

物理モデルによる簡単な非線形最適レギュレータの試み — 化学反応器の温度制御を例にして —

Non-linear Optimal Regulator based on Physical Model

○森本潤^{††}, 小原太輔[†], 鈴木睦[†]

○Jun Morimoto^{††}, Daisuke Obara[†], Mutumi Suzuki[†]

† 東北大学院・工、‡ 三共株式会社 第二生産技術研究所

† Tohoku University, ‡ Sankyo Co., LTD. Process Development Laboratories

キーワード : 最適レギュレーター (optimal regulator), 最大原理(maximum principle)

連絡先 : 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉07 東北大学工学部 大学院工学研究科 化学工学専攻 鈴木研究室
森本潤, Tel.: (022)217-7266, Fax.: (022)217-7293, E-mail: jun@pse.che.tohoku.ac.jp

1. 緒言

現代制御理論が現在のような線形代数によって確立される以前は、最適レギュレータの問題は変分法や最大原理等によって解析されていたと聞いている。このアプローチは非線形システムにも使えるという点ではすぐれていたが、難解であるうえ多変数の問題をこれらの手法で解くことは事実上不可能であった。化学工学で扱う制御問題は非線形なものが大部分であるので、このようなアプローチはもう一度見直す価値がある。そこで我々は化学プラントの最適運転計画の検討で得たPontryaginの最大原理による1変数および2変数の解法を用いて、最適レギュレータ問題を状態方程式から直接解くことを考えた。この手法により制御則を物理量を用いて簡単に表現することができたので紹介する。

2. 一般解法

2.1 はじめに

終端時間が自由な場合のPontryaginの最大原理をTable 1に示す。この性質を用いてHamilton随伴

Table 1 Hamilton関数の性質

	Hamilton関数の性質	数学的表現
(a)	極大値で最適	$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$
(b)	極大値は0	$H = 0$
(c)	常に極大	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0$

関数を消去することを考える。1変数系の場合直接制御則を得ることができ、2変数系の場合操作変数の微分形を得ることができる。以下にその一般解法を示す。

2.2 1変数系の解法

評価関数を以下のように定義する。

$$\int_0^{t_f} f_0 dt \rightarrow \text{minimum} \quad , \quad f_0 = P(x - x^*)^2 + Q(u - u^*)^2 \quad (1)$$

ここで x^*, u^* は目標の定常値である。状態方程式が u について線形である時 (x に関しては非線形で構わない)、

$$\dot{x} = f_1(x, u) = A(x) + B(x)u \quad (2)$$

である。現在の状態 x を維持する操作量を u^0 とすると

$$A(x) + B(x)u^0 = 0 \quad (\because \dot{x} = 0) \quad (3)$$

となり Eq(2) は, Eq(4) のように簡単な形となる。

$$f_1 = B(x)(u - u^0) \quad (4)$$

Lagrange の未定定数法により Eq(1), (4) を統合すると

$$\int F dt = \int \{f_0 + \lambda(\dot{x} - f_1)\} dt \rightarrow \text{extremal} \quad (5)$$

となる。Hamilton 関数 H および随伴関数 p_1 は以下のように定義される。

$$H = -f_0 + p_1 f_1 \quad (6)$$

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \lambda \quad (7)$$

Table 1 の (a), (b) の条件より

$$-\frac{\partial f_0}{\partial u} + p_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \quad \therefore p_1 = \frac{\frac{\partial f_0}{\partial u}}{\frac{\partial f_1}{\partial u}} \quad (8)$$

$$-f_0 + p_1 f_1 = 0 \quad \therefore p_1 = \frac{f_0}{f_1} \quad (9)$$

この Eq(8), (9) により p_1 を消去して

$$f_0 \frac{\partial f_1}{\partial u} = f_1 \frac{\partial f_0}{\partial u} \quad (10)$$

を得る。また

$$\frac{\partial f_0}{\partial u} = 2Q(u - u^*) \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = B(x) \quad (11)$$

