

# 連続時間によるニューラルネットワークを使った 制御形のアルゴリズム

## The Control Algorithm using Neural Network on Continuous Time

○美尾 竜太郎, 大久保 重範

○Ryotaro Mio, Shigenori Okubo

山形大学

Yamagata University

キーワード： ニューラルネットワーク制御 (Neural Network control), 連続時間 (continuous time),  
行列計算 (matrix calculation)

連絡先： 〒992 山形県米沢市城南 4-3-16

山形大学大学院 工学研究科 博士前期課程 機械システム工学研究科 大久保研究室 美尾 竜太郎

Tel.: (0238)26-3246, Fax.: (0238)24-6445, E-mail: ryomio@mip3470.yz.yamagata-u.ac.jp

### 1. はじめに

構造が未知である制御対象に対し、バックプロパゲーション法を用いてニューラルネットワーク(以後NNとする)をオンラインで適応的に学習させることを考える。今回は評価関数をモデル追従方式のものではなく、レギュレータ方式のものを使うことにより、零への収束を目的としたものを使う。また、バックプロパゲーション法による学習においても各要素を行列化して扱うことにより、学習過程を簡略化したものを扱う。

### 2. 一般的な外乱を考慮した連続時間非線形システムの安定化制御

Fig.1のような非線形に対してFig.2のような3

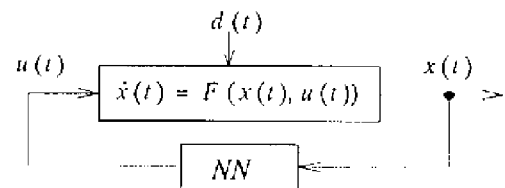


Fig. 1 Nonlinear Control system

層NNを使い、系を安定にする制御系を設計する。

$$\dot{x} = F(x(t), u(t)) + d(t) \quad (1)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ は系の状態、 $u(t) \in R^m$ は制御入力、 $d(t) \in R^n$ は有界で未知の外乱とする。

$t \rightarrow \infty$ の時、 $x(t) \rightarrow 0$ となるので、式(1)は次のようになる。

$$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} F(x(\tau), u(\tau))d\tau + \int_t^{t+h} d(\tau)d\tau \quad (2)$$

平均値の定理より ( $0 < \theta < 1$ ),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+h) &= \mathbf{x}(t) + hF(\mathbf{x}(t+\theta h), \mathbf{u}(t+\theta h)) \\ &\quad + h\mathbf{d}(t+\theta h) \end{aligned} \quad (3)$$

## 2.1 NNの構成

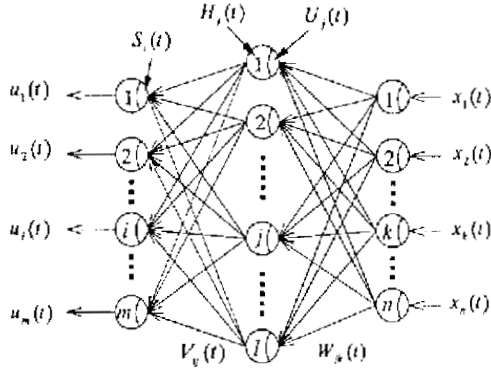


Fig. 2 Neural network

NNの要素の行列、ベクトル表示における方程式は次のようになる。

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{x}(t) + \theta(t) \quad (4)$$

$$\mathbf{H}(t) = \text{diag}(f)\mathbf{U}(t) \quad (5)$$

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{V}(t)\mathbf{H}(t) + \gamma(t) \quad (6)$$

$$\mathbf{u}(t) = \text{diag}(f)\mathbf{S}(t) \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{U}(t) \in R^{l \times 1}$ ,  $\mathbf{W}(t) \in R^{l \times n}$ ,  $\theta(t) \in R^{l \times 1}$ ,  $\mathbf{H}(t) \in R^{l \times 1}$ ,  $\mathbf{V}(t) \in R^{m \times l}$ ,  $\mathbf{S}(t) \in R^{m \times 1}$ ,  $\gamma(t) \in R^{m \times 1}$  である。なお式中の  $\text{diag}(\cdot)$  は対角要素以外は0の  $p \times p$  の対角行列である ( $p = l, m, n$ )。  $f(\cdot)$  はニューロンの入出力特性であり、式(8)で与えられるものとする。また、 $f'(\cdot)$  は式(9)のようになる。

$$f(x) = L \tanh\left\{\frac{x}{u_0}\right\} \quad (8)$$

$$f'(x) = \frac{1}{u_0 L} (L^2 - f(x)^2) \quad (9)$$

評価関数を式(10)のようにおき、 $E(t)$  を最小にする制御則を求める。

$$E(t+h) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t+h) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t+h) \quad (10)$$

