

非標準混合感度問題の解法

A Solution to the Unstandard Mixed Sensitivity Problem

○山根 亜希子*, 渡部慶二*

○Akiko Yamane*, Keiji Watanabe*

*山形大学院 工学研究科

*Yamagata University

キーワード: 混合感度 (mixed sensitivity), ロバスト安定 (robust stability), 感度関数 (sensitivity function), 相補感度関数 (complementary sensitivity function), 極配置 (pole assignment)

連絡先: 〒992-0038 山形県米沢市城南4-3-16 山形大学 工学部 電子情報工学科 渡部研究室
山根亜希子, Tel.: (0238)26-3326, Fax.: (0238)24-2752, E-mail: yamane@ewata.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

今日の産業において、様々な分野で制御技術の重要性がますます増大している。

制御器の設計には、通常、制御対象モデルを使用するため、モデル誤差が生じる。フィードバック制御系の設計において、目標追従特性、外乱除去特性を良くし、モデル誤差の影響を受けにくくするためには、低感度にする必要がある。また、より大きなモデル誤差があっても制御系を安定にするためにはロバスト安定を考える必要がある。しかし、両者にはトレードオフが存在し、この要請を同時に満たすことはできない。そこで、感度関数 $S(s)$ 、相補感度関数 $T(s)$ を定義し、それぞれに適切な重み関数 $W_S(s)$ 、 $W_T(s)$ を導入し、 $\|W_S(s)S(s)\|_\infty < 1$ 、 $\|W_T(s)T(s)\|_\infty < 1$ を同時に満たす制御器を求める問題が検討されてきた。この問題を混合感度問題という。

また、一般に多変数系と呼ばれるシステムのうち、入力の数よりも出力の数のほうが多いときには、非標準混合感度問題となる。この時には、ロバスト安定を出力側で考えなくてはならない。しかし、出力側感度関数の最小値を1よりも小さくすることが出来ない。そこで、制御対象の入力側感度関数を用いることでこれらの問題を解決しようと考えた。

本稿では、多変数系システムにおける非標準混合

感度問題の設計仕様を、入力側感度関数と出力側相補感度関数の周波数特性による図的表現より設計する設計法を提案する。

本設計法では、解の候補として、感度関数の重み関数を接続した拡大系に対するオブザーバを用いた状態フィードバックと、自由パラメータ Q を使って制御系を考える。その際、感度の大幅の設定をオブザーバの極で、ロバスト安定を状態フィードバックの極を用いて設計し、制御器が設計仕様を満たしているかどうかを感度関数及び相補感度関数の最大特異値をプロットすることで、その特性を見ながら効率よく設計を行う。本設計法の応用として倒立振り子に適用し、その有効性を示すものとする。

2. 非標準混合感度問題

制御対象を次式で表す。

$$G_P(s) = \{I + \Delta(s)\}G(s) \quad (1)$$

ただし、 $G(s) \in R^{r \times m}(s)$, ($r \geq m$) 公称数式モデルで、 $G(s)$ は虚軸上に零点を持たず、

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2)$$

$A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{r \times n}$, (A, B) 可制御、 (C, A) 可観測、また、 $G_P(s)$, $G(s)$ の不安定極の数は

等しいとする。さらに、制御対象の状態方程式において、 B 行列を1列ごとに分割する。

$$B = [b_1 \cdots b_m] \quad (3)$$

このとき

$$CA^{j-1}b_i = 0, j = 1, 2, \dots, \nu_i - 2 \quad (4)$$

$$CA^{\nu_i-1}b_i \neq 0 \quad (5)$$

$$\nu = \min \{ \nu_1, \dots, \nu_m \} \quad (6)$$

とすると、(5)式を集めた行列を

$$\Phi = [CA^{\nu_1-1}b_1 \cdots CA^{\nu_m-1}b_m] \quad (7)$$

$$\text{rank} \Phi = m \quad (8)$$

とする。この条件は制御対象のインナ・アウト分解のための条件である。

$\Delta(s)$ はモデル誤差で

$$\bar{\sigma}[\Delta(j\omega)] < |W_T(j\omega)|, \forall \omega \geq 0 \quad (9)$$