であるから、Eq(10) に代入して整理すると $(u - u^*)$ の二次式となる。

$$(u - u^*)^2 - 2(u^0 - u^*)(u - u^*) - \frac{P}{Q}(x - x^*)^2 = 0 \quad (12)$$

これを解いて、

$$u = u^0 \pm \sqrt{(u^0 - u^*)^2 + \frac{P}{Q}(x - x^*)^2} \quad (13)$$

を得る。これが非線形系 1 変数系の最適レギュレータの式である。線形の場合は、通常行われている Riccati 方程式の解と一致することが確認できている。ここで極端な場合を検討してみると、 $P \ll Q$ の時 $u = u^*$ となり、 $P \gg Q$ の時 u_{max} と u_{min} の bang-bang 制御となる。

2.3 2変数系の解法

評価関数の被積分関数を $f_0(x_1, x_2, u)$ 、状態変数 (x_1, x_2) の時間微分を

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u) \quad , \quad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u)$$

と置くと Hamilton 関数は

$$H = -f_0 + p_1 f_1 + p_2 f_2 \quad (14)$$

と定義され、Hamilton 正準形式は Eq(15), (16) で表される。

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = \frac{\partial f_0}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - p_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \quad (15)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = \frac{\partial f_0}{\partial x_2} - p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} - p_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \quad (16)$$

Table 1(b) の条件より

$$f_0 - p_1 f_1 - p_2 f_2 = 0 \quad (17)$$

Table 1(a) の条件より

$$\frac{\partial f_0}{\partial u} - p_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} - p_2 \frac{\partial f_2}{\partial u} = 0 \quad (18)$$

Eq(17), (18) より $p_2(p_1)$ を消去して $p_1(p_2)$ について整理すると、

$$p_1 = \frac{f_0 \frac{\partial f_2}{\partial u} - f_2 \frac{\partial f_0}{\partial u}}{f_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial u}} \quad (19)$$

$$p_2 = \frac{f_1 \frac{\partial f_0}{\partial u} - f_0 \frac{\partial f_1}{\partial u}}{f_1 \frac{\partial f_2}{\partial u} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial u}} \quad (20)$$

Table 1(c)の条件より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial u} + p_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} + p_2 \frac{\partial f_2}{\partial u} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

ここでEq(21)の各項を計算し、Eq(15),Eq(16)を代入して $\frac{du}{dt}$ について整理すると

$$\dot{u} = \frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\frac{\partial^2 f_0}{\partial u^2} - p_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} - p_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2}} \quad (22)$$

を得る。ここでA,B,Cは

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \right) f_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_1}{\partial u} \right) f_2 \\ &\quad - \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ B &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_2}{\partial u} \right) f_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_2}{\partial u} \right) f_2 \\ &\quad - \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial u} - \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ C &= \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_0}{\partial x_2} \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f_0}{\partial u} \right) f_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f_0}{\partial u} \right) f_2 \end{aligned} \quad (23)$$

である。Eq(22)は最適レギュレータの操作変数時間変化を微分形で表現したものである。

3. 設定した問題

A(原料)→B(製品)→C(副生成物)のような逐次反応をFig.1に示すバッチ反応器で行うことを考える。ジャケット内は完全混合とし反応熱項を $R(T_1)$ で表すと、 T_1 、 T_2 の時間微分はEq (24)、(25)のように表される。ここで $W_1 = C_{P1}\rho_1V_1$ 、 $W_2 = C_{P2}\rho_2V_2$ 、 $w_1 = C_{P2}\rho_2u$ である。

$$\dot{T}_1 = \frac{1}{W_1} \{V_1 R(T_1) - AU(T_1 - T_2)\} \quad (24)$$

$$\dot{T}_2 = \frac{w_2}{W_2} (T_{2in} - T_2) + \frac{AU(T_1 - T_2)}{W_2} \quad (25)$$

