

構造系と制御系の同時最適設計に関する一考察 — 構造の離散的変動の取り扱い —

On Simultaneous Optimal Design of Structure and Control Systems — Treatment of Discrete Design Parameters —

秋田大学 ○平元 和彦, 土岐 仁, 大日方 五郎

Kazuhiko Hiramoto, Hitoshi Doki and Goro Obinata, Akita University

キーワード: 構造系と制御系の同時最適設計(simultaneous optimal design of structure and control systems)

連絡先: 〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1 秋田大学工学資源学部機械工学科 平元 和彦,
Tel.: 018-889-2341, Fax.: 018-837-0405, E-mail: hira@ipc.akita-u.ac.jp

1. はじめに

制御系を構成する際, 制御対象とコントローラ双方に調整可能な設計変数が存在することは珍しくない。このとき, 両方の設計変数を与えられた仕様を満足するように同時に調整する“構造系と制御系の同時最適設計法”が有効であると考えられている^{[1],[2]}。しかし, 現状では, 構造系, 制御系それぞれ単独の設計法と比較したとき, 同時最適設計問題を行うための手法が確立されているとは言えない。

同時最適設計問題は, 構造系とコントローラ双方に存在する設計変数を調整して, 設計仕様を表現する評価関数を最適化する問題に帰着される。この問題を, 汎用的な最適化コードを用いて直接解こうとするアプローチが存在する一方^{[3],[4]}多数, 解析的に解きやすい問題のサブクラスを明らかにしようとする研究も行なわれている^{[5],[6]}。しかしながら, 現在まで前述のアプローチの中で, センサの個数や構成部材の追加, 撤去などを決定するような, 制御対象の概念設計の段階から同時最適設計の考え方を取り入れた設計法は著者の知る限りでは存在しない。この設計初期段階でも, 同時最適設計の理論が設計者に何らかの回答を提示することは重要であると思われる(例: 現在の制御系設計理論では, センサやアクチュエータ数をいくつにすればよいか? という問題に明確に答えることはできない。)。構造系の最適設計のコミュニティでは, 上記のような概念設計段階への最適化手法の導入は位相最適化と呼ばれ, 近年盛んに研究されている^[7]。位相最適化を含む構造の最適設計は, 部材の追加, 撤去などの離散的な設計変数と, 各部材の形状などの連続的な設計変数が混在しているのが特徴であり, 最適解を求めることが困難であることが議論されている^[8]。しかし, 制御理論の立場から同時最適設計問題に取り組んでいる研究者の間では, この事実が必ずし

も認識されていないと思われる。これを踏まえて, 本報告は, 同時最適設計問題を前述したような離散的な設計変数も含めた形で再定式化することを目的とする。構成を以下に示す。2章で問題を定式化する。3章では設定された問題に対する構造最適設計の分野でのアプローチを簡単に紹介すると共に, 大域的な最適解を求めることが困難であることを示す。4章では, 一例として, 構造物のセンサ数, 形状, コントローラの同時決定問題をメタヒューリスティックスの手法の一つである SA (Simulated Annealing) を応用した設計アルゴリズムで試みに解いてみる。5章で今後の課題を述べる。なお, 以下制御対象中に存在する設計変数をパッシブパラメータと呼ぶことにする。

2. 問題設定

制御対象と重み関数から構成される一般化プラントの伝達行列を, 次式のように定義する。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} &= \mathbf{P}(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \\ \mathbf{P}(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s) \\ \mathbf{P}_{21}(s) & \mathbf{P}_{22}(s) \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A}(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d) & \mathbf{B}_1(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d) & \mathbf{B}_2(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d) \\ \hline \mathbf{C}_1(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d) & \mathbf{D}_{11}(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d) & \mathbf{D}_{12}(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d) \\ \mathbf{C}_2(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d) & \mathbf{D}_{21}(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d) & \mathbf{D}_{22}(\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_d) \end{array} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, $w \in \mathbb{R}^{N_w}$ は外乱, $u \in \mathbb{R}^{N_u(p_d)}$ は制御入力, $z \in \mathbb{R}^{N_z(p_d)}$ は制御出力, $y \in \mathbb{R}^{N_y(p_d)}$ は観測出力であり, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N(p_d) \times N(p_d)}$, $\mathbf{B}_1 \in \mathbb{R}^{N(p_d) \times N_w}$, $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{N(p_d) \times N_u(p_d)}$,