とする。ただし、 $1/|W_T(s)|$ は安定で、相対次数は ν を超えないものとする。

ロバスト安定にするには、出力側相補感度関数 $T_o(s)$ が

$$\bar{\sigma}[T_o(j\omega)] < \frac{1}{|W_T(j\omega)|}, \forall \omega \geq 0 \quad (10)$$

を満たすことである。また、制御性能を良くするには感度を小さくすることである。しかし、多変数系で入力の数よりも出力の数のほうが多い場合、出力側感度の最小値を1以下にできず、応答の調整ができなくなる。そこで入力側の感度関数 $S_i(s)$ を使い、重み関数 $W_S(s)$ を導入し

$$\bar{\sigma}[S_i(j\omega)] < \frac{1}{|W_S(j\omega)|}, \forall \omega \geq 0 \quad (11)$$

を満たすことを考える。

3. 非標準混合感度問題の可解条件

感度関数 $S_i(s)$ に対する、相補感度関数を $T_i(s)$ とする。 $W_S(s), W_T(s)$ の0dB 交叉周波数をそれぞれ ω_S, ω_T ($\omega_S < \omega_T$) とする。ロバスト安定は(10)式を満たすために $\bar{\sigma}[T_o(j\omega)]$ を ω_T より低いところから下げることである。低くしすぎると $\bar{\sigma}[T_i(j\omega)]$ も下がり、 $\bar{\sigma}[S_i(j\omega)]$ が大きくなり(11)式を満たせなくなる。低くできる限界は感度の必要条件から決まる。

すなわち、感度仕様の必要条件は(11)式より

$$\frac{1}{|W_S(j\omega)|} + 1 > \bar{\sigma}[T_i(j\omega)], \forall \omega \geq 0 \quad (12)$$

である。(12)式から0から ω_S までの $\bar{\sigma}[T_i(j\omega)] \approx 1$ におく必要があり、ここが限界である。限界近くに設定するには次のようにする。 $T_i(s)$ を

$$T_i(s) = T_1(s)T_2(s)$$

あるいは

$$T_i(s) = T_2(s)T_1(s)$$

と分解する。ただし、 $T_1(s)$ は真にプロパで

$$T_1(j0) = I, \|T_1(s)\|_\infty \leq 1$$

を満たし、 $T_2(s)$ は残りの部分で $\|W_S(s)S_i(s)\|_\infty < 1$ を満たすために $S_i(s) = I - T_i(s)$ が $W_S(s)$ の極付近の零点を持ち、かつ $T_2(j0) = I$ を満たすように決定する。

このような準備のもとで、 $\bar{\sigma}[I - T_1(j\omega)]$ を $\frac{1}{|W_S(j\omega)|}$ の近傍にもっていく。次に $\bar{\sigma}[T_2(j\omega)]$ の0dB 平坦部分を徐々に伸ばし $\bar{\sigma}[I - T_1(j\omega)T_2(j\omega)] < \frac{1}{|W_S(j\omega)|}$ を満たすようにする。このとき、 $T_o(s)$ が(10)式を満たせば解であり、満たせないときは解がない。

