

GAによる有理パラメータ曲線の最適化

Reparametrization of rational curves using Genetic Algorithm

○趙 炳彦, 大久保 重範

Bingyan Zhao and Shigenori Okubo

山形大学工学部

Faculty of Engineering, Yamagata University

キーワード: 有理曲線(rational curve), 再パラメータ化(reparametrization), 最適化(optimal design), 遺伝アルゴリズム(genetic algorithm)

連絡先: 992-8510 米沢市城南4-3-16 山形大学工学部 機械システム工学科 大久保研究室, Tel.: 0238-26-3245, Fax.: 0238-26-3205 Email: zhaoby@mipultra.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

パラメータ曲線、曲面はCAD/CAMにおける幅広く使われている。ほとんどのアルゴリズムは3Dユークリッド空間でなく、パラメータ空間で行う。しかし、均一のパラメータ点列に対してその3Dユークリッド空間の点列はほとんど不均一になっている。従って、曲面を設計するとき、これら曲線のため作られる曲面も不均一なパラメータを持つ。この点は図1で明らかに示す。

文献2は非有理Bezier曲線に対する研究を行ったが、有理Bezier曲線について研究は進んでいかなかった。本報では、遺伝アルゴリズムを用いて有理Bezier曲線に対するパラメータ最適化を研究する。

2. 弧長パラメータ曲線とノルム曲線

2.1 弧長パラメータ曲線

3D空間パラメータ曲線は

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1)$$

三つの関数で与えられる。ベクトルの記号を使って(1)式が

$$p = p(t) \quad (2)$$

(2)式を微分したものを

$$\dot{p}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \quad (3)$$

と書くことにする。微係数を x' とか dx/dt と書く代わりに \dot{x} としたのは物理からの輸入である。 $p(t)$ が t 時の点の位置を表すとすると、 $\dot{p}(t)$ は動点の速度ベクトルになる。ベクトル $\dot{p}(t)$ の長さ $|\dot{p}(t)|$ は

$$|\dot{p}(t)| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} \quad (4)$$

で与えられ、パラメータ t に関する運動の速さを表す。

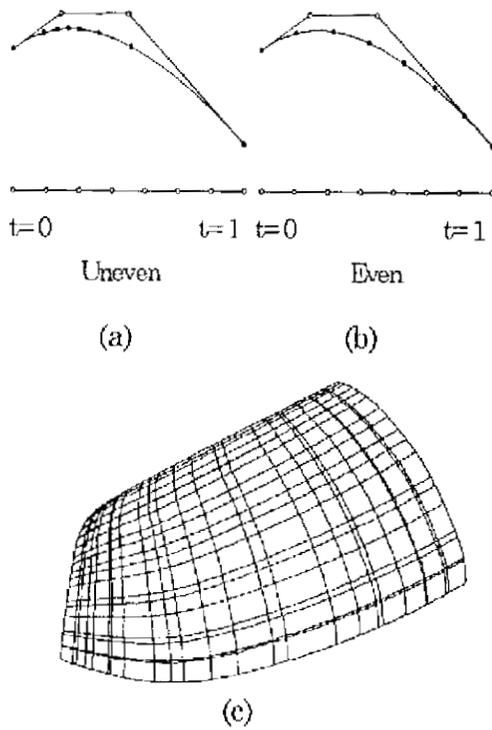


Fig. 1 Uneven and even distributed parameter.

同様に $\dot{p}(t)$ を微分して得られる

$$\ddot{p}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \quad (5)$$

は加速度ベクトルを表す。

曲線 $p(t)$ の長さを計算すると

$$s = \int_0^t |\dot{p}(t)| dt \quad (6)$$

となる。

(6)式から、微積分により

$$\dot{s}(t) = |\dot{p}(t)| \quad (7)$$

が出る。すべての t に対して $\dot{p}(t) \neq 0$ ならば $|\dot{p}(t)| > 0$ であるから、 s は t の単調増加関数ということになり、 t を s の関数として書くことが可能になる。従って $t=t(s)$ を (1) 式あるいは (2) 式に代入することにより、曲線がパラメータ s を使って表示することができる。

簡単のために (1) 式及び (2) 式がすでに

$$p = p(s) = (x(s), y(s), z(s)) \quad (8)$$

とパラメータ s で書かれているとする。

習慣上 s で微分したときは

$$p' = p'(s) = (x'(s), y'(s), z'(s)) \quad (9)$$

のように、普通の微分記号を使う。

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds};$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds}; \quad \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} \frac{dt}{ds}. \quad (10)$$