ただし  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$  とする。

## 2.2 NNの学習

NNの学習はバックプロパゲーション法によって行う。しかし、本稿ではNN内の各成分は行列表記になっていることに注意しなければならない。例として、 $\frac{\partial E(t+h)}{\partial \mathbf{W}(t)}$  を行列の微分の公式に当てはめると、式(11)のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(t+h)}{\partial \mathbf{W}(t)} &= \frac{\partial \mathbf{U}^T(t)}{\partial \mathbf{W}(t)} \frac{\partial \mathbf{H}^T(t)}{\partial \mathbf{U}(t)} \frac{\partial \mathbf{S}^T(t)}{\partial \mathbf{H}(t)} \\ &\quad \times \frac{\partial \mathbf{u}^T(t)}{\partial \mathbf{S}(t)} \frac{\partial \mathbf{u}^T(t+\theta h)}{\partial \mathbf{u}(t)} \\ &\quad \times \frac{\partial \mathbf{x}^T(t+h)}{\partial \mathbf{u}(t+\theta h)} \frac{\partial E(t+h)}{\partial \mathbf{x}(t+h)} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで各成分の要素は以下のようになる。

$$\frac{\partial E(t+h)}{\partial \mathbf{x}(t+h)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}(t+h) \quad [n \times 1] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}^T(t+h)}{\partial \mathbf{u}(t+\theta h)} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}(t+\theta h)} \{ \mathbf{x}(t) \\ &\quad + hF(\mathbf{x}(t+\theta h), \mathbf{u}(t+\theta h)) \\ &\quad + h\mathbf{d}(t+\theta h) \} \quad [m \times n] \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^T(t+\theta h)}{\partial \mathbf{u}(t)} = \frac{\partial \mathbf{u}(t+\theta h)}{\partial \mathbf{u}(t)} \quad [m \times m] \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^T(t)}{\partial \mathbf{S}(t)} &= \frac{\text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{S}(t))]}{u_0 L} \\ &\quad [m \times m] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{S}^T(t)}{\partial \mathbf{V}(t)} &= \left[ \frac{\partial S_1(t)}{\partial V(t)}, \dots, \frac{\partial S_m(t)}{\partial V(t)} \right] \\ &\quad [(m \times l) \times m] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}^T(t)}{\partial \mathbf{H}(t)} = \mathbf{V}^T(t) \quad [l \times m] \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}^T(t)}{\partial \mathbf{U}(t)} &= \frac{\text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{U}(t))]}{u_0 L} \\ &\quad [l \times l] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}^T(t)}{\partial \mathbf{W}(t)} &= \left[ \frac{\partial U_1(t)}{\partial W(t)}, \dots, \frac{\partial U_l(t)}{\partial W(t)} \right] \\ &\quad [(l \times n) \times l] \end{aligned} \quad (19)$$

ここで  $h$  だけ時間が経過した非線形は式(20)のようになり、

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \theta(t)) &= \mathbf{x}(t) \\ &\quad + h[F(\mathbf{x}(t+\theta h), \mathbf{u}(t+\theta h)) + \mathbf{d}(t+\theta h)] \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{F}^T(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \theta(t))}{\partial \mathbf{u}(t + \theta h)} \\ &= h \frac{\partial F^T(\mathbf{x}(t + \theta h), \mathbf{u}(t + \theta h))}{\partial \mathbf{u}(t + \theta h)} \end{aligned} \quad (21)$$

故に学習による更新量 $\Delta \mathbf{W}(t)$ は、

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{W}(t) &= -\alpha \left( \frac{\partial E(t)}{\partial \mathbf{W}(t)} \right) \\ &= \mathbf{W}(t + h) - \mathbf{W}(t) \end{aligned} \quad (22)$$