各反応は一次反応とすると

$$R(T_1) = V_1 k_A C_A H_A + V_1 k_B C_B H_B \quad (26)$$

$$k_A = A_A \exp \left(\frac{-E_A}{RT_1} \right) \quad (27)$$

$$k_B = A_B \exp \left(\frac{-E_B}{RT_1} \right) \quad (28)$$

となる。操作変数をジャケット入口温度 T_{2in} として反応液温度制御則を導く。

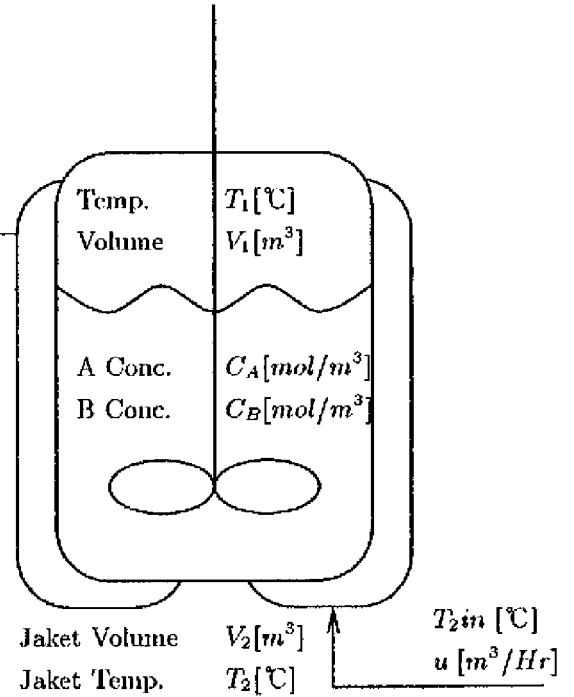


Fig. 1 装置図

4. 各制御則の導出とシミュレーション結果

4.1 計算条件

計算に用いた物性をTable 2に、装置条件,計算条件をTable 3,4に示す。

4.2 1変数系

反応液 T_1 の変化に対してジャケット温度 T_2 の変化は非常に早い事が予想されるため、 $\dot{T}_2 = 0$ と近似した1変数系として考える。評価関数を

$$\int \{P(T_1 - T_1^*)^2 + Q(T_{2in} - T_{2in}^*)^2\} dt \rightarrow \text{minimum} \quad (29)$$

Table 2 物性

parameter			value
$A \rightarrow B$			
頻度因子	A_A	1/Hr	3.6×10^{14}
活性化エネルギー	E_A	cal/mol	25000
反応熱	H_A	kcal/mol	20
$B \rightarrow C$			
頻度因子	A_B	1/Hr	3.6×10^{14}
活性化エネルギー	E_B	cal/mol	27000
反応熱	H_B	kcal/mol	20
反応液比熱	C_{p1}	kcal/m ³	1
熱媒比熱	C_{p2}	kcal/m ³	1
反応液比重	ρ_1	kg/m ³	1000
熱媒比重	ρ_2	kg/m ³	1000

Table 3 装置条件

parameter			value
内容量	V_1	m ³	5
伝熱面積	A	m ²	5
総括伝熱係数	U	kcal/m ² /°C/Hr	300
ジャケット容量	V_2	m ³	0.5
熱媒流速	u	m ³ /Hr	5

と定義する。熱収支より

$$w_2(T_{2in} - T_2) = -AU(T_1 - T_2) \quad (30)$$

上式を用いてEq(24)より T_2 を消去すると

$$\dot{T}_1 = \frac{R(T_1)}{W_1} - \frac{1}{W_1} \frac{AUw_2}{AU + w_2}(T_1 - T_{2in}) \quad (31)$$