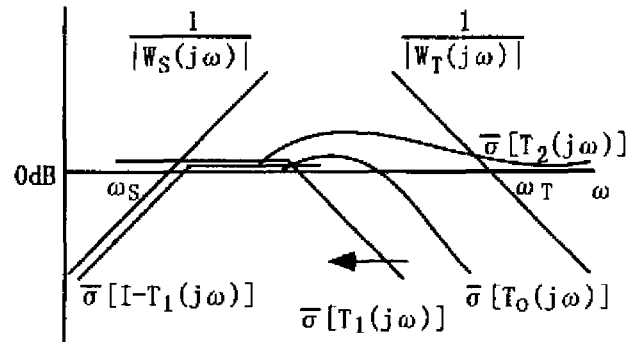


Fig. 1 可解条件

4. 設計

可解条件をふまえた設計法を与える。

4.1 制御系の構成

Fig. 2の制御系を考える。

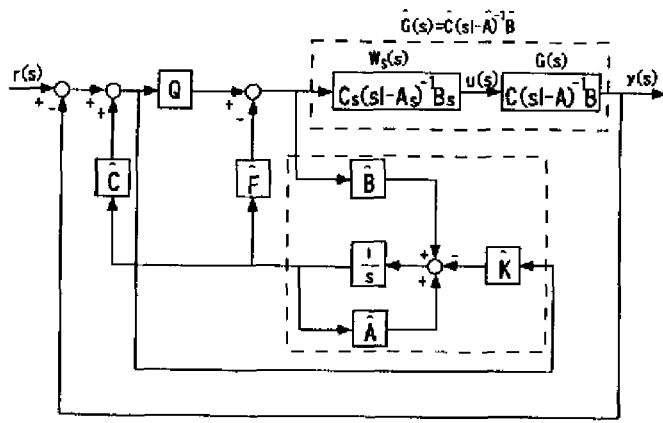


Fig. 2 制御系

ここで $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ は制御対象の公称数式モデル、 $C_S(sI - A_S)^{-1}B_S$ は感度の重み関数で

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= C(sI - A)^{-1}B \cdot C_S(sI - A_S)^{-1}B_S \\ &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}\end{aligned}\quad (13)$$

とする。 $y \in R^r, r \geq m$ で Q は自由パラメータである。

この閉ループ系における出力側相補感度関数 $T_o(s)$ 、入力側感度関数 $S_i(s)$ 、入力側相補感度関数 $T_i(s)$ を算出すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}T_o(s) &= \hat{C}(sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{F})^{-1}\hat{B} \\ &\quad \cdot [Q + (\hat{F} - Q\hat{C})(sI - \hat{A} + \hat{K}\hat{C})^{-1}\hat{K}] \quad (14) \\ S_i(s) &= [I + \hat{F}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}]^{-1} \\ &\quad \cdot [I + (\hat{F} - Q\hat{C})(sI - \hat{A} + \hat{K}\hat{C})^{-1}\hat{B}] \quad (15) \\ T_i(s) &= [I + \hat{F}(sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{F})^{-1}(\hat{K}Q^{-1} - \hat{B})] \\ &\quad \cdot Q\hat{C}(sI - \hat{A} + \hat{K}\hat{C})^{-1}\hat{B} \quad (16)\end{aligned}$$

また、 $T_i(s)$ を $T_i(s) = T_2(s)T_1(s)$ と分解する。

$$\begin{aligned}T_2(s) &= [I + \hat{F}(sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{F})^{-1}(\hat{K}Q^{-1} - \hat{B})] \quad (17) \\ T_1(s) &= Q\hat{C}(sI - \hat{A} + \hat{K}\hat{C})^{-1}\hat{B} \quad (18)\end{aligned}$$

4.2 設計準備

\hat{B} 行列を 1 列ごとに分割する。

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & \cdots & \hat{b}_m \end{bmatrix} \quad (19)$$

このとき、

$$\hat{C}\hat{A}^{j-1}\hat{b}_i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \hat{\nu}_i - 2 \quad (20)$$

$$\hat{C}\hat{A}^{\hat{\nu}_i-1}\hat{b}_i \neq 0 \quad (21)$$

$$\hat{\nu} = \min \{ \hat{\nu}_1, \dots, \hat{\nu}_m \} \quad (22)$$

とすると、(21) 式を集めた行列を

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \hat{C}\hat{A}^{\hat{\nu}_1-1}\hat{b}_1 & \cdots & \hat{C}\hat{A}^{\hat{\nu}_m-1}\hat{b}_m \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\text{rank} \hat{\Phi} = m \quad (24)$$

とする。また、 $\hat{\Phi}$ の疑似逆行列を以下とする。

$$\hat{\Phi}^+ = (\hat{\Phi}^T \hat{\Phi})^{-1} \hat{\Phi}^T \quad (25)$$

ある ω_K に対して

$$\begin{cases} \omega_n = \omega_K & \text{Re } \lambda(\hat{A}) \geq -\omega_K \\ \omega_{ni} = \lambda(\hat{A}) & \text{Re } \lambda(\hat{A}) < -\omega_K \quad (i = 1, 2, \dots, p) \end{cases} \quad (26)$$