となり ( $\alpha$ は学習係数)、式(11)~式(21)を式(22)に代入し、整理すると以下のようなになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{W}(t + h) - \mathbf{W}(t)}{h} \\ &= -\alpha \left[ \frac{\partial U_1(t)}{\partial \mathbf{W}(t)}, \sim, \frac{\partial U_l(t)}{\partial \mathbf{W}(t)} \right] \\ & \quad \times \frac{1}{u_0 L} \text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{U}(t))] \cdot \mathbf{V}^T(t) \\ & \quad \times \frac{1}{u_0 L} \text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{S}(t))] \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(t + \theta h)}{\partial \mathbf{u}(t)} \\ & \quad \times \frac{\partial F^T(\mathbf{x}(t + \theta h), \mathbf{u}(t + \theta h))}{\partial \mathbf{u}(t + \theta h)} \\ & \quad \times \{ \mathbf{x}(t) + h[F(\mathbf{x}(t + \theta h), \mathbf{u}(t + \theta h)) \\ & \quad + \mathbf{d}(t + \theta h)] \} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{x}(t + h) \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)の両辺の極限をとると、

$$\left. \begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{W}(t + h) - \mathbf{W}(t)}{h} &= \dot{\mathbf{W}}(t) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F^T(\mathbf{x}(t + \theta h), \mathbf{u}(t + \theta h))}{\partial \mathbf{u}(t + \theta h)} &= \frac{\partial F^T(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial \mathbf{u}(t + \theta h)}{\partial \mathbf{u}(t)} &= \mathbf{I} \quad [m \times m] \\ \lim_{h \rightarrow 0} \{ \mathbf{x}(t) + h[F(\mathbf{x}(t + \theta h), \mathbf{u}(t + \theta h)) \\ & \quad + \mathbf{d}(t + \theta h)] \} = \mathbf{x}(t) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

よって式(24)を式(23)に代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}}(t) &= -\frac{\alpha}{u_0^2 L^2} \left[ \frac{\partial U_1(t)}{\partial \mathbf{W}(t)}, \sim, \frac{\partial U_l(t)}{\partial \mathbf{W}(t)} \right] \\ & \quad \times \text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{U}(t))] \cdot \mathbf{V}^T(t) \\ & \quad \times \text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{S}(t))] \\ & \quad \times \frac{\partial F^T(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (25)$$

同様にして、 $\dot{\mathbf{V}}(t)$ 、 $\dot{\theta}(t)$ 、 $\dot{\gamma}(t)$ を求める。 $(\alpha, \beta$ は学習係数)

$$\frac{\partial E(t)}{\partial \mathbf{V}(t)} = \frac{\partial \mathbf{S}^T(t)}{\partial \mathbf{V}(t)} \frac{\partial \mathbf{u}^T(t)}{\partial \mathbf{S}(t)} \frac{\partial \mathbf{u}^T(t + \theta h)}{\partial \mathbf{u}(t)}$$

$[m \times l] \quad [m \times ml] \quad [m \times m] \quad [m \times m]$

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = -\frac{\alpha}{u_0 L} \left[ \frac{\partial S_1(t)}{\partial \mathbf{V}(t)}, \sim, \frac{\partial S_m(t)}{\partial \mathbf{V}(t)} \right] \times \text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{S}(t))] \times \frac{\partial F^T(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \quad (26)$$

$$\frac{\partial E(t)}{\partial \theta(t)} = \frac{\partial \mathbf{U}^T(t)}{\partial \theta(t)} \frac{\partial \mathbf{H}^T(t)}{\partial \mathbf{U}(t)} \frac{\partial \mathbf{S}^T(t)}{\partial \mathbf{H}(t)} \times \frac{\partial \mathbf{u}^T(t)}{\partial \mathbf{u}(t)} \frac{\partial \mathbf{u}^T(t + \theta h)}{\partial \mathbf{u}(t)} \times \frac{\partial \mathbf{S}^T(t)}{\partial \mathbf{S}(t)} \frac{\partial \mathbf{u}^T(t + \theta h)}{\partial \mathbf{u}(t)} \times \frac{\partial \mathbf{x}^T(t + h)}{\partial \mathbf{u}(t + \theta h)} \frac{\partial E(t + h)}{\partial \mathbf{x}(t + h)} \quad (27)$$