$$C_1 \in \mathbb{R}^{N_c(p_d) \times N(p_d)}, C_2 \in \mathbb{R}^{N_c(p_d) \times N(p_d)}, D_{11} \in \mathbb{R}^{N_c(p_d) \times N_c(p_d)},$$

$$D_{12} \in \mathbb{R}^{N_c(p_d) \times N_c(p_d)}, D_{21} \in \mathbb{R}^{N_c(p_d) \times N_c(p_d)}, D_{22} \in \mathbb{R}^{N_c(p_d) \times N_c(p_d)}$$

である。\$\mathbf{p}_c\$ は、連続的なパッシブパラメータ値をその要素に持つ \$N_c\$ 次元実ベクトルであり、\$\mathbf{p}_d\$ は、離散的な値（整数値）を持つパッシブパラメータ値をその要素に持つ \$N_d\$ 次元ベクトルである。\$\mathbf{p}_d\$ の要素である連続的な設計変数としては、例えば構造物の（部材）形状や、センサやアクチュエータの配置などが挙げられる。離散的な設計変数と考えられるものとしては、センサやアクチュエータの数、動吸振器や部材の有無などが挙げられる。また、構成部材として、ある規格化されたものを使用しなければならないような状況では、部材寸法なども \$\mathbf{p}_d\$ に含まれる。構造の質量、減衰、剛性値は正の値を取らなければならないことや、構造の形状を維持する（自重の支持など）必要性などから、一般的に \$\mathbf{p}_c\$ の各要素には上限、下限が存在する。以下、\$\mathbf{p}_c\$ は、以下のような集合 \$\mathbf{C}_c\$ に属しているものとする。

$$\mathbf{C}_c = \left\{ \mathbf{p}_c \in \mathbb{R}^{N_c} \mid \underline{\mathbf{p}}_c \leq \mathbf{p}_c \leq \overline{\mathbf{p}}_c, \underline{\mathbf{p}}_c, \overline{\mathbf{p}}_c \in \mathbb{R}^{N_c}, \overline{\mathbf{p}}_c - \underline{\mathbf{p}}_c \geq \mathbf{0}_{N_c} \right\} \quad (2)$$

\$\underline{\mathbf{p}}_c, \overline{\mathbf{p}}_c\$ は、\$\mathbf{p}_c\$ の上下限をその要素に持つベクトルである。また、\$\mathbf{p}_d\$ も \$\mathbf{p}_c\$ と同様の理由から、以下のような集合 \$\mathbf{C}_d\$ に属しているものとする。

$$\mathbf{C}_d = \left\{ \mathbf{p}_d \in \mathbb{I}^{N_d} \mid \underline{\mathbf{p}}_d \leq \mathbf{p}_d \leq \overline{\mathbf{p}}_d, \underline{\mathbf{p}}_d, \overline{\mathbf{p}}_d \in \mathbb{I}^{N_d}, \overline{\mathbf{p}}_d - \underline{\mathbf{p}}_d \geq \mathbf{0}_{N_d} \right\} \quad (3)$$

\$\mathbb{I}^{N_d}\$ は \$N_d\$ 次元で、整数をその要素に持つベクトル空間の全体である。\$\underline{\mathbf{p}}_d, \overline{\mathbf{p}}_d\$ は \$\mathbf{p}_d\$ の上下限を表すベクトルである。なお、\$\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_{11}, \mathbf{D}_{12}, \mathbf{D}_{21}, \mathbf{D}_{22}\$ の次元、\$\mathbf{p}_d\$ の関数であることに注意する。これにより、動吸振器などの追加、撤去による \$\mathbf{P}(s)\$ の次数の増減、センサ、アクチュエータ数の変化に伴う \$\mathbf{P}(s)\$ の入出力数の変動が表現可能になる。さらに、\$\mathbf{p}_c\$ の次元 \$N_c\$ も、\$\mathbf{p}_d\$ の関数である。これは、例えば、センサ数の変動により、決定しなければならない最適なセンサ配置数が増減する状況に相当する。