として、安定多項式を以下のようにおく。

$$s^{\hat{\nu}_i} + \alpha_{i1}s^{\hat{\nu}_i-1} + \cdots + \alpha_{i\hat{\nu}_i} =$$

$\hat{\nu}_i - p$: 偶数のとき

$$(s^2 + 2\zeta\omega_K s + \omega_K^2)^{\frac{\hat{\nu}_i-p}{2}} (s + \omega_{n1}) \cdots (s + \omega_{np})$$

$\hat{\nu}_i - p$: 奇数のとき

$$(s^2 + 2\zeta\omega_K s + \omega_K^2)^{\frac{\hat{\nu}_i-p-1}{2}} (s + \omega_K)(s + \omega_{n1}) \cdots (s + \omega_{np}) \quad (27)$$

また、

$$\begin{aligned}\Psi &= [\hat{A}^{\hat{\nu}_1}\hat{b}_1 + \alpha_{11}\hat{A}^{\hat{\nu}_1-1}\hat{b}_1 + \cdots + \alpha_{1\hat{\nu}_1}\hat{b}_1 \quad \cdots \\ &\quad \hat{A}^{\hat{\nu}_m}\hat{b}_m + \alpha_{m1}\hat{A}^{\hat{\nu}_m-1}\hat{b}_m + \cdots + \alpha_{m\hat{\nu}_m}\hat{b}_m] \quad (28)\end{aligned}$$

$$\Omega = \text{diag} \begin{bmatrix} \alpha_{1\hat{\nu}_1} & \cdots & \alpha_{m\hat{\nu}_m} \end{bmatrix} \quad (29)$$

とする。

「補題」

$\hat{A} - \Psi\hat{\Phi}^+\hat{C}$ が虚軸上に固有値を持たないとする、リカッチ方程式

$$\begin{aligned}P(\hat{A} - \Psi\hat{\Phi}^+\hat{C})^T + (\hat{A} - \Psi\hat{\Phi}^+\hat{C})P \\ - P\hat{C}^T(\hat{\Phi}^+)^T\Omega^2\hat{\Phi}^+\hat{C}P = 0\end{aligned} \quad (30)$$

は安定化解 $P = P^T \geq 0$ を持つ。この解を用いて

$$\hat{K} = \Psi\hat{\Phi}^+ + P\hat{C}^T(\hat{\Phi}^+)^T\Omega^2\hat{\Phi}^+ \quad (31)$$

$$Q = U_I^{-1}(0)\Omega\hat{\Phi}^+ \quad (32)$$

とおくと、

$$T_1(s) = Q\hat{C}(sI - \hat{A} + \hat{K}\hat{C})^{-1}\hat{B} = U_I(s)\Lambda(s) \quad (33)$$

が成り立つ。ただし、 U_I はインナ関数で

$$U_I(s) = I - \Omega\hat{\Phi}^+\hat{C}(sI - \hat{A} + \hat{K}\hat{C})^{-1}P\hat{C}^T(\hat{\Phi}^+)^T\Omega \quad (34)$$

$$\Lambda(s) = \text{diag} \left[\frac{\alpha_{i\hat{\nu}_i}}{s^{\hat{\nu}_i} + \alpha_{i1}s^{\hat{\nu}_i-1} + \cdots + \alpha_{i\hat{\nu}_i}} \right] \quad (35)$$

である。

□

ある値 $\omega_F > 0$ に対し、 $\sigma[T_2(j\omega)] \simeq 1 (0 < \omega < \omega_F)$ とするために、 $\lambda(\hat{A} - \hat{B}\hat{F})$ を以下のように設定する。

- $\lambda(\hat{A})$ の不安定極をすべて $-\omega_F$ とする
- $\lambda(\hat{A})$ の安定極を絶対値の小さい方から $\hat{\nu}_i - q$ 個を $-\omega_F$ とする (q : \hat{A} の不安定極数)

