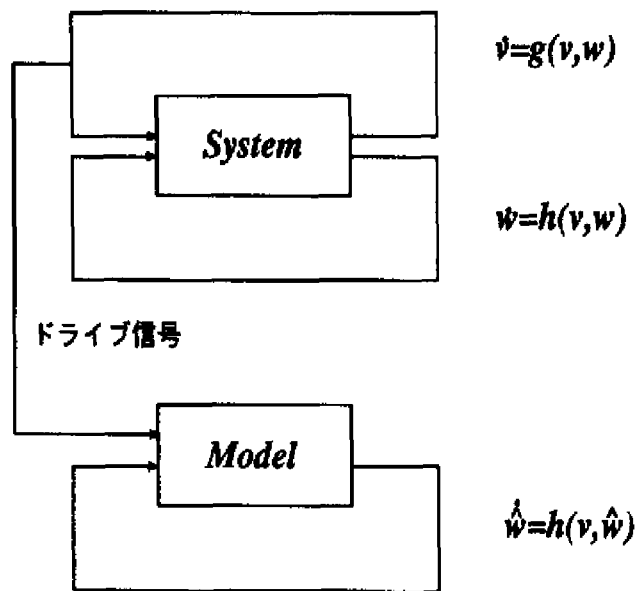


Fig. 2 同期システム

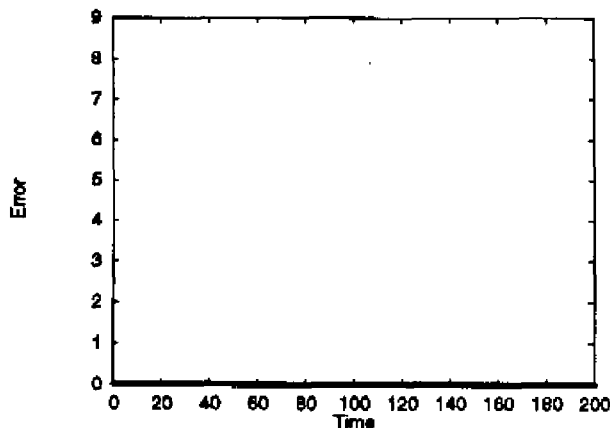


Fig. 3 同期例

Table 1 同期法の比較

従来同期法	ドライブ信号を常に観測
提案同期法	ドライブ信号を間欠的に観測

実際の制御において、モデルを用いて状態量を推定する際、モデルによる推定値には許容誤差が与えられていることが多い。そこで与えられた推定値を許容誤差内に抑えることを考える。すなわち、ドライブ信号 v のかわりに、モデルシステムの状態方程式 $\dot{\hat{v}} = g(\hat{v}, \hat{w})$ で計算した信号 \hat{v} を用いた場合の推定誤差が許容範囲内に収まっている時間 t_0 を知ることができれば、その期間はドライブ信号を観測しなくてもすむため、 t_0 後までの所望の予測が可能となる。

本稿では最大リアプノフ指数 λ の定義式から、予測可能時間 t_0 を導く。最大リアプノフ指数は次式で与えられる。

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\tau} \sum_{i=0}^{N-1} \log \frac{|d_i(\tau)|}{|d_i(0)|} \quad (8)$$

(| $d_i(0)$ | = 一定)

ここで $|d_i(0)|$ は初期誤差であり、 $|d_i(\tau)|$ は τ 時間後の誤差である。

(8)式より最大リアプノフ指数とは、初期誤差 $|d_i(0)|$ から始まり、 τ 時間で誤差がどれだけ広がるかを平均的に表した指数であり、逆に λ を知ることができれば、時間 τ を求めることができる。そこで2つのシステム間の初期誤差を e_0 、許容誤差を d_0 とすると、推定誤差が d_0 を越えない平均の時間、すなわち予測可能な時間(t_0)は、(8)式より

$$t_0 = \frac{1}{\lambda} \log \frac{d_0}{e_0} \quad (9)$$

と求めることができる。したがって、ある時刻 t における初期誤差 e_0 から始めて、 $t+t_0$ までは計算した信号 \hat{v} を用いて予測させ、 $t+t_0$ 後誤差が e_0 に収まるまでドライブ信号 v を入力する。ドライブ信号 v を入力した後の誤差を新たな初期誤差と考えると、このような手順を繰り返すことにより、許容誤差 d_0 に収まるような同期が可能となる。