(10)式から(7)式を使うことにより

$$|p'(s)| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = 1 \quad (11)$$

という当然な結果が出てくる。物理的に言えば、運動(8)の速さは一定でつねに1であるということである。

2.2 ノルム曲線

(6)式によって、パラメータ曲線 $p(t)$, $t \in [0, 1]$ の弧長は(12)式

$$S = \int_0^1 |\dot{p}(t)| dt \quad (12)$$

となる。(12)式のような曲線 $r(t)$ がノルム曲線と呼ばれる。

$$r(t) = \frac{p(t)}{S} \quad (13)$$

(12)式から次(14)式が成り立つ。

$$\int_0^1 |\dot{r}(t)| dt = \int_0^1 \left| \frac{\dot{p}(t)}{S} \right| dt = \frac{1}{S} \int_0^1 |\dot{p}(t)| dt = 1 \quad (14)$$

つまり、任意ノルム曲線にとって、平均パラメータ速度が常に1になる。

3. 均一パラメータ曲線の評価関数

上述から分かるように、弧長パラメータ曲線 $p(s)$ の速さ $|p'(s)|$ は一定でつねに1であるから、3D空間の点列は均一になるに決まっている。曲線形状と次数 n とパラメータの範囲 $t \in [0, 1]$ が変わらないに対して、弧長パラメータ曲線に一番近似している普通のパラメータのノルム曲線

$r(t)$ が式(15) のような評価関数によって

$$J = \int_0^1 (|r'(t)| - 1)^2 dt \quad (15)$$

求められる。

(15)式を展開して(16)式

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 |r'(t)|^2 dt + 2 \int_0^1 |r'(t)| dt + 1 \\ &= \int_0^1 |r'(t)|^2 dt - 1, \end{aligned} \quad (16)$$

となる。したがって、評価関数は次のように書くことが十分だといえる。

$$I = \int_0^1 |r'(t)|^2 dt \quad (17)$$

Cauchy-Schwarz 不等式によって、 $J \geq I$ は明らかかなことである。

$$\int_0^1 f^2(t) dt \int_0^1 g^2(t) dt \geq \left[\int_0^1 f(t)g(t) dt \right]^2$$

ここで $f(t) = |r'(t)|$ と $g(t) = 1$ である。

4. 有理 Bezier 曲線のパラメータの変換

これまでよく使われている有理曲線は有理 Bezier 曲線である。

n 次有理 Bezier 曲線は

$$p(t) = \frac{\sum_{k=0}^n p_k \cdot w_k \cdot b_{n,k}(t)}{\sum_{k=0}^n w_k \cdot b_{n,k}(t)} \quad (18)$$

である。ここで

$$b_{n,k}(t) = \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} (1-t)^{n-k} t^k \quad (19)$$

p_0, p_1, \dots, p_n 制御頂点で、 w_0, w_1, \dots, w_n はその制御頂点の荷重である。

Mobius 写像式(20)式によって、パラメータ $u \in [0, 1]$ はパラメータ $t \in [0, 1]$ に写像される。

$$t = \frac{(1-\alpha)u}{\alpha(1-u) + (1-\alpha)u} \quad (20)$$

ここで $0 < \alpha < 1$ 。

(20) 式を式 (18) に代入すると

$$q_\alpha(u) = \frac{\sum_{k=0}^n (1-\alpha)^k \alpha^{n-k} \cdot p_k \cdot w_k \cdot b_{n,k}(u)}{\sum_{k=0}^n (1-\alpha)^k \alpha^{n-k} \cdot w_k \cdot b_{n,k}(u)} \quad (21)$$

になる。

$u = \frac{\alpha t}{(1-\alpha)(1-t) + \alpha t}$ を (21) 式に代入する

と (18) 式になる。したがって (18) 式と (21) 式が同じ曲線を表す。

(18) 式と (21) 式が同じ曲線であることから、中に制御頂点は同じ、ただし、制御頂点の荷重は

$$\alpha^n w_0 (1-\alpha)^n w_1 \dots (1-\alpha)^n w_n$$

になる。これら荷重に対する曲線がすべて同じ曲線である。その中に弧長パラメータに一番近似する曲線に対する α が(22)式によって求める。

$$I = \int_0^1 |q'_\alpha(u)|^2 \cdot du = \int_0^1 q'_\alpha(u) \cdot q'_\alpha(u) du \quad (22)$$

ここで $q_\alpha(u)$ はノルム曲線である。

5. GA による再パラメータ化

遺伝アルゴリズム (GA) は変数をコード化した遺伝子とし、遺伝子集合に対し選択 (Selection), 交叉 (Crossover), 突然変異 (Mutation) などの遺伝子操作を繰り返し、適応度関数が最大になるように探索する。(22)式は相当な難しい有理多項式で、しかも微分の計算が非常に困難であるから、最適な α の探索に遺伝アルゴリズム(GA)を使う。

