

# 一般的な非線形系に対応したモデル追従制御

## The Model Following Control System for General Nonlinear Systems

○佐藤亮達, 大久保重範

○Ryotatsu Sato, Shigenori Okubo

山形大学

Yamagata University

キーワード: モデル追従形制御系 (Model Following Control System), 非線形システム (Nonlinear System),  
内部状態の有界性 (Boundedness Conditions of Internal State),

連絡先: 〒992-8510 山形県米沢市城南4-3-16

山形大学 大学院 工学研究科 機械システム工学専攻 大久保研究室 佐藤亮達

Tel.: (0238)26-3246, Fax.: (0238)24-6445, E-mail: rsato@mipultra.yz.yamagata-u.ac.jp

### 1. はじめに

モデル追従形制御系 (MFCS) とは, 出力を目標信号 (モデル入力) に追従させる制御系である. 大久保<sup>1)</sup>により線形系と非線形が混在する形式の制御対象に対して内部状態が有界な制御系の設計法が開発された. 本稿では, 一般的な非線形系に対するモデル追従形制御系の設計法を考察する. 今回は制御入力も非線形として含まれる一般的な非線形制御系を扱う.

内部状態の有界性は, 制御則を構成するのに必要な状態変数フィルタを含めた全状態方程式を求め, これの2次形式の微分を調べることにより示される. ここで, 全状態が有界となる条件をまとめるとつぎのようになる.

【1】非線形関数の内積条件

【2】 $\frac{\partial}{\partial u(t)} C_2 f(x(t), u(t)) = 0$  の  $C_2 f(x(t), u(t))$  が  $x(t)$  のみの関数となる条件

【3】 $\left| \frac{\partial}{\partial u(t)} C f(x(t), u(t)) \right| \neq 0$  が成立する.

### 2. 制御系の設計

本設計で扱う制御対象は式 (1), (2) で表される非線形系である. これは, 状態と制御入力の両者について非線形であるような一般的な制御システムである.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + d(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + d_0(t) \quad (2)$$

ここで, 各ベクトルは次の次元をもつ.

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^l, f(x(t), u(t)) \in R^n,$$

$$d(t) \in R^n, y(t) \in R^l, d_0(t) \in R^l,$$

$$x_m(t) \in R^{n_m}, r_m(t) \in R^{l_m}, y_m(t) \in R^{l_m}$$

定数 $\lambda > 0$ を使い,  $f_1(x(t), u(t))$  を式 (3) のようにおき, 制御対象を以下のように書き換える.

$$\begin{aligned} f_1(x(t), u(t)) \\ = f(x(t), u(t)) + \lambda x(t) - Bu(t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = -\lambda x(t) + Bu(t) \\ + f_1(x(t), u(t)) + d(t) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで,  $B \in R^{n \times l}$  は列フルランクである. 外乱の特性多項式を  $D_d(p)$  とすれば式 (5), (6) を満たす.  $D_d(p)$  は既知確定スカラー多項式である. また,  $d(t)$  は有効な外乱であり  $d_0(t)$  及び  $\dot{d}_0(t)$  も有界である. 従って, 次式が成り立つ.

$$D_d(p)d(t) = 0 \quad (5)$$

$$D_d(p)d_0(t) = 0 \quad (6)$$

モデルは式 (7) で与える.

$$D_m(p)y_m = N_m(p)r_m(t) \quad (7)$$

ここで  $D_m(p)$  は次式で表す.

$$D_m(p) = \text{diag}[D_{m_k}(p)], \quad \partial D_{m_k}(p) = n_{m_k} \quad (8)$$

$N_m(p)$  は一般多項式であり, 次数は  $\partial_{r_k}\{N_m(p)\} = \sigma_{m_k}$  である.

出力誤差は次式で与える.

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (9)$$

次に, 制御対象の入出力関係は次式のようになる.

$$\begin{aligned} (p + \lambda)y(t) = CBu(t) + Cf_1(x(t), u(t)) + Cd(t) \\ + (p + \lambda)d_0(t) \end{aligned} \quad (10)$$

$D(p), N_r, w(t)$  を以下のようにおいて式 (10) を式 (14) で表す.

$$D(p) = (p + \lambda)I \quad (11)$$

$$N_r = CB \quad (12)$$

$$w(t) = Cd(t) + (p + \lambda)d_0(t) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} D(p)y(t) = N_r u(t) + Cf_1(x(t), u(t)) \\ + w(t) \end{aligned} \quad (14)$$