4. シミュレーション例

4.1 既知システムの同期

既知システムとして、次式で与えられるレスラー方程式を用いた。レスラー方程式は1つの不安定平衡点の回りを巡りながらカオスを示すシステムの運動方程式である。

$$\dot{x}_1 = -(x_2 + x_3) \quad (10)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \quad (11)$$

$$\dot{x}_3 = bx_1 - (c - x_1)x_3 \quad (12)$$

ここで、 a, b, c は定数であり $a = 0.344, b = 0.4, c = 4.5$ とした。このとき、最大リアプノフ指数 λ は約0.08である。また、同期可能条件より、 $v = x_2, w = (x_1, x_3)$ とする。このシステムにおいて、初期誤差 e_0 を1.0とし、許容誤差 d_0 を2.0とすると、(9)式より予測可能時間 t_0 は約8.66秒と求められる。しかし、 λ は平均値であるため当然 t_0 も予測可能な時間の平均値である。よって、常に d_0 を越えないためにはこれよりも短い間隔でドライブ信号 v を入力しなければならない。そこで t_0 を5%短い8.23秒とした場合をFig.4に示す。これより提案手法が同期に成功しているのがわかる。

従来法ではステップ間隔(シミュレーションでは0.01秒)の短期しか予測できないが、提案手法では許容誤差内の長期予測が可能であることが示された。

4.2 未知システムの同期

システムが未知である場合、対象とするシステムのモデルが必要となるが、制御対象がカオスのように複雑であれば同定もまた困難となる。本稿では、任意の非線形関数を学習可能であるという理由からモデルとしてリカレントニューラルネットワーク(RNN)を用い、非線形システムの同定を行った。

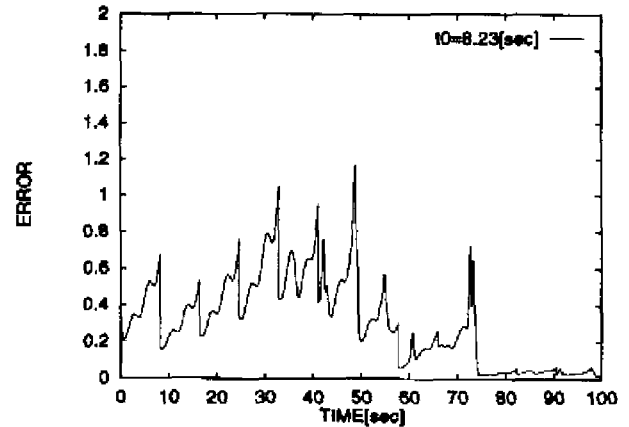


Fig. 4 間欠的ドライブ信号によるレスラー方程式の同期

すなわち、任意の非線形関数は有限個のシグモイド関数の和で近似できることが証明されており、(1)式の f は以下のように近似できる⁴⁾。

$$\hat{f}_i(x) = \sum_{j=1}^m A_{ij} G \left(\sum_{i=1}^n B_{ji} x_i + \theta_j \right) \quad (13)$$

$$\max_{x \in \Omega} |\hat{f}_i(x) - f_i(x)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n \quad (14)$$

ここで、 Ω はベクトル場 $f(x)$ が連続であるようなコンパクト領域、 G はシグモイド関数であり次式で与えられる。

$$G(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{x}{u_0} \right) \quad (15)$$

ここで、(13)式が(1)式の近似であることを考慮して、 x の代わりに \hat{x} を用いると次式が得られる⁷⁾。

$$\dot{\hat{x}}_i = \sum_{j=1}^l A_{ij} z_j, \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

$$z_j = G \left(\sum_{i=1}^n B_{ji} \hat{x}_i + \theta_j \right), \quad j = 1, \dots, l \quad (17)$$