式(1)に対して、次式の \$M\$ 次の動的コントローラ \$\mathbf{K}(s)\$ を考える。

$$\mathbf{K}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_K(\mathbf{p}_K, \mathbf{p}_d) & \mathbf{B}_K(\mathbf{p}_K, \mathbf{p}_d) \\ \hline \mathbf{C}_K(\mathbf{p}_K, \mathbf{p}_d) & \mathbf{D}_K(\mathbf{p}_K, \mathbf{p}_d) \end{array} \right] \quad (4)$$

ここで、\$\mathbf{A}_K \in \mathbb{R}^{M(N_d) \times M(N_d)}\$, \$\mathbf{B}_K \in \mathbb{R}^{M(N_d) \times N_c(p_d)}\$, \$\mathbf{C}_K \in \mathbb{R}^{N_c(p_d) \times M(N_d)}\$, \$\mathbf{D}_K \in \mathbb{R}^{N_c(p_d) \times N_c(p_d)}\$ である。\$\mathbf{p}_K\$ は、コントローラ中の設計パラメータベクトルであり、その要素は連続的な値を持つ。\$\mathbf{T}(s)\$ の内部安定性を満足するためなどの理由により、\$\mathbf{p}_K\$ は、次式で定義される集合に属しているものとする。

$$\mathbf{C}_K = \left\{ \mathbf{p}_K \in \mathbb{R}^{N_K} \mid \underline{\mathbf{p}}_K \leq \mathbf{p}_K \leq \overline{\mathbf{p}}_K, \underline{\mathbf{p}}_K, \overline{\mathbf{p}}_K \in \mathbb{R}^{N_K}, \overline{\mathbf{p}}_K - \underline{\mathbf{p}}_K \geq \mathbf{0}_{N_K} \right\} \quad (5)$$

前述した \$\mathbf{p}_d\$ の次元 \$N_d\$ と同様に、\$N_K\$ も \$\mathbf{p}_d\$ の関数である。

\$\mathbf{P}(s), \mathbf{K}(s)\$ からなる閉ループ系の \$\mathbf{w}\$ から \$\mathbf{z}\$ までの伝達行列を \$\mathbf{T}(s)\$ と定義する。本報告では、構造の離散的変動も考慮にいたれた構造系と制御系の同時最適設計問題を以下のように定式化する。

【構造系と制御系の同時最適設計問題】

\$\mathbf{T}(s)\$ を内部安定化し、制御仕様 \$\mathbf{S}_c\$, 制御対象（構造系）に関する仕様 \$\mathbf{S}_s\$ およびコストに関する仕様 \$\mathbf{S}_e\$ を満足する \$\mathbf{p}_d \in \mathbf{C}_d, \mathbf{p}_c \in \mathbf{C}_c, \mathbf{p}_K \in \mathbf{C}_K\$ を見つけよ。

\$\mathbf{S}_e\$ は、例えば、“\$\mathbf{T}(s)\$ の \$H_\infty\$ ノルムを最小化せよ（またはある値 \$\gamma > 0\$ 以下にせよ）。” や、“\$\mathbf{w}\$ のある要素にステップ関数を印加したとき、\$\mathbf{z}\$ のある要素のオーバーシュートを 5% 未満とせよ。” などと記述される \$\mathbf{T}(s)\$ が満足すべき制御仕様の集合である。制御対象（構造系）に関する仕様 \$\mathbf{S}_s\$ は、“構造系の重量を最小化せよ。” や、“発生する曲げ応力の最大値を \$\sigma_{\max} > 0\$ 未満とせよ。” などと記述される制御対象そのものに与えられる仕様である。コストに関する仕様 \$\mathbf{S}_c\$ は、“構造の総コストがなるべく小さくなるような構成部材の材質を決定せよ。” や、“制御系のコストが \$c_{\max}\$ 以下になるようにセンサ、アクチュエータ数や、それらの質を決定せよ。” などと記述される。また、\$\mathbf{S}_c, \mathbf{S}_s, \mathbf{S}_e\$ には評価関数の最小化で表現される仕様、等式または不等式拘束条件で表現される仕様が含まれているものとする。