となる。ここで現在の反応液温度を維持するジャケット入口温度を T_{2in}^o とすると、

$$T_{2in}^o = T_1 - \frac{AU + w_2}{AUW_2}R(T_1) \quad (32)$$

同様に目標反応液温度 T_1^* を維持するジャケット入口温度を T_{2in}^* とすると、

$$T_{2in}^* = T_1^* - \frac{AU + w_2}{AUW_2}R(T_1^*) \quad (33)$$

と表すことができる。評価関数の被積分関数を f_0 、Eq(31)を f_1 とおくとEq(10)の関係が成り立ち、

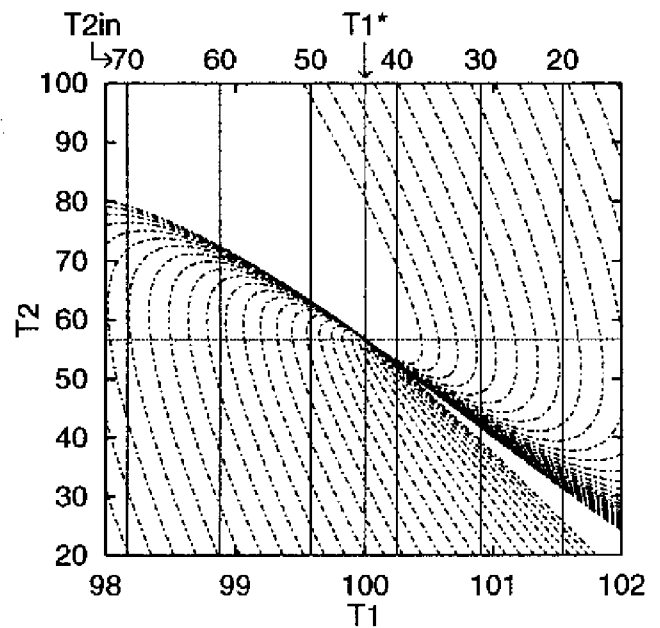
Table 4 計算条件

parameter			value
目標反応液温度	T_1^*	°C	100
A成分濃度	C_A	mol/m ³	800
B成分濃度	C_B	mol/m ³	200
ジャケット入口温度			
最大値	T_{2inmax}	°C	120
最小値	T_{2inmin}	°C	-50

整理した二次式を解くと

$$T_{2in} = T_{2in}^o \pm \sqrt{(T_{2in}^o - T_{2in}^*)^2 + \frac{P}{Q}(T_1 - T_1^*)^2} \quad (34)$$

を得る。評価関数の重みを、 $P/Q = 10^2$ 、 $P/Q = 10^4$ とした時の制御軌道をFig.2, Fig.3に示す。重みの値を上げて行くと制御幅が狭まりbang-bang制御に近づいて行く。

Fig. 2 1変数系制御軌道 ($P/Q = 10^2$)

4.3 カスケード制御

目標反応液温度 T_1^* に対してまず仮の操作変数としてジャケット温度 T_2 を考え、最適レギュレータを構成する。次に上記レギュレータにより求まる操作量 T_2 を T_{2in}^* として、ジャケット入口温度 T_{2in} の

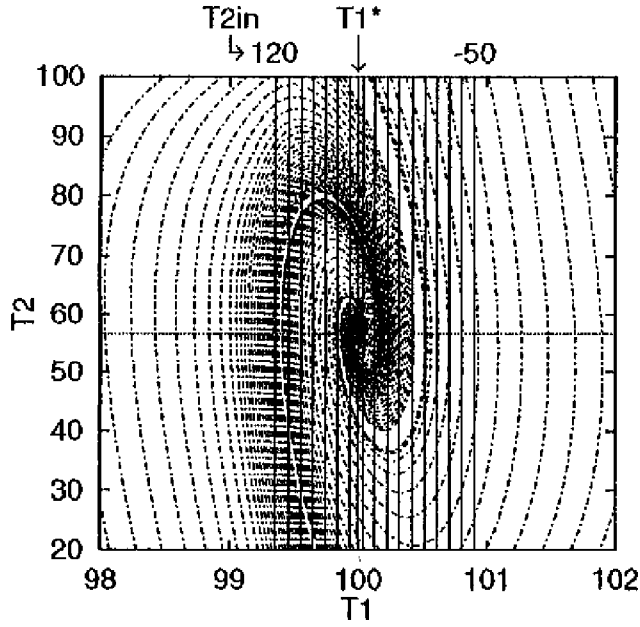


Fig. 3 1変数系制御軌道 ($P/Q = 10^4$)