つぎに対角で安定な多項式行列  $T(p)$  を式 (15) で与える.

$$T(p) = \text{diag}(T_k(p)), \quad \partial T_k(p) = \rho_k \quad (15)$$

ここで  $\partial D_d(p) = n_d$  とする場合,  $\rho_k = n_d - n_{m_k} + 1 \geq 0$  を満たすものとする. この  $T(p)$  を使い, 式 (16) より  $S(p)$  を求める.

$$S(p) = T(p)D_m(p) - D(p)D_d(p) \quad (16)$$

ただし,  $S(p)$  は

$$S(p) = \text{diag}(S_k(p)), \quad \partial S_k(p) = n_d \quad (17)$$

となる.

次に, 制御入力を求める計算を行うと, 制御入力を構成する伝達関数がプロパー (proper) になるように式 (18) のような安定な対角行列  $Q(p)$  を使い  $T(p)D_m(p)e(t) = 0$  を計算する.

$$Q(p) = \text{diag}(Q_k(p)), \quad \partial Q_k(p) = n_d \quad (18)$$

$$\begin{aligned} T(p)D_m(p)e(t) = N_r[D_d(p) - Q(p)]u(t) \\ + N_r Q(p)u(t) + D_d(p) \\ [Cf_1(x(t), u(t))] + S(p)y(t) \\ - T(p)N_m(p)r_m(t) \end{aligned} \quad (19)$$

上式を書き換えて, 以下のようにまとめる.

$$\begin{aligned} u(t) + N_r^{-1}Cf_1(x(t), u(t)) \\ + Q(p)^{-1}[D_d(p) - Q(p)]u(t) \\ + Q(p)^{-1}(D_d(p) - Q(p))N_r^{-1}Cf_1(x(t), u(t)) \\ + Q(p)^{-1}S(p)N_r^{-1}y(t) \\ - N_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

ここで,

$$v(t) = u(t) + N_r^{-1}Cf_1(x(t), u(t)) \quad (21)$$

とおく. すると

$$\begin{aligned} v(t) = u(t) + N_r^{-1}C[f(x(t), u(t)) + \lambda x(t) \\ - Bu(t)] \end{aligned} \quad (22)$$

$$= N_r^{-1}Cf(x(t), u(t)) + N_r^{-1}\lambda Cx(t) \quad (23)$$

これより,  $N_r v(t) - \lambda Cx(t) = Cf(x(t), u(t))$  となり,  $u(t)$  を求めなければならない. この関係から以下の条件が成立しなければならない.

$$\left| \frac{\partial}{\partial u(t)} Cf(x(t), u(t)) \right| \neq 0 \quad (24)$$

$v(t)$  は前述の多項式を利用し以下のように記述できる.

$$\begin{aligned} v(t) = & -Q(p)^{-1}[D_d(p) - Q(p)]v(t) \\ & -Q(p)^{-1}S(p)N_r^{-1}y(t) + v_m(t) \end{aligned} \quad (25)$$

$u(t)$  を構成する伝達関数がプロパーになるように, モデルの次数に対しては次の条件が満たされているものとする.

$$n_{m_k} - \sigma_{m_k} \geq 1 \quad (26)$$

ここで, 式 (21) より,

制御入力  $u(t)$  は  $u(t) = \psi(x(t), v(t))$  とする.

$\psi(x(t), v(t))$  は式 (21) を  $u(t)$  について解いた逆関数である. 状態空間表示を使って  $v(t)$  を表せば式 (27) になる.

$$v(t) = -H_1 \xi_1(t) - \{E_2 y(t) + H_2 \xi_2(t)\} + v_m(t) \quad (27)$$

$\xi_1(t), \xi_2(t)$  は次の状態変数フィルタである.

$$\dot{\xi}_1(t) = F_1 \xi_1(t) + G_1 v(t) \quad (28)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = F_2 \xi_2(t) + G_2 y(t) \quad (29)$$

多項式行列とシステム行列の間には次の関係がある.

$$\begin{aligned} & H_1(pI - F_1)^{-1}G_1 \\ = & Q(p)^{-1}[D_d(p) - Q(p)] \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & E_2 + H_2(pI - F_2)^{-1}G_2 \\ = & Q(p)^{-1}S(p)N_r^{-1} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで  $|pI - F_i| = |Q(p)|$  ( $i = 1, 2$ ) である. さらに外部信号  $v_m(t)$  は式 (32) で与えられる.

$$v_m(t) = N_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (32)$$

以上のことにより, 内部状態が有界であればモデル追従形制御系が実現できる.