3. 解法に関する検討

2章で設定された問題は、拘束条件付きの多目的最適化問題である。設計変数には連続的な値を取りうる \$\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_K\$ および離散的な値を持つ \$\mathbf{p}_d\$ が混在している。この問題の解析的または数値的に見通しのよい（凸最適化問題や LMI に帰着できる。）解法は未だ見つかっていない。本問題のサブクラスで、今のところ系統的な解法の確立に近いものは、\$\mathbf{p}_d\$ が存在せず、\$\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_K\$ が式(1), (4)の各行列に線形に入っており、かつ \$\mathbf{S}_c, \mathbf{S}_s\$ が \$\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_K\$ の凸関数で記述された場合である。このとき、同時最適設計問題は、BMI 問題に帰着される^{[9], [10]}。BMI 問題は、NP-hard であることが示されており、多数の設計変数を最適化する場合、実用的な時間で解くことが困難であるが、その記述能力の高さから線形制御系設計理論の中で現在非常に活発に研究されている^[9]。しかし、実際の設計問題が、はじめから上記のサブクラスの範疇に入る場合はほとんどない。さらに、本論文で着目している離散的な設計変数 \$\mathbf{p}_d\$ を取り扱うことは不可能である。一方、部材の配置のような離散的な設計変数の最適化は、構造設計の分野では“位相最適化”と呼ばれ、現在活発に研究されている。位相最適化を含めた構造最適設計の手法としては、主に以下の二つ

のアプローチがある。

(1) 分枝限定法によるアプローチ^[11] 離散的な設計変数に関して分枝を行い、限定された（連続的な設計変数のみからなる）部分問題を解くことにより最適解を求める。

(2) 確率的アプローチ^{[11], [12]} ランダムサーチ, GA (Genetic Algorithm)や, SA (Simulated Annealing)などの確率的な探索法を用いて最適化を行う。

これらの手法を, 2章で定式化した同時最適設計問題に適用することを考える。(1)の手法は, 確実に最適解を求めることができるが, 限定された後の部分問題である BMI 問題を解くための手法が完全には確立されていないため, 今のところ実用的な時間で最適解を求めることは不可能だと思われる。一方, (2)のアプローチは, 離散的な設計変数と連続的な設計変数を区別せずに最適化が行えるため, アルゴリズム自体は簡単になる。また, 副次的に, 評価関数の微分情報を必要としないため, 勾配が求められないような評価関数でも最適化可能である。一方, 局所解への収束さえも確率的にしか保証されず, 最適化の最終結果が必ず最良の設計結果とはならない。このように, 離散的な設計変数も含めて定式化された同時最適設計問題を解くための有効な手法は存在せず, 今後の研究課題である。

4. 設計例

本章では, 設計例として, 図1に示すような長さが L で, センサ/アクチュエータ配置が成立したはり状構造物の同時最適設計問題を考える。本系を Rayleigh-Ritz 法を用いて 10 次モードまで近似し, 式(1)のように表す。設計変数及び設計仕様は以下の通りである。

制御対象の設計変数

離散的な設計変数ベクトル \mathbf{p}_d

- ・センサ/アクチュエータ数 N_a ($N_a=1 \sim 5$)

連続的な設計変数ベクトル \mathbf{p}_c

- ・はりを長手方向に 10 分割したときの断面積 a_i ($i=1, \dots, 10$)ただし, $\underline{a}_i \leq a_i \leq \bar{a}_i$