この式はFig.5で示されるRNNの運動方程式とみなすことができる。この図で、シグモイドユニットは、(16)式の z_j に対応し、ダイナミックユニットは、(17)式の $\dot{\hat{x}}_i$ に対応している。

このRNNの結合係数 A_{ij}, B_{ji} 、閾値 θ_j を、学習則に従って変更することを繰り返す、レスラー方程式を学習させる¹⁾。

Fig.7はレスラー方程式のアトラクタであり、Fig.8は $n = 3, l = 30$ のRNNにレスラー方程式を学習さ

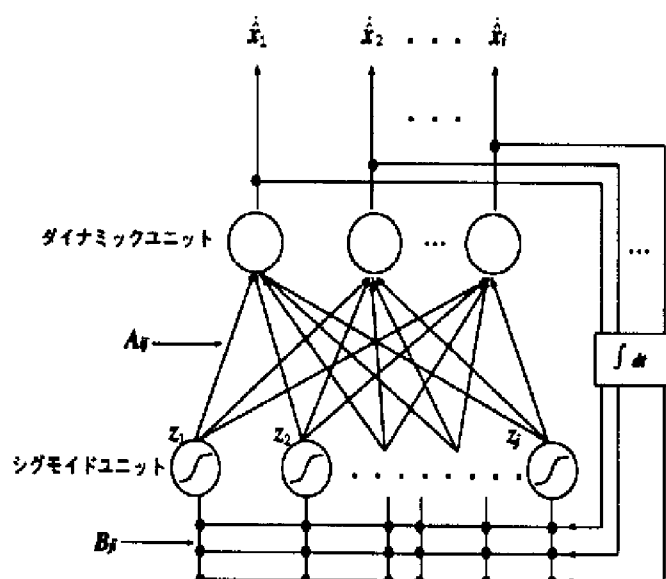


Fig. 5 近似式の表す構造

せた結果である。アトラクタの比較からRNNはレスラー方程式のアトラクタを近似できていることが判る。この場合、パラメトリックな同定法ではないので同定誤差をどの程度なのかを定量的に判断するのは難しい。ただしこのシミュレーションにおける同定誤差が0でないことは、次のような事実によって明らかである。すなわち、Fig.6は、初期値が同じときのレスラー方程式の状態量 x_1 と学習後のRNNモデルの状態量 \hat{x}_1 との誤差($x_1 - \hat{x}_1$)の時間変動を表したものであるが、次第に誤差が拡大し予測不能となる。初期状態が同じとき、システムが全く同じであれば(同定誤差が0であれば)、その後の誤差も永久に0となるはずだから、この場合の同定誤差は0ではない。

つぎに、学習後のRNNをレスラー方程式のモデルとして提案同期法を適用した。

この場合、初期誤差による影響の他に、同定誤差による影響によって、予測できる時間は t_0 より短くなると考えられる。実際のシミュレーションにおいても、既知システムの場合と同じ8.23秒では許容誤差 $d_0 = 2.0$ を越えてしまう結果になった。しかし、さらに短い4.9秒にすると許容誤差内に抑えることが可能となった(Fig.9)。