$[l \times 1] \quad [l \times l] \quad [l \times l] \quad [l \times m] \quad [m \times m] \quad [m \times m] \quad [m \times n] \quad [n \times 1]$

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\beta}{u_0^2 L^2} \left[ \frac{\partial U_1(t)}{\partial \theta(t)}, \sim, \frac{\partial U_l(t)}{\partial \theta(t)} \right] \times \text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{U}(t))] \cdot \mathbf{V}^T(t) \times \text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{S}(t))] \times \frac{\partial F^T(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \quad (28)$$

$$\frac{\partial E(t)}{\partial \gamma(t)} = \frac{\partial \mathbf{S}^T(t)}{\partial \gamma(t)} \frac{\partial \mathbf{u}^T(t)}{\partial \mathbf{S}(t)} \frac{\partial \mathbf{u}^T(t + \theta h)}{\partial \mathbf{u}(t)} \times \frac{\partial \mathbf{x}^T(t + h)}{\partial \mathbf{u}(t + \theta h)} \frac{\partial E(t + h)}{\partial \mathbf{x}(t + h)} \times \frac{\partial S_1(t)}{\partial \gamma(t)}, \sim, \frac{\partial S_m(t)}{\partial \gamma(t)} \times \text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{S}(t))] \times \frac{\partial F^T(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \quad (29)$$

$[m \times 1] \quad [m \times m] \quad [m \times m] \quad [m \times m] \quad [m \times n] \quad [n \times 1] \quad [m \times m] \quad [m \times m]$

$$\dot{\gamma}(t) = -\frac{\beta}{u_0 L} \left[ \frac{\partial S_1(t)}{\partial \gamma(t)}, \sim, \frac{\partial S_m(t)}{\partial \gamma(t)} \right] \times \text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{S}(t))] \times \frac{\partial F^T(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \quad (30)$$

$$\dot{\gamma}(t) = -\frac{\beta}{u_0 L} \left[ \frac{\partial S_1(t)}{\partial \gamma(t)}, \sim, \frac{\partial S_m(t)}{\partial \gamma(t)} \right] \times \text{diag}[L^2 - f^2(\mathbf{S}(t))] \times \frac{\partial F^T(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{x}(t) \quad (31)$$

以上により、NNの学習を行う。

### 3. 安定性の解析

このシステムの原点近傍の安定性を考える。

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{d}(t)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \quad (32)$$

$f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ を原点近傍でテーラー展開すると、

$$f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) + \left[ \frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right] \times (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)) + \dots \quad (33)$$

式(33)より、高次の項を切り捨て、式(32)に代入すると、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) + \left[ \frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right] \\ &\quad \times (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)) + \mathbf{d}(t) \\ &= f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t)) + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)) \\ &\quad + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \\ &\quad \times (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)) + \mathbf{d}(t) \\ &= \left[ \frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} \right] \mathbf{x}(t) + \mathbf{d}(t) \end{aligned} \quad (34)$$

$$\mathbf{G} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{x}^T(t)} + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{u}^T(t)} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0(t)}{\partial \mathbf{x}^T(t)} \quad (35)$$

とすると、特性方程式  $|p\mathbf{I} - \mathbf{G}|$  を求め、その極が負であれば、 $\mathbf{G}$  は安定であると言える。

式(32)を線形近似し、 $\mathbf{G}$  を求めると次のようになる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (36)$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}(\mathbf{x}(t)) \quad (37)$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{x}^T(t)} = \mathbf{A} - \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x}_0(t))}{\partial \mathbf{x}^T(t)} \quad (38)$$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} = \mathbf{B} \quad (39)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0(t)}{\partial \mathbf{x}^T(t)} = -\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x}_0(t))}{\partial \mathbf{x}^T(t)} \quad (40)$$

よって、式(35)に代入し、 $\mathbf{G}$  を求めると、

$$\mathbf{G} = \mathbf{A} - 2\mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{x}_0(t))}{\partial \mathbf{x}^T(t)} \quad (41)$$

例として、機械系のプラントで計算してみると、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{D}{M} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial \mathbf{x}^T(t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{(K+2\frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_1(t)})}{M} & -\frac{(D+2\frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_2(t)})}{M} \end{bmatrix} \quad (43)$$