4.3 設計手順

step1 (27) 式で $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とおき、 ω_K を ω_T から出発して小さくしていく。 $\sigma[I - T_1(j\omega)]$ が $\frac{1}{|W_S(j\omega)|}$ の近傍になる ω_K を決定する。

step2 ω_F を ω_S より小さい方から出発し、 $\sigma[I - T_2(j\omega)T_1(j\omega)] < \frac{1}{|W_S(j\omega)|}$ を満たす ω_F を決定する。

step3 $\sigma[T_o(j\omega)]$ が、(10) 式を満たせば設計終了であり、満たさない場合は解なしである。

5. 設計例

次に設計例として、「倒立振り子」を制御対象に解析を行う。

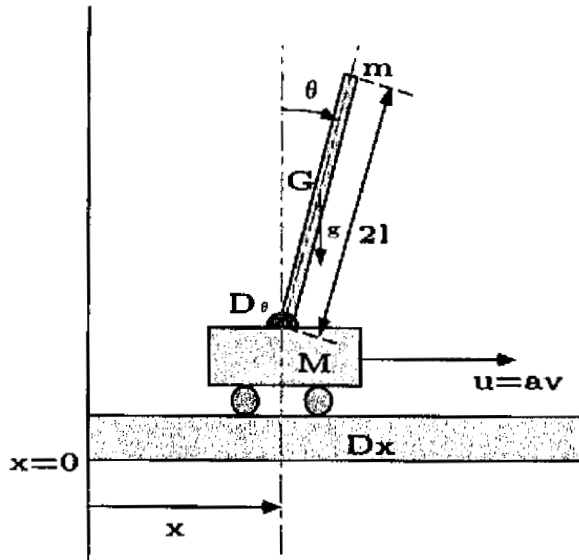


Fig. 3 倒立振り子

Fig. 3 の各係数を Table.1 に示す。

Table.1 各パラメータ値

振子の質量	m	0.270	[kg]
台車の質量	M	1.531	[kg]
振子の長さの 1/2	l	0.350	[m]
電圧-力変換係数	a	17.6055	[N/V]
台車の粘性係数	D_x	76.5500	[Ns/m]
振子の粘性係数	D_θ	0.002	[kgm ² /s]
重力加速度	g	9.8	[m/s ²]

Table.1 の各パラメータ値より、制御対象モデルの状態方程式は以下で、これは可制御、可観測である。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1.2415 & -47.8886 & 0.0027 \\ 0 & 23.6603 & 102.6185 & -0.0511 \end{bmatrix} x(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 11.0144 \\ -23.6023 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (37)$$

設計に使用する重み関数 $W_T(s)$, $W_S(s)$ を以下のように設定した。

$$W_T(s) = \frac{(s+6)^2}{640} \quad (38)$$

$$W_S(s) = \frac{0.04}{s} \quad (39)$$

W_T, W_S のクロスオーバー角周波数は、それぞれ

$$\omega_T = 25.0[\text{rad/s}], \quad \omega_S = 0.04[\text{rad/s}] \quad (40)$$

である。次に、感度の重み関数を接続した拡大系を求めると、 $\hat{\nu}_i = \hat{\nu}_1 = 3$ となり、(23) 式を計算すると

$$\hat{\Phi} = [\hat{C}\hat{A}^{\hat{\nu}_1-1}\hat{B}] = \begin{bmatrix} 0.4406 \\ -0.9441 \end{bmatrix} \quad (41)$$

となり、この行列の階数は

$$\text{rank}\hat{\Phi} = 1 \quad (42)$$

である。また、(27) 式は

$$s^3 + \alpha_{11}s^2 + \alpha_{12}s + \alpha_{13} = s^3 + 48.233s^2 + 13.605s + 1.918 \quad (43)$$

となり、(28) 式、(29) 式より以下のようになる。

$$\begin{aligned} \Psi &= [\hat{A}^3\hat{B} + \alpha_{11}\hat{A}^2\hat{B} + \alpha_{12}\hat{A}\hat{B} + \alpha_{13}\hat{B}] \\ &= \begin{bmatrix} 0.1494 \\ -0.2772 \\ 0.0128 \\ -19.8408 \\ 0.0767 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\Omega = \text{diag}[\alpha_{13}] = 1.9180 \quad (45)$$

(step1)