操作量を決定するカスケード制御を考える。
評価関数をEq(35)。現状の T_1 を維持する T_2^o, T_1^* を
維持する T_2^* はそれぞれEq(36),Eq(37)となる。

$$\int \{P_1(T_1 - T_1^*)^2 + Q_1(T_2 - T_2^*)^2\} dt \rightarrow \text{minimum} \quad (35)$$

$$T_2^o = T_1 - \frac{R(T_1)}{AU} \quad (36)$$

$$T_2^* = T_1^* - \frac{R(T_1^*)}{AU} \quad (37)$$

1変数系の解法より

$$T_2 = T_2^o \pm \sqrt{(T_2^o - T_2^*)^2 + \frac{P_1}{Q_1}(T_1 - T_1^*)^2} \quad (38)$$

Eq(38)で得た T_2 を新たな目標値 T_2^{**} として最適レ
ギュレータを構成する。評価関数をEq(39)。現状
の T_2 を維持する T_{2in}^o, T_2^{**} を維持する T_{2in}^* はそれぞ
れEq(40),Eq(41)となる。

$$\int \{P_2(T_2 - T_2^{**})^2 + Q_2(T_{2in} - T_{2in}^*)^2\} dt \rightarrow \text{minimum} \quad (39)$$

$$T_{2in}^o = T_2 - \frac{AU}{w_2}(T_1 - T_2) \quad (40)$$

$$T_{2in}^* = T_2^{**} - \frac{AU}{w_2}(T_1^* - T_2^{**}) \quad (41)$$

全く同様にして

$$T_{2in} = T_{2in}^o \pm \sqrt{(T_{2in}^o - T_{2in}^*)^2 + \frac{P_2}{Q_2}(T_2 - T_2^{**})^2} \quad (42)$$

を得る。 $P_1/Q_1 = 10^2, P_2/Q_2 = 1$ とした時の軌道
をFig.4に示す。 $T_2 = 0$ とした1変数系 (Fig.2) と
比べ T_2 の遅れを考慮した制御マップとなっている。
 $P_1/Q_1 = 10^3, P_2/Q_2 = 10$ とした時の軌道をFig.4

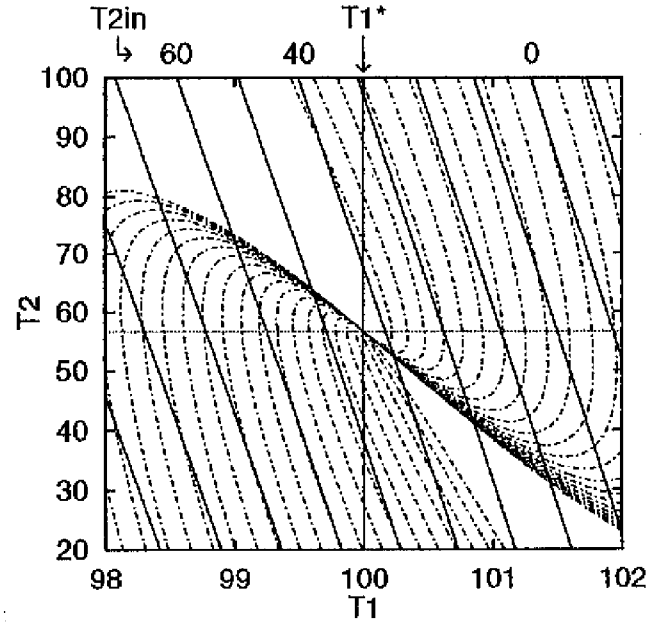


Fig. 4 カスケード制御軌道
($P_1/Q_1 = 10^2, P_2/Q_2 = 1$)

に示す。 P_1/Q_1 の値を上げると制御変数の分布幅
が狭まり、やはりbang-bang制御に近づいているこ
とがわかる。また $P_1/Q_1 \gg P_2/Q_2$ とした場合、1
変数系近似に近いマップとなる。