よって、特性方程式  $|p\mathbf{I} - \mathbf{G}|$  は

$$\begin{aligned} |p\mathbf{I} - \mathbf{G}| &= \begin{vmatrix} p & -1 \\ \frac{(K+2\frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_1(t)})}{M} & p + \frac{(D+2\frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_2(t)})}{M} \end{vmatrix} \\ &= p^2 + \frac{1}{M} (D + 2\frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_2(t)}) p \\ &\quad + \frac{1}{M} (K + 2\frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_1(t)}) \end{aligned} \quad (44)$$

よって、特性多項式の極は  $|p\mathbf{I} - \mathbf{G}| = 0$  より、

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{M} (D + 2\frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_2(t)}) \\ c &= \frac{1}{M} (K + 2\frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_1(t)}) \end{aligned} \quad (45)$$

この極が常に負であるための条件は、 $b \geq 0, c \geq 0$  である。式(45)中の  $K, D, M$  は定数なので常に正である。つまり、 $\frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_1(t)} \geq 0, \frac{\partial K(\mathbf{x}_0(t))}{\partial x_2(t)} \geq 0$  ならば、この系は安定となる。

#### 4. 評価関数の拡張

この制御系の応答の改善の一例として、評価関数を二次形式にする方法がある。

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) \quad (47)$$

となっているが、これを次のようにする。

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^{[2]}(t) \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$E(t) = \frac{1}{2} \mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) \quad (49)$$

すると  $\partial E(t)/\partial \mathbf{x}(t)$  は以下のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(t)}{\partial \mathbf{x}(t)} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{z}^T(t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial E(t)}{\partial \mathbf{z}(t)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\mathbf{x}^T(t), \mathbf{x}^{T[2]}(t))}{\mathbf{x}(t)} \cdot \frac{\partial(\mathbf{z}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{z}(t))}{\mathbf{z}(t)} \\ &= \left[ \mathbf{I}, \frac{\partial \mathbf{x}^{T[2]}(t)}{\partial \mathbf{x}} \right] \mathbf{Q} \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (50)$$

これは式(12)と比べ、変数の影響がより大きくなっているのが分かる。よって、こちらを使う方が応答が改善されると考えられる。

## 5. シミュレーション

### 5.1 機械系の制御

この系の運動方程式は次のようになる。

$$M\ddot{x} + (D_1 + D_2 x^2)\dot{x} + (K_1 + K_2 x^2)x = u \quad (51)$$

$M$  [kg] 台車系の等価質量

$D_n$  [Ns/m] 粘性減衰係数

$K_n$  [N/m] ばね係数

今回のシミュレーションではそれぞれ  $M = 1.0$ 、 $D_1 = 0.1$ 、 $D_2 = 0.01$ 、 $K_1 = 2.0$ 、 $K_2 = 1.0$  とする。

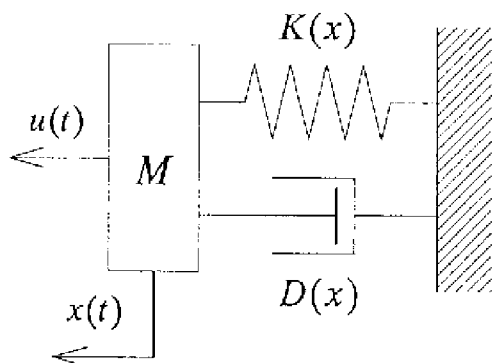


Fig. 3 Mechanical system

また、制御系を用いる際に未知である部分は以下のようにになる。

$$\frac{\partial F^T(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix} \quad (52)$$

これ以後にシミュレーション結果を挙げる。初期値はいずれも  $x = 0.0$ 、 $v = 0.5$  である。ちなみにそれぞれの条件は以下の通りである。

- Fig.4 制御無し
- Fig.5 NN制御
- Fig.6 評価関数を拡張したNN制御
- Fig.7 オンライン学習によるNN制御
- Fig.8 評価関数を拡張した  
オンライン学習によるNN制御