簡単にするために

$$R_\alpha(u) = \sum_{k=0}^n (1-\alpha)^k \alpha^{n-k} \cdot p_k \cdot w_k \cdot b_{n,k}(u) \quad (24)$$

と

$$W_\alpha(u) = \sum_{k=0}^n (1-\alpha)^k \alpha^{n-k} \cdot w_k \cdot b_{n,k}(u) \quad (25)$$

を定義する。

したがって(21)式が

$$q_\alpha(u) = \frac{R_\alpha(u)}{W_\alpha(u)} \quad (26)$$

となる。

$$\begin{aligned} q'_\alpha(u) &= \frac{R'_\alpha(u) - q_\alpha(u) \cdot R'_\alpha(u)}{W_\alpha(u)} \\ &= \frac{R'_\alpha(u)W_\alpha(u) - R_\alpha(u) \cdot R'_\alpha(u)}{W_\alpha^2(u)} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} b_{n,k}(u) &= \frac{d}{du} \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} \\ &= n \{ b_{n-1,k-1}(u) - b_{n-1,k}(u) \} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} R'_\alpha(u) &= \frac{dR_\alpha(u)}{du} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1} ((1-\alpha)p_{k+1}w_{k+1} - \alpha \cdot p_k w_k) b_{n-1,k}(u) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} W'_\alpha(u) &= \frac{dW_\alpha(u)}{du} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1} ((1-\alpha)w_{k+1} - \alpha \cdot w_k) b_{n-1,k}(u) \end{aligned} \quad (30)$$

評価関数(22)式の積分は台形方法によって

$$\int_0^1 g(u) du \approx h \{ 0.5(g(0) + g(1)) + \sum_{k=1}^{N-1} g(u_k) \} \quad (31)$$

となる。ここで

$$u_k = kh, \quad h = 1/N.$$

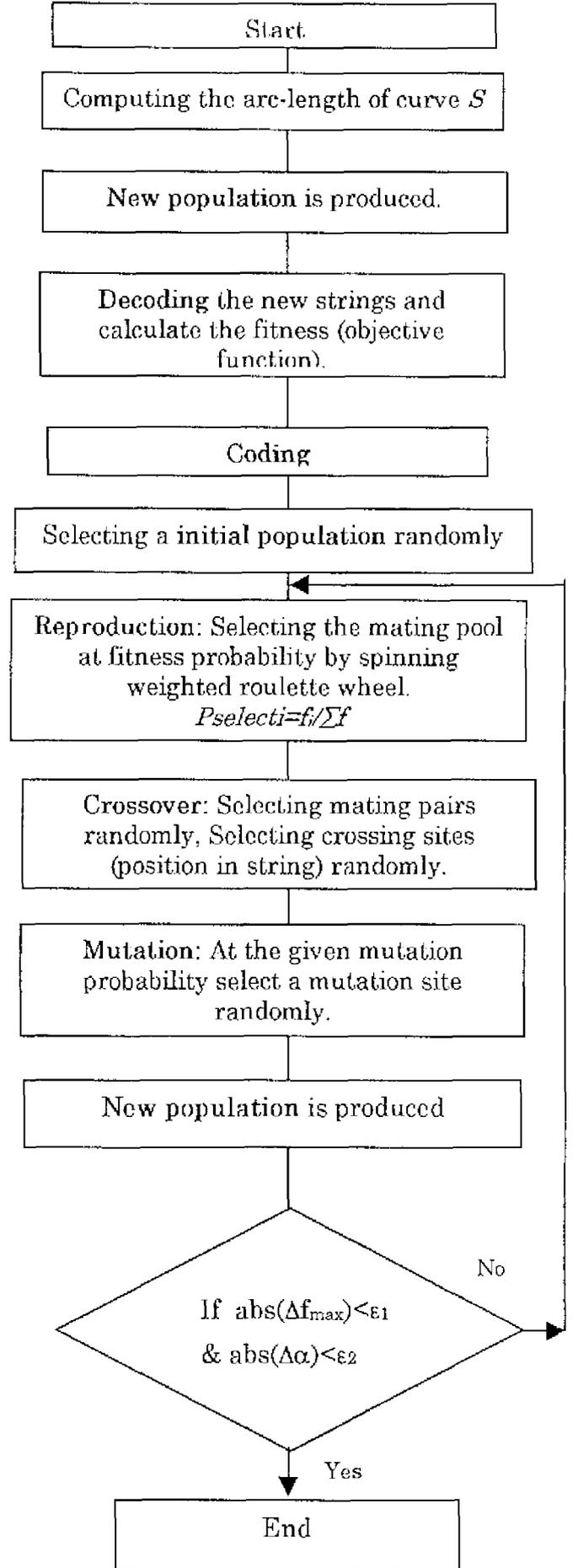


Fig. 2. Flowchart of genetic algorithm.