- ・センサ/アクチュエータ配置 ξ_i^s ($i=1, \dots, N_a$)

コントローラの設計変数ベクトル \mathbf{p}_k

- ・文献[4]の手法で図1の構造物に対してコントローラをパラメトライズしたときの設計変数

設計仕様

制御系に関する仕様 \mathbf{S}_c

- ・ $\xi=\xi_w$ に作用する外乱から操作量 \mathbf{u} までの H_2 ノルムの 2 乗 J_u を最小化する。
- ・閉ループ系の極 λ_i ($i=1, \dots, N+M$) の実部を

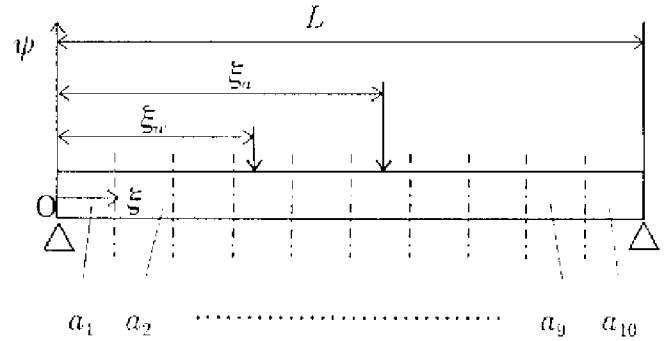


Fig. 1 Simply supported beam

$$\text{Re}(\lambda_i) \leq \lambda_{\max} \quad \forall i, \lambda_{\max} < 0 \text{ とする.}$$

- ・外乱として, $\xi=\xi_w$ にインパルス入力を印可したとき, コントローラの発生する操作量の絶対値の最大値を u_{\max} (>0)以下にせよ。

構造系に関する仕様 \mathbf{S}_s

- ・構造の重量 J_w を最小化する。

コストに関する仕様 \mathbf{S}_c

- ・センサ/アクチュエータの設置数に比例したコストが生ずるものとし, これを最小にするようなセンサ/アクチュエータ設置数を決定する。

以上の仕様で最適設計を行った。3章で述べたようにこの問題を解くための手法は確立されていない。本設計例では, 確率的なアプローチの一つである SA (Simulated Annealing)の手法を応用して最適な設計パラメータを探索する。SA 法は, 局所探索の手法に評価関数の確率的な改悪を許したものである。改悪の確率は, “温度”と呼ばれるパラメータを用いて探索初期は高くし, 探索の進行と共に低くする。これによって, アルゴリズムは探索初期にはランダムサーチ的に動作し, 探索終盤には単純な局所探索のように動作する。位相最適化に SA を応用したものは文献[12]にもある。本報告では, その手法とは異なり, 単純な SA 法に, \mathbf{p}_d (センサ/アクチュエータ数)の変化による評価関数値の大幅な改悪を, 探索初期は許し, 探索終盤は許さないような基準(この基準は確率的ではなく, 決定的に働く。)を加えて, 探索前半は積極的に \mathbf{p}_d を変化させ, 後半は \mathbf{p}_d を固定して $\mathbf{p}_c, \mathbf{p}_k$ の調整を行うようにした。問題は多目的最適化問題になるが, ここでは各評価の重み付き和を取って, 評価関数を単一目的化している。不等式拘束条件は, ペナルティ法を用いて処理している。 $\underline{a}_i = 0.5^2, \bar{a}_i = 1.5^2, \lambda_{\max} = -0.5, u_{\max} = 1$ とし, 1つのセンサ/アクチュエータの設置につき 100 のコストが生ずるものとして, 最適化を行った。繰り返し回数に対する J_u, J_w の変化を図2, 3に示す。図4に初期時および最適化後のはりの形状を示す。センサ/アクチュエータ数 N_a は 3 となった。図5は最適化後の閉ループ系の極を示している。図6, 7(a)は開, 閉ループ系のインパルス応答 ($\xi_w=0.3$ に印可時の $\xi=0.65$ でのはりのたわみ)を示し, 図7(b)はその時の操作量を