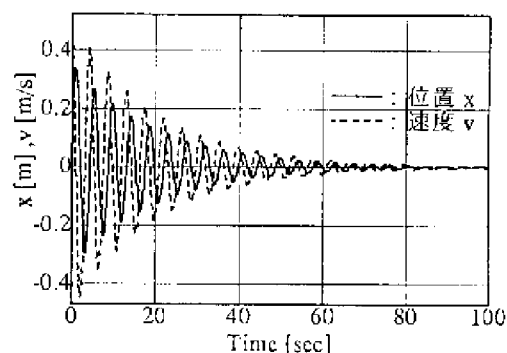


Fig. 4 Response of  $x$  and  $v$

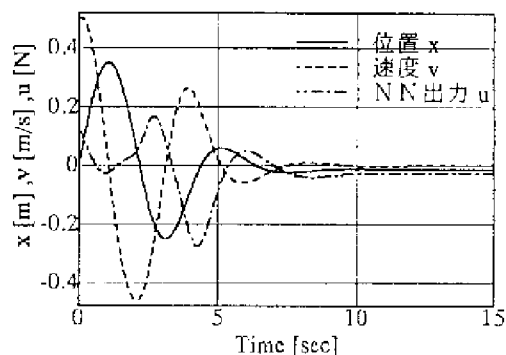


Fig. 5 Response of  $x$  and  $v$  + NN control

## 5.2 倒立振り子

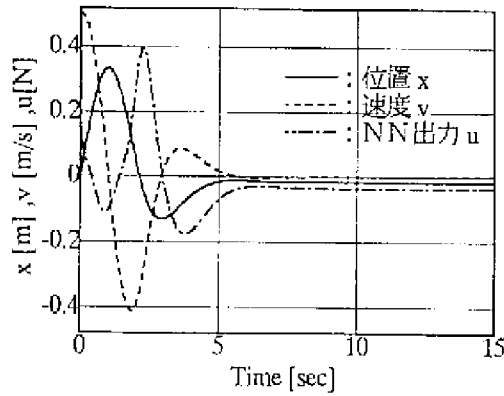


Fig. 6 Response of  $x$  and  $v$  + NN control

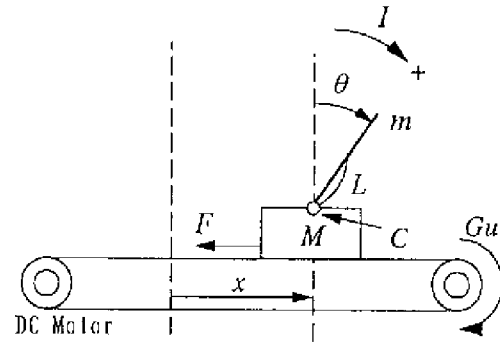


Fig. 9 Inverted pendulum

倒立振り子の運動方程式は、ラグランジュの方程式より次のようになる。

$$(M + m)\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos\theta + F\dot{x} - mL\dot{\theta}^2\sin\theta = Gu \quad (53)$$

$$mL\ddot{x}\cos\theta + (I + mL^2)\ddot{\theta} + C\dot{\theta} - mgL\sin\theta = 0 \quad (54)$$