$\omega_K = \omega_T = 25.0$ から出発して ω_K を小さくしていき、 $\bar{\sigma}[I - T_1(j\omega)]$ が $\frac{1}{|W_S(j\omega)|}$ 近傍となる ω_K を決定する。

$\omega_K = 0.2$ のときの $\bar{\sigma}[I - T_1(j\omega)]$ をプロットした図を Fig.4 に示す。

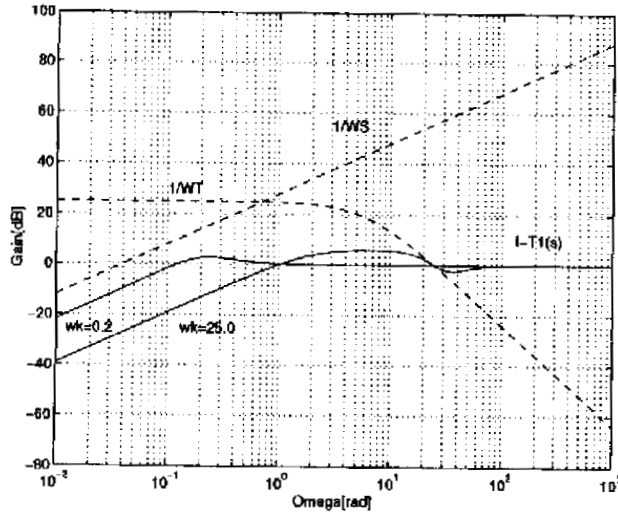


Fig. 4 $\bar{\sigma}[I - T_1(j\omega)]$ ($\omega_K = 0.2$)

次に、 $\hat{A} - \Psi\hat{\Phi} + \hat{C}$ を計算すると、虚軸上に固有値を持たないので、(30) 式のリカッチ方程式は安定化解 $P = P^T \geq 0$ を持つ。この安定化解を用いて (31) 式を計算すると、オブザーバゲイン \hat{K} は

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} -0.0442 & 0.0947 \\ -1.9664 & 4.2136 \\ 0.0370 & -0.0793 \\ -12.0738 & 25.8724 \\ -0.0311 & 0.0667 \end{bmatrix} \quad (46)$$

また、(32) 式より

$$Q = \begin{bmatrix} -0.7785 & 1.6683 \end{bmatrix} \quad (47)$$

となる。

(step2)

\hat{A} 行列の固有値は次のようになる。

$$\lambda(\hat{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4.580 & -4.5742 & -47.9505 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$\omega_F = \omega_S = 0.04$ とする。 $\hat{A} - \hat{B}\hat{F}$ の固有値を以下のように設定する。

$$\lambda(\hat{A} - \hat{B}\hat{F}) = \begin{bmatrix} -0.04 & -0.041 & -0.042 \\ & -4.5742 & -47.9505 \end{bmatrix} \quad (49)$$

極配置法により状態フィードバック係数 \hat{F} は以下のようになる。

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} -0.002 & -1212.1 & -511.9 & -261.7 & 117.7 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$\bar{\sigma}[I - T_2(j\omega)T_1(j\omega)]$ をプロットした図を Fig.5 に示す。

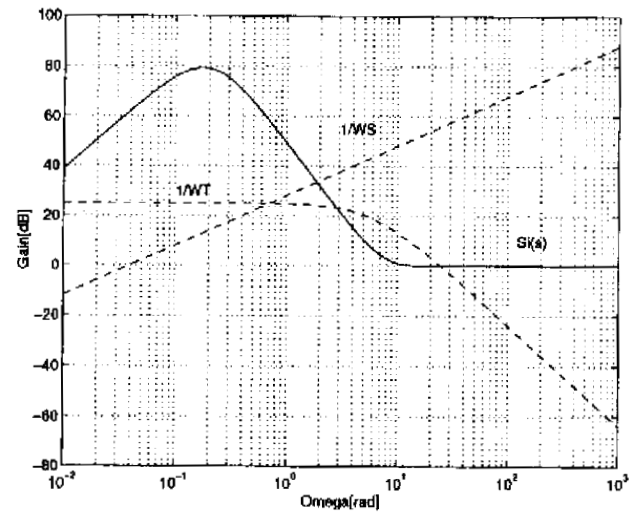


Fig. 5 $\bar{\sigma}[I - T_2(j\omega)T_1(j\omega)]$ ($\omega_F = 0.04$)