示している。閉ループ極や、操作量の上限に関する拘束が満足されていることが確認できる。前述したように、本アルゴリズムは最適解への収束は(局所的にも)保証できない。しかし、本数値例では比較的良好な結果が得られていることがわかる。

5. おわりに

本報告では、離散的な設計変数を考慮した構造系と制御系の同時最適設計問題を定式化した。従来の連続的な設計変数のみ考慮した同時最適設計法と比較し、本問題は最適解を求めることがより困難である。確率的探索手法である SA 法を用いた設計例を示したが、この方法は決してベストではない。最適解への収束性が保証され、かつより計算効率の高いアルゴリズムを開発することが今後の課題となる。

参考文献

- [1] R. E. Skelton: Integrating Design and Control of Dynamic Systems, Proc. of TITech COE/Super Mechano-Systems workshop '98, pp. 5/11 (1998).
- [2] 大日方五郎: 構造系と制御系の同時最適設計問題, 計測と制御, vol. 36, No. 4, pp. 254/261 (1997).
- [3] J. Onoda and R. T. Haftka: An Approach to Structure/Control Simultaneous Optimization for Large Space Spacecraft, AIAA Journal, vol. 25, No. 8, pp. 1133/1138 (1987).
- [4] 平元和彦, 土岐仁, 大日方五郎: Youla パラメトリゼーションをに基づく構造系と制御系の同時最適設計, 日本機械学会論文集, 投稿中.
- [5] 郷立勇, 大日方五郎: ディスクリプタ表現に基づく H_2 最適設計問題の定式化, 日本機械学会論文集 (C編), vol. 62, No. 597, pp.1765/1772 (1996).
- [6] 田中秀幸, 杉江俊治: 構造系と制御系の同時最適設計問題の一般的枠組みと BMI に基づく解法, 計測自動制御学会論文集, vol. 34, No. 1, pp. 27/33 (1998).
- [7] U. Kirsch: Optimal Topologies of structures, Applied Mechanics Reviews, vol. 42, No. 8, pp.223/239 (1989).
- [8] M. W. Huang and J. S. Arora: Optimal Design with Discrete Variables: Some Numerical Experiments, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, pp. 165/188 (1997).
- [9] 藤岡久也, 岩崎徹也: BMI: 非凸行列不等式に基づく制御系設計への挑戦, 計測と制御, vol. 36, No. 11, pp. 762/767.
- [10] E. Sandgren: Nonlinear Integer and Discrete Programming in Mechanical Design Optimization, Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, vol. 112, pp. 223-229 (1990).
- [11] C. D. Chapman, K. Saito and M. J. Jakiela: Genetic Algorithms as an Approach to Configuration and

Topology Design, Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, vol. 116, pp. 1005-1012 (1994).

- [12] G. Reddy and J. Cagan: An Improved Shape Annealing Algorithm for Truss Topology Generation, Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design, vol. 117, pp. 315-321 (1994).