4.4 線形化近似

Eq(24)、Eq(25)を平衡点近傍でテーラー展開し
て線形化すると、

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (43)$$

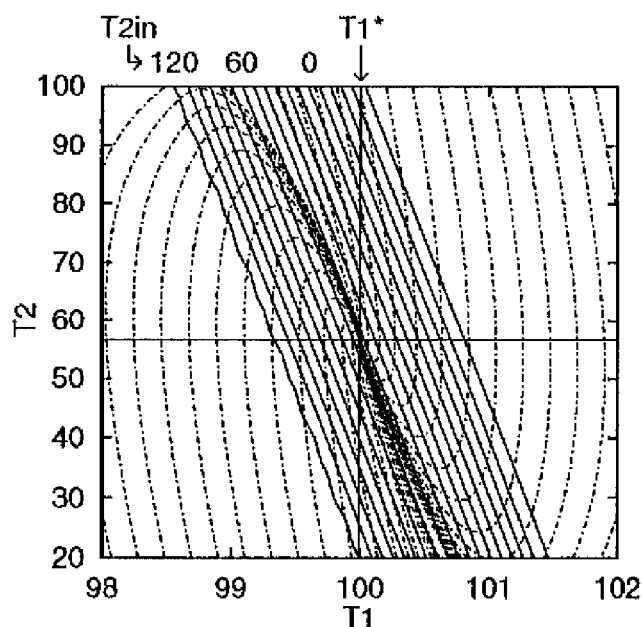


Fig. 5 カスケード制御軌道
($P_1/Q_1 = 10^3, P_2/Q_2 = 10$)

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{W_1} \left(AU - V_1 \frac{\partial R(T_1)}{\partial T_1} \Big|_{T_1^*} \right) & \frac{AU}{W_1} \\ \frac{AU}{W_2} & -\frac{(w_2 + AU)}{W_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{w_2}{W_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix}$$

評価関数をEq(45)とする。

$$I = \int_0^{\infty} [x^T Q x + P_3 u^2] dt \rightarrow \text{minimum} \quad (45)$$

$$Q = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

Riccatiの方程式を解くと、

$$P = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$d = \frac{P_3}{E} (A + D \pm (A^2 + 2BC + D^2 + P_3 \pm 2((BC - AD)^2 + A^2 P_2 + B^2 P_1)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})$$

$$b = \frac{P_3}{E} \left(\frac{d^2 - 2Dd - P_2}{2B} \right)$$

$$a = \frac{P_3}{E} \left(\frac{b^2 - 2Cb - P_1}{2A} \right)$$

よって最適レギュレータの制御則

$$u = -\frac{P_3 b}{E} x_1 + -\frac{P_3 d}{E} x_2 \quad (46)$$

を得る。 $P_1 = 10^4, P_2 = 1, P_3 = 1$ における軌跡をFig.6に示す。

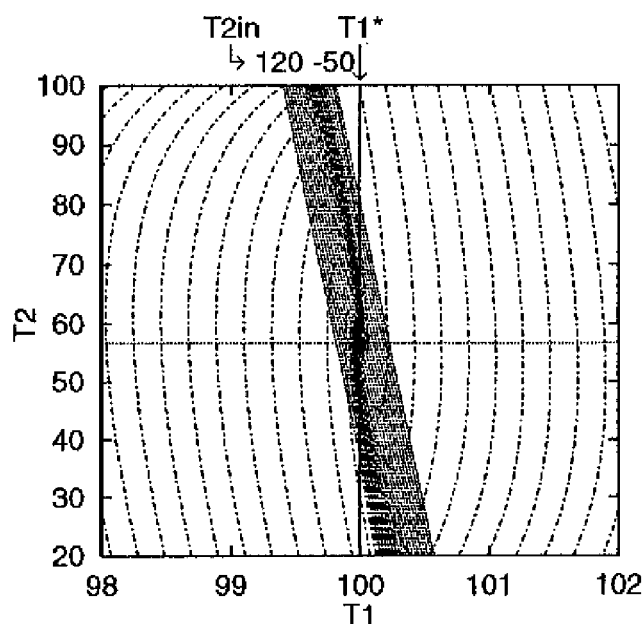


Fig. 6 線形近似制御軌道
($P_1 = 10^4, P_2 = 1, P_3 = 1$)

4.5 2変数系

評価関数の被積分関数を

$$f_0 = P_1 (T_1 - T_1^*)^2 + P_2 (T_2 - T_2^*)^2 + P_3 (T_{2in} - T_{2in}^*)^2 \quad (47)$$