Fig. 5より (11) 式が満たされていないので、 ω_F を大きくして再度 \hat{F} を求める。

$\omega_F = 19.0$ のときに (11) 式を満たすことができた。その際の状態フィードバック係数は以下となった。

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} -162860 & -160830 & -71750 & -34930 & 1540 \end{bmatrix} \quad (51)$$

(step3)

$\bar{\sigma}[S_i(j\omega)], \bar{\sigma}[T_o(j\omega)]$ をプロットした図を Fig.6 に示す。

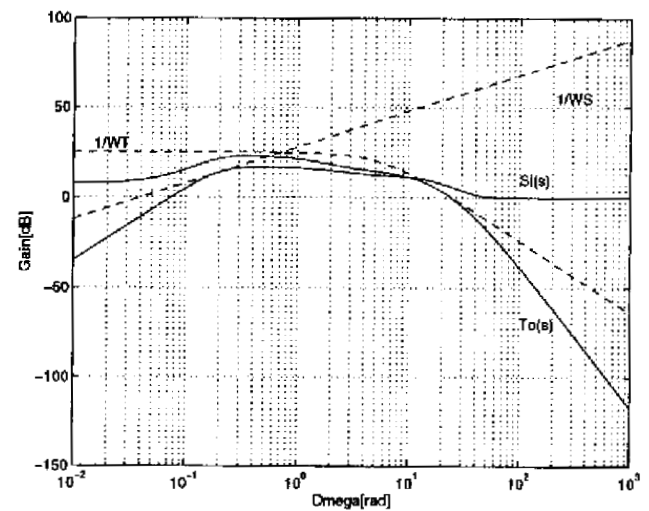


Fig. 6 $S_i(s), T_o(s)$ の周波数特性

Fig. 6より (10) 式を満たしているので設計終了である。

6. シミュレーション結果

次に、設計した制御系を用いてシミュレーションを行った。サンプリング間隔を0.02[sec]とし、初期条件として振子の触れ角を0.1[rad]傾けてスタートさせている。以下にその時の台車の位置と振子の触れ角、及び入力電圧の変化を示す。