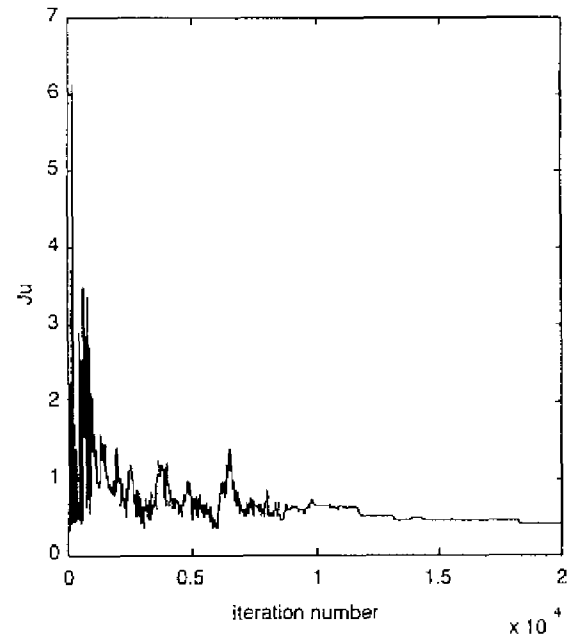


Fig. 2 Optimization history for J_u

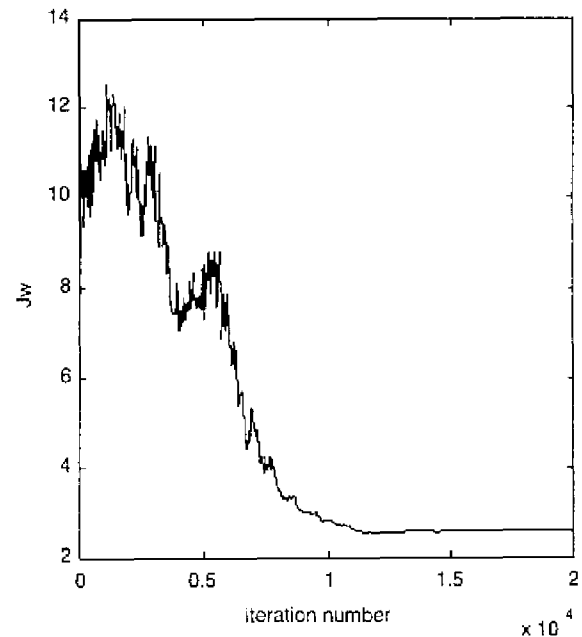


Fig. 3 Optimization history for J_w

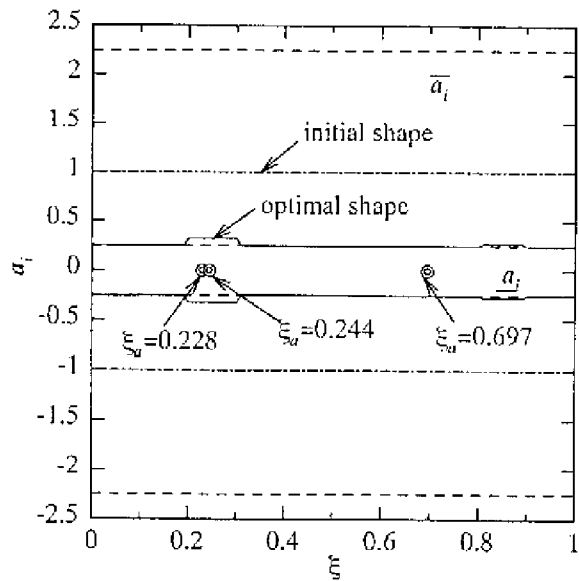
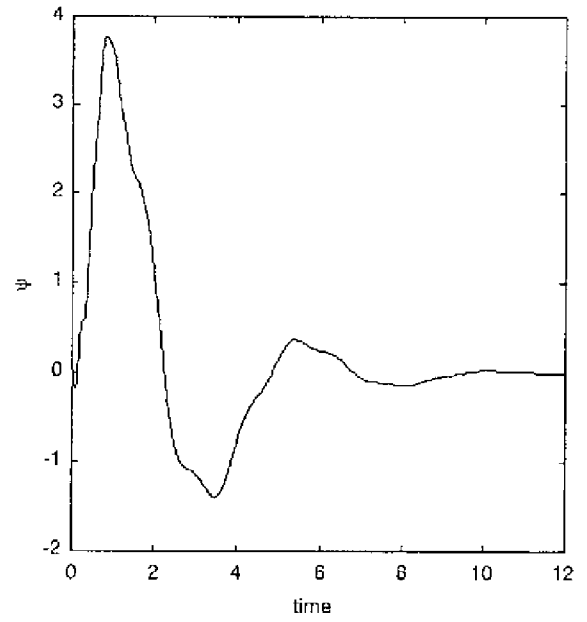