とし、Eq(24)、Eq(25)の各微分方程式を f_1, f_2 と置いてEq(22)を用いて \dot{T}_{2in} を求める。

$$A = -\frac{AU}{W_1} \frac{w_2}{W_2}$$

$$B = \frac{w_2}{W_2^2} (w_2 + AU)$$

$$C = 2P_2 (T_2 - T_2^*) \frac{w_2}{W_2}$$

$$p_1 = \frac{f_0}{f_1} - \frac{W_2}{w_2} \frac{f_2}{f_1} 2P_3 (T_{2in} - T_{2in}^*)$$

$$p_2 = 2P_3 \frac{W_2}{w_2} (T_{2in} - T_{2in}^*)$$

よって

$$\begin{aligned} \dot{T}_{2in} = & \frac{AUw_2}{2P_3W_1W_2} \frac{f_0}{f_1} \\ & + (T_{2in} - T_{2in}^*) \left(\frac{AU}{W_1} \frac{f_2}{f_1} + \frac{w_2 + AU}{W_2} \right) \\ & + \frac{w_2}{W_2} \frac{P_2}{P_3} (T_2 - T_2^*) \end{aligned} \quad (48)$$

このEq(48)により、ある (T_1, T_2) における T_{2in} を仮定して軌道を計算 ($t \rightarrow \infty$ で) し、 (T_1^*, T_2^*) となる T_{2in} を shooting 法などの試行錯誤法により探索することができる。しかし解を得るには膨大な計算が必要となる。そこで $(T_1^*, T_2^*, T_{2in}^*)$ から逆時間的に軌道を求める事を考える。しかしこの点はEq(48)の特異点であり、このままでは計算できない。よって平衡点近傍を4.4で求めた線形近似により求め、その点よりEq(48)により逆時間的に軌道を算出した。Fig.7は、 $P_1 = 10^4, P_2 = 1, P_3 = 1$ としたときの軌道と T_{2in} の等高線を示している。この図を状態空間 (T_1, T_2) による T_{2in} の制御マップとして利用することができる。

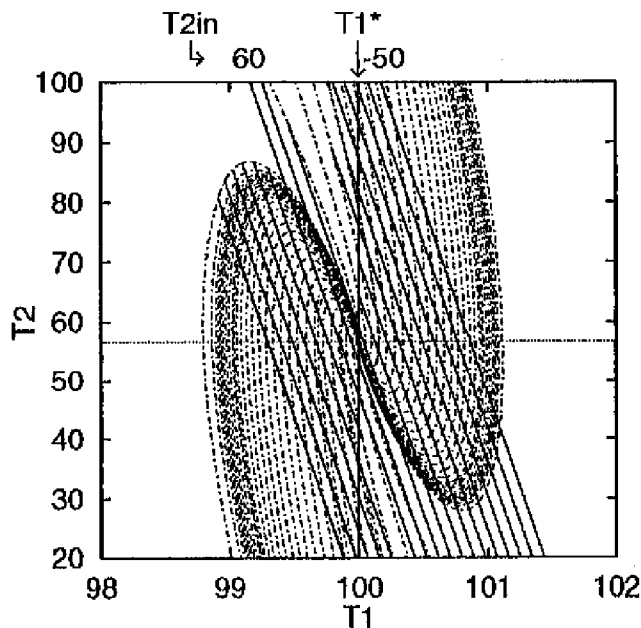


Fig. 7 2変数系制御軌道
($P_1 = 10^4, P_2 = 1, P_3 = 1$)

4.6 各制御則の比較

評価関数としてEq(47)を用いて各制御則を比較する。始点 (T_1, T_2) を $(100, -51)$ 、 $(100, 121)$ とし、Table5の条件での各軌道はFig.8となる。その時の評価関数の値 J は、始点 $(100, -51)$ の時Fig.9となり、始点 $(100, 121)$ の時Fig.10となった。いずれの場合も最大原理より求めた制御結果が、評価関数値を最小とすることができた。

Table 5 各制御則の比較計算条件

- (a) = 4.5に示した2変数系
 $P_1 = 10^4, P_2 = 1, P_3 = 1$
- (b) = 4.4に示した線形近似
 $P_1 = 10^4, P_2 = 1, P_3 = 1$
- (c) = 4.3に示したカスケード制御
 $P_1/Q_1 = 10^4, P_2/Q_2 = 1$
- (d) = 4.2に示した1変数系
 $P/Q = 10^4$