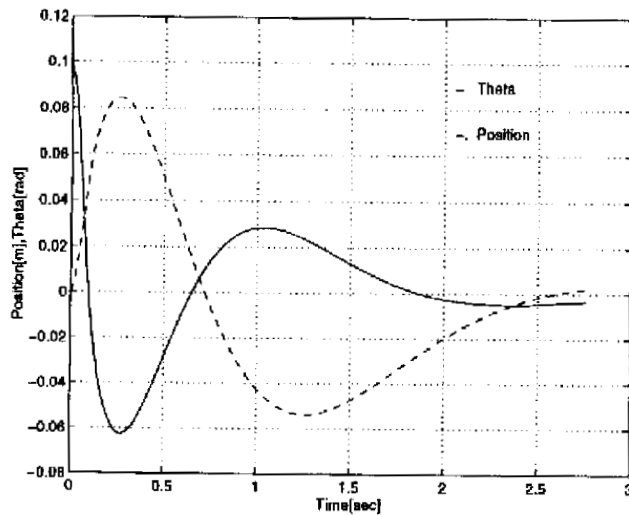


Fig. 7 台車の位置と振子の触れ角の変化

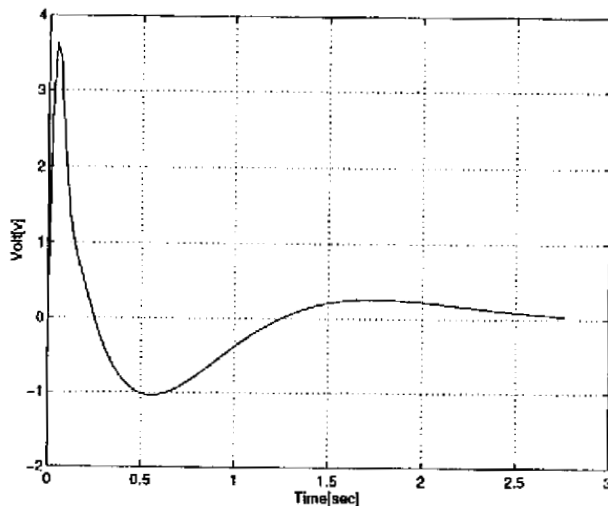


Fig. 8 入力電圧の変化

7. 実験結果

最後に実験結果を以下に示す。サンプリング間隔は0.02[sec]で、振子の角度、台車の位置を読み取りコンピュータ制御を行っている。

ここでは制御中の倒立振子・台車系に外乱を与えたときの挙動を見てみる。外乱として次の2つを与えた。

- 振子を手で軽くたたく(約6[sec])
- 台車を傾ける(約17[sec])

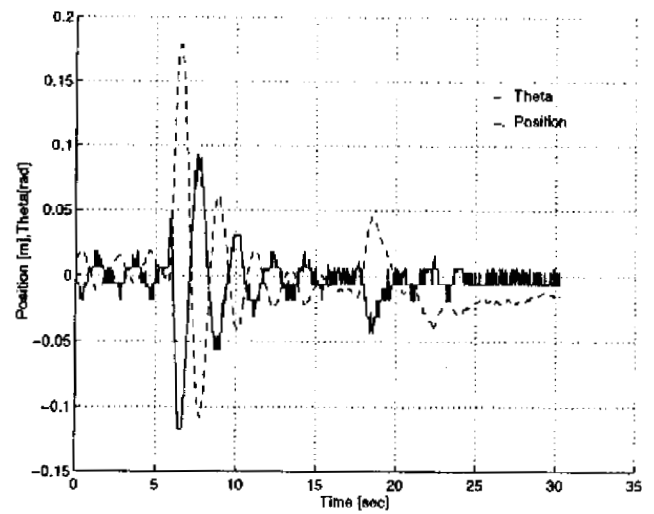


Fig. 9 台車の位置と振子の触れ角の変化

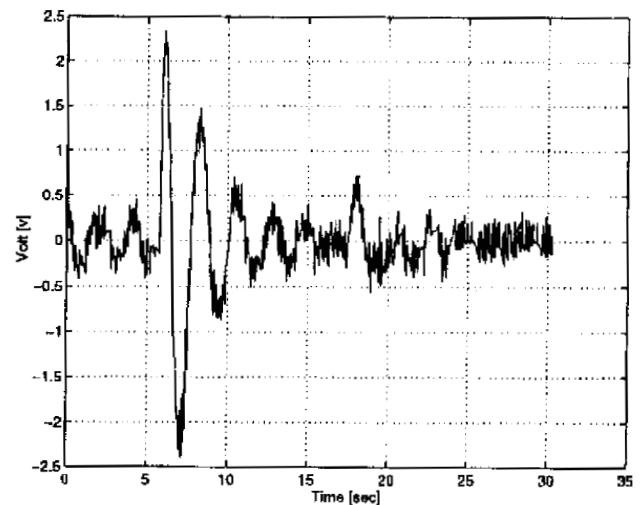


Fig. 10 入力電圧の変化

8. おわりに

本研究では、多変数系において、とくに入力の数より出力の数の方が多いシステムにおける非標準混合感度問題の制御器の設計法を提案した。また、この設計法の応用例として倒立振子に適用し、状態フィードバック係数、オブザーバ、自由パラメータを用いて制御系を構成し、シミュレーション・実験においても良好な結果を得た。

参考文献

- 1) 中野、美田: 制御工学基礎理論, 161/191, 照晃堂(1982)
- 2) 古田、川路、美田、原: メカニカルシステム制御, 7/17, オーム社(1984)
- 3) 美田 勉: H_∞ 制御, 44/53, 照晃堂(1994)
- 4) 古川、井村: 現代制御論, 107/130, 照晃堂(1994)
- 5) 熊川 恒志: 3 ディスク混合感度問題に関する研究, 計測自動制御学会東北支部 第177回研究集会, (1997)