本論文では簡単なGA (Simple Genetic Algorithm)を使う。変数は α ($0 < \alpha < 1$)である。遺伝アルゴリズムのフローチャートを Fig. 2 に示す。

7. 応用

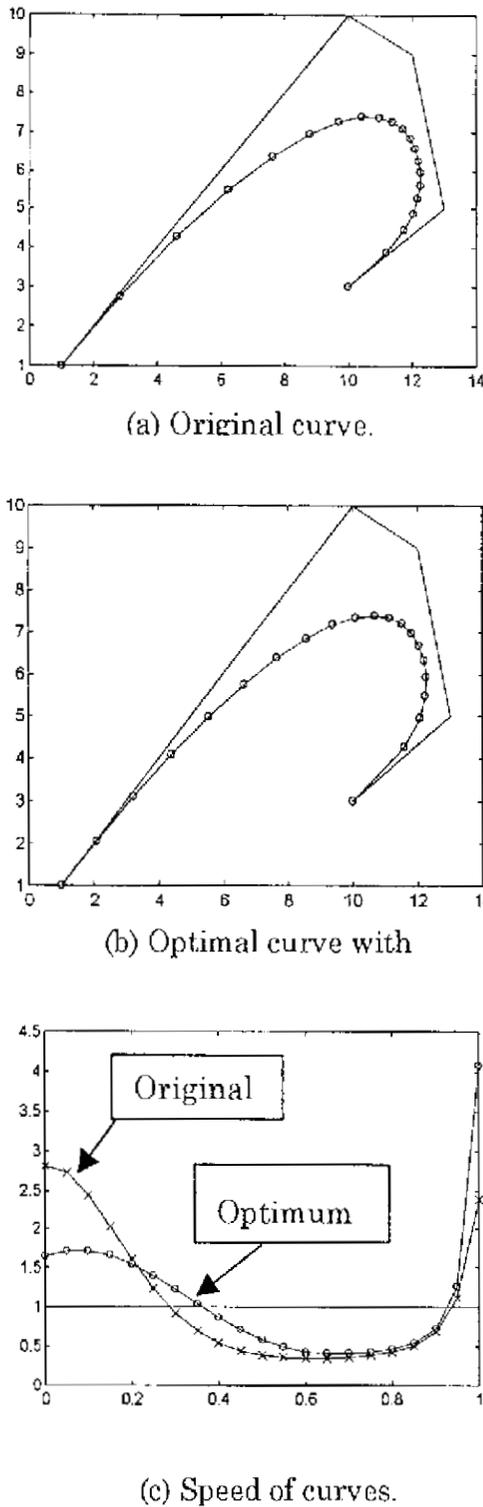


Fig. 3 Example of reparametrization.

図3に示す曲線の制御頂点は $p=[1 \ 1 ; 10 \ 10; 12 \ 9; 13 \ 5; 10 \ 3]$ で、制御頂点の荷

重は $w=[1 \ 1 \ 2 \ 3 \ 1]$ である。

図3 (a)は本来の曲線で、(b)は最適化後の曲線である。 α の値は $\alpha_{opt}=0.67$ である。(c)はノルム曲線最適化前後の速度である。図3から見れば、本有理Möbius写像でパラメータを完全に改善することが困難であり、ある程度の改善は可能であることがわかる。

遺伝アルゴリズムを使うとき、次のパラメータが使われる。個体数=30, 交叉を行なう確率=0.6, 突然変異を行なう確率=0.03, 計算終了世代数=100. 図4は $\min(l)$ の行動を示す。

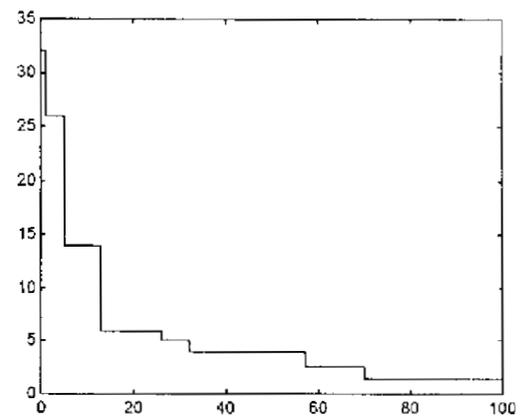


Fig. 4 Behavior of $\min(l)$ in genetic algorithm.

8. おわりに

本論文では遺伝アルゴリズムを用いて、弧長パラメータに一番近い均一のパラメータを持つ有理Bezier曲線を最適化することを検討した。例を通して、この方法の有効性を示す。今後GAを用いて、より適当な有理Möbius写像を探索することを取り込んでいくつもりである。

参考文献

- 1) 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房 (1996)
- 2) R. T. Farouki, Optimal parameterizations, *Computer Aided Geometric Design*, 14, 153/168(1997)