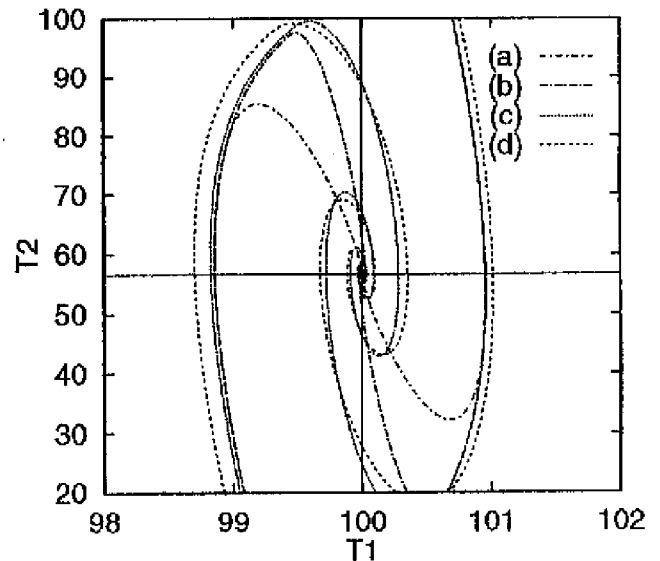


Fig. 8 各制御則による軌跡の比較

5. 結言

Pontryaginの最大原理と随伴関数を消去する解法により物理モデルより、1変数系では直接制御則を得ることができ、2変数系では制御マップを作成できた。また、その結果は良好であった。

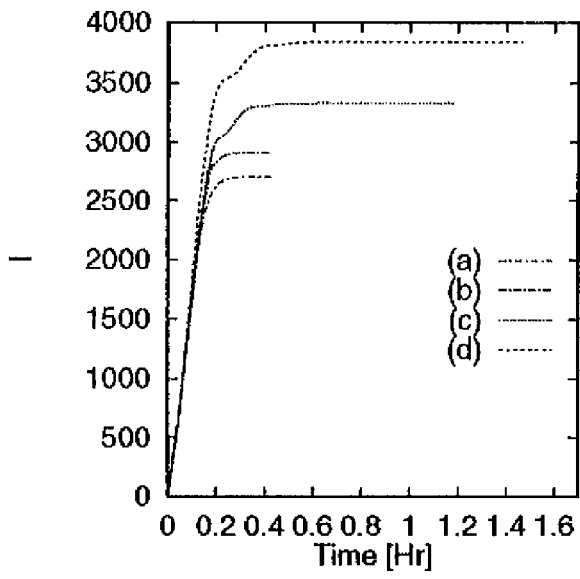


Fig. 9 各制御則の比較 $T_1 = 100, T_2 = -51$

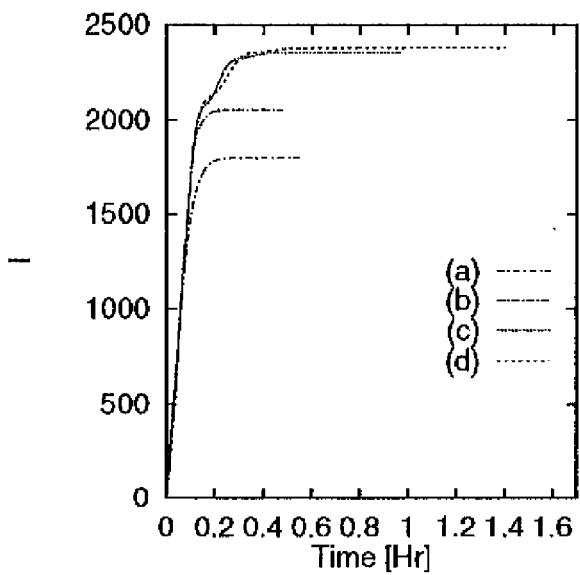


Fig. 10 各制御則の比較 $T_1 = 100, T_2 = 121$