Fig. 4 Shape of the beam



(a) Deflection of the beam

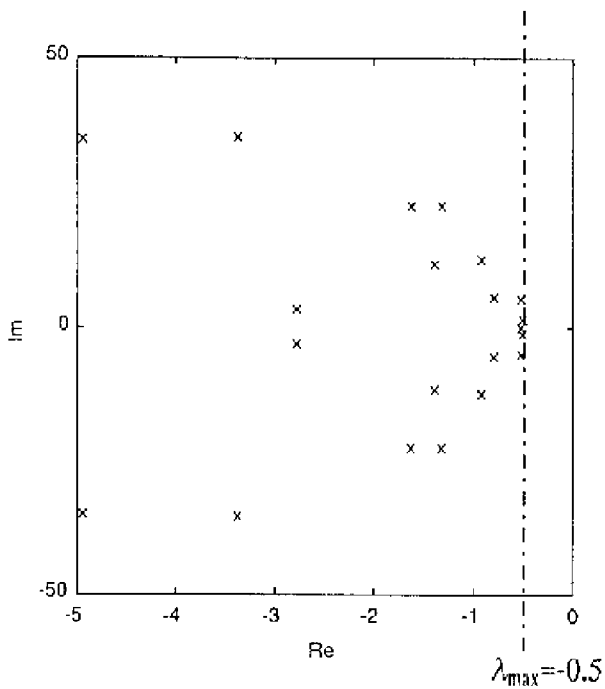
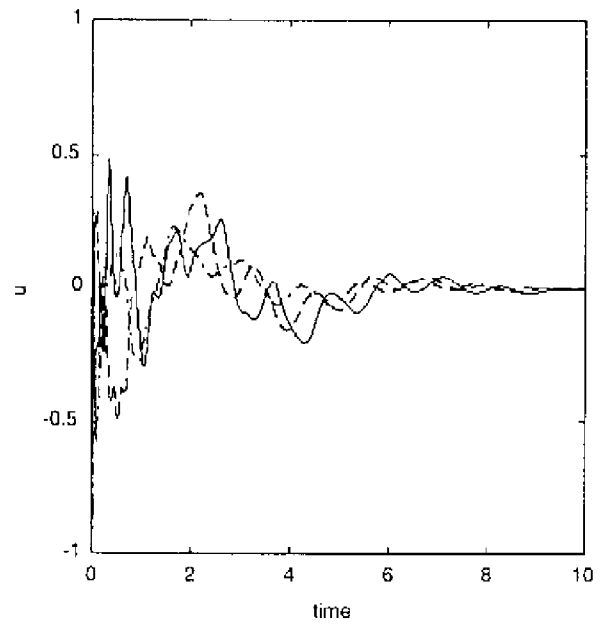


Fig. 5 Poles of the closed-loop system



(b) control effort u_i ($i=1, 2, 3$)

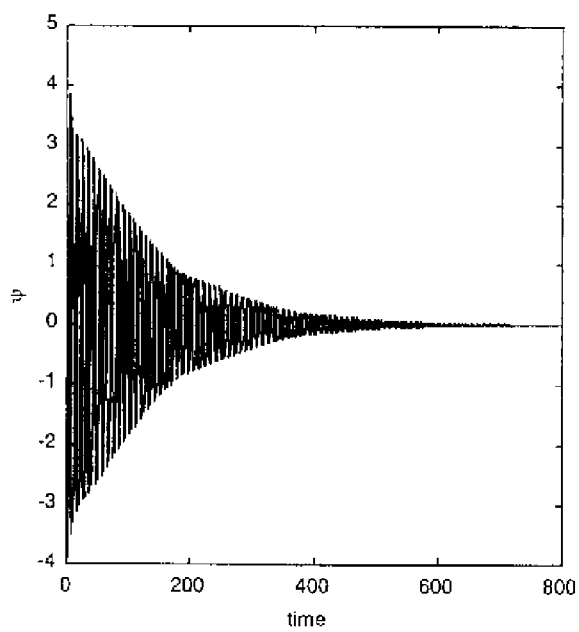


Fig. 6 Impulse response of the open-loop system

Fig. 7 Impulse response of the closed-loop system