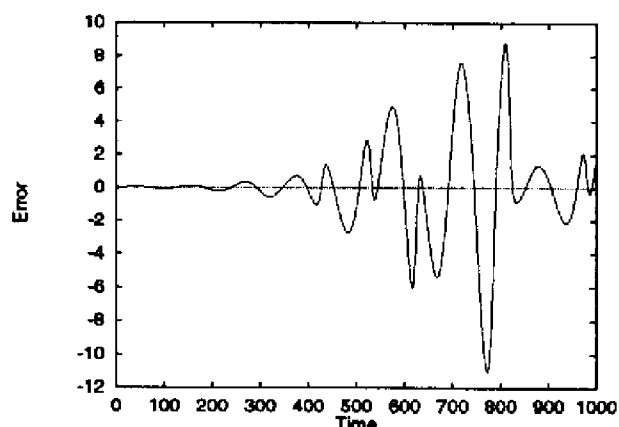


Fig. 6 同定誤差の影響

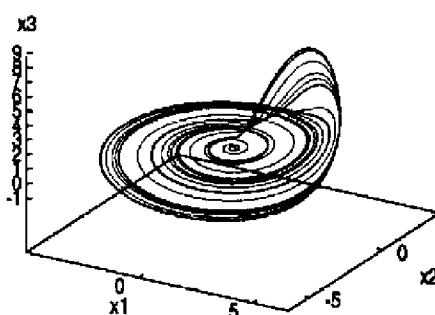


Fig. 7 レスラー方程式のアトラクタ

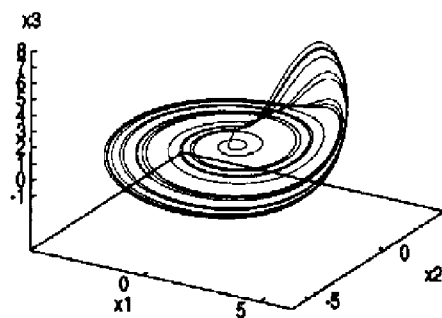


Fig. 8 RNNのアトラクタ

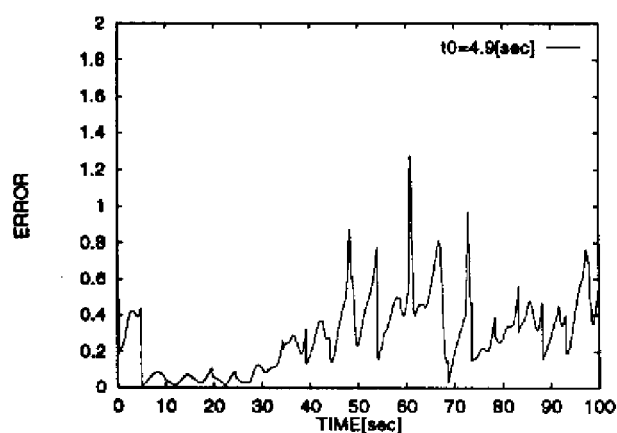


Fig. 9 間欠的ドライブ信号によるRNNの同期

5. おわりに

本稿では、間欠的な観測によってカオスシステムを同期させる手法を提案した。提案手法におけるドライブ信号の観測間隔 t_0 は、同期させるシステム間の応答システムの誤差が許容範囲に収まっている時間であり、この時間 t_0 は最大リアプノフ指数の定義式から求めた。間欠的なドライブ信号を用いることによって、 t_0 内のカオスシステムの予測が可能であることがシミュレーション結果より示された。さらにシステムが未知であり、モデルの同定誤差がある場合でも、従来法よりも長期予測が可能であることを示した。同定誤差の定量的評価は今後の課題である。

参考文献

- 1) 合原一幸: ニューラルシステムにおけるカオス, 第7章, 東京大学出版局(1993)
- 2) G.L.ベイカー, J.P.ゴラブ: カオス力学入門, 哲学出版(1992)
- 3) 伊藤正美, 木村英紀, 細江繁幸: 線形制御系の設計理論, 計測自動制御学会(1978)
- 4) K.Funahashi: On the approximate realization of continuous mapping by neural networks, Neural Networks, 2, 183/192(1989)
- 5) K.Otawara and L.T.Fan: Synchronization in Chaotic Systems with Artificial Neural Networks, Proc. of IEEE Int'l. Conf. on Neural Networks, 3137/3142(1994)

- 6) Louis M.Pecora and Thomas L.Carroll: Synchronization in Chaotic Systems, Phys. Rev. Lett, vol.64, 821/824(1990)
- 7) M.Sato, Y.Murakami and K.Joe: Learning chaotic dynamics by recurrent neural networks, Proc. Int'l. Conf. on Fuzzy Logic & N.N.601/605(1990)
- 8) 長島弘幸, 馬場良和: カオス入門, 4章, 培風館