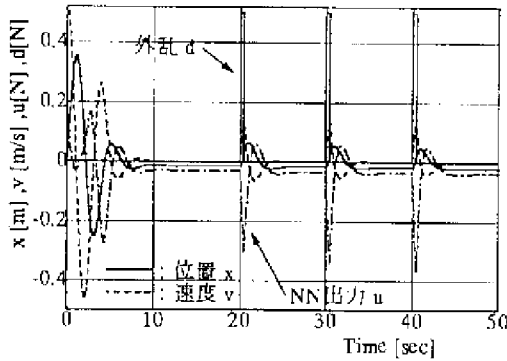


Fig. 7 Response of  $x$  and  $v$  + NN control after learning

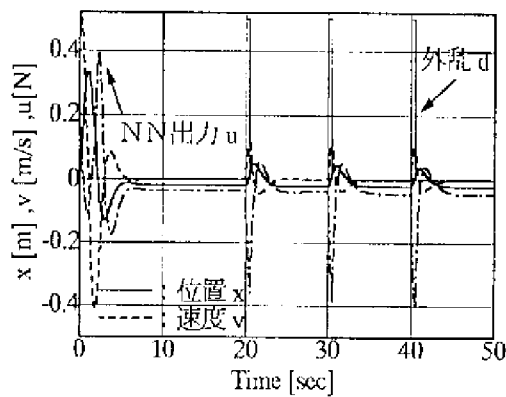


Fig. 8 Response of  $x$  and  $v$  + NN control after learning

また、各記号は以下で示すとおりである。

- $M$  [kg] 台車系の等価質量
- $G$  [N/V] 電圧/トルク変換係数
- $u$  [V] モータへの入力電圧
- $F$  [-] 台車系の等価摩擦係数
- $C$  [-] 軸の粘性摩擦係数
- $m$  [kg] 振り子の質量
- $I$  [Nm] 振り子の慣性モーメント
- $L$  [m] 軸から振り子の重心までの距離
- $g$  [m/s<sup>2</sup>] 重力加速度

ここでこの制御系を用いるために未知であった要素を求める。

$$\frac{\partial F^T(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{(I + ml^2)G}{d} \\ -\frac{ml \cos \theta G}{d} \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$d = (M + m)(I + ml^2) - (ml \cos \theta)^2$$

シミュレーション結果は以下のようになった。

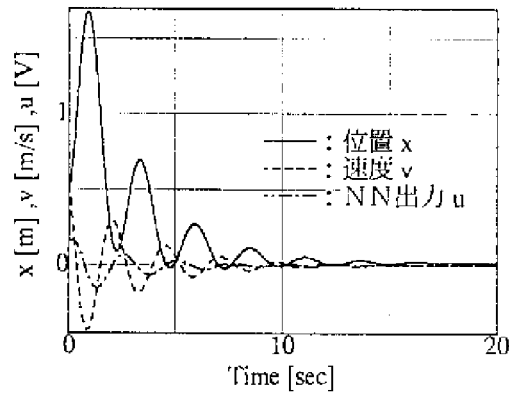


Fig. 10 Response of  $x$  and  $\theta$  at  $\theta = 30[\text{deg}]$

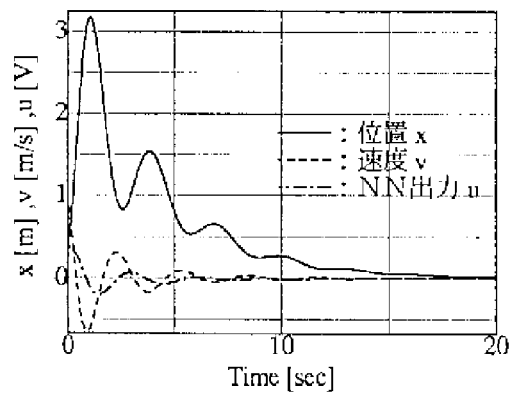


Fig. 11 Response of  $x$  and  $\theta$  at  $\theta = 50[\text{deg}]$

## 6. おわりに

シミュレーション結果より今回の制御方法が有効なことが分かった。特に機械系の結果から全く学習していないNNでもある程度の効果がみられるし、同じ外乱を5回与えて学習させたものは応答が改善され、また評価関数を拡張したものはより収束が早くなっていてこの制御が有効である事が分かる。しかし、いくつかの結果からも分かるように位置がある一定の数値から変化しなくなり、常に収束しない場合があった。これはNNの学習の段階で $\dot{x}$ や $\dot{\theta}$ が零になると、 $\dot{W}$ や $\dot{V}$ も零となりNNの出力 $u$ が更新されなくなり、一定の出力が保

たれたまま系全体が静止してしまうためだと思われる。この問題はプラントによる影響もあり、NNの学習係数や定数 $L$ 、 $Q$ の調整である程度は改善されるが、基本的な解決にはなっていない。今後はこの制御がより有効的に使えるようにしていきたい。

## 参考文献

- 1) 斉藤 秀夫: 工業基礎振動学, 養賢堂(1989)
- 2) 金井 喜美雄: 制御システム設計, 槇書店(1983)
- 3) 大松 繁: ニューラルネットワークによる適応制御, 電気学会雑誌, Vol.112, No.7, 503/506(1992)
- 4) 馬目 聡, 荒 寛, 鈴木 穎二: ニューラルネットワークによる倒立振子の制御, 第33回 SICE 学術講演会予稿集, 335/336(1994)