### 3. 大域的有界性の証明

本章では一般的な非線形系に対するモデル追従形制御系のすべての内部状態が有界になる条件を導く.

制御系全体の状態方程式は,  $z(t)$  を式 (33) のようにとれば式 (34) で表される.

$$z(t) = (x^T(t), \xi_1^T(t), \xi_2^T(t))^T \quad (33)$$

$$\dot{z}(t) = A_s z(t) + B_s f_s(v_s(t)) + d_s(t) \quad (34)$$

$$v_s(t) = C_s z(t) + d_{s0}(t) \quad (35)$$

$x(t), v(t)$  をあわせて新たな状態  $v_s(t)$  とする.

非線形部  $f_s(v_s(t))$  は行列の型を合わせるためにダミー関数  $f_3(v_s(t))$  を含む. この  $f_3(v_s(t))$  は全体が内部安定になるように設計者が自由に決めることができる.  $A_s, B_s, C_s$  は  $\lambda, B, C, E_i, H_i, F_i, G_i$  によって確定的に書ける.  $d_s(t), d_{s0}(t)$  は  $d(t), d_0(t), v_m(t)$  から構成されており, 有界な信号である.

$$v_s(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$f_s(v_s(t)) = \begin{bmatrix} f_2(v_s(t)) \\ f_3(v_s(t)) \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} f_2(v_s(t)) &= f(x(t), u(t)) + \lambda x(t) \\ &= f(x(t), \psi(x(t), v(t))) + \lambda x(t) \end{aligned} \quad (38)$$

$$A_s = \begin{bmatrix} -\lambda I & 0 & 0 \\ 0 & F_1 & 0 \\ G_2 C & 0 & F_2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$B_s = \begin{bmatrix} I & 0 \\ G_1 N_r^{-1} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$C_s = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -E_2 C & -H_1 & -H_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$d_s(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ 0 \\ G_2 d_0(t) \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$d_{s0}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ v_m(t) - E_2 d_0(t) \end{bmatrix} \quad (43)$$

$A_s$  の特性多項式は次式で与えられ安定である.

$$|pI - A_s| = (p + \lambda)^n |Q(p)|^2 \quad (44)$$

つきに，制御系全体の伝達関数  $H(p)$  が常に正実伝達関数であるために，設計パラメータである各多項式行列を次の方法により決定する．

$$H(p) = C_s(pI - A_s)^{-1}B_s = \begin{bmatrix} \frac{I}{p+\lambda} & 0 \\ H_{21}(p) & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$H_{21}(p) = \frac{-H_1(pI - F_1)^{-1}G_1N_r^{-1}C + (E_2 + H_2(pI - F_2)^{-1}G_2)C}{p + \lambda} \quad (46)$$

$H_{21}(p) = 0$  とすることができれば， $H(p)$  は常に正実伝達関数であることがわかる．

式 (46) に式 (30),(31) を代入すれば  $H_{21}(p)$  は次式のようになる．

$$H_{21}(p) = \frac{Q(p)^{-1}}{p + \lambda} \{D(p)(D_d(p) - Q(p)) + S(p)\}N_r^{-1}C \quad (47)$$

次式がゼロになればよいことがわかる．従って，次式を満たす  $Q(p), S(p)$  が存在することが必要である．

$$D(p)(D_d(p) - Q(p)) + S(p) = 0 \quad (48)$$

式 (48) と式 (16) を使って，次の条件が導き出せる．

$$T(p) = D(p)T_1(p) \quad (49)$$

$$Q(p) = T_1(p)D_m(p) \quad (50)$$

$$S(p) = D(p)(Q(p) - D_d(p)) = D(p)(T_1(p)D_m(p) - D_d(p)) \quad (51)$$

$D(p)$  が一次であるから， $T_1(p)$  の次数は  $T(p)$  よりも一つ低い対角行列として決める．

$$T_1(p) = \text{diag}[T_{1k}(p)], \quad \partial T_{1k}(p) = \rho_{1k} \quad (52)$$

ここで， $\rho_{1k} = n_d - n_{mk}$  が成立する．

$$v_s(t) = C_s z(t) + d_{s0} = C_s(pI - A_s)^{-1}B_s f_s(v_s(t))$$

$$+ C_s(pI - A_s)^{-1}d_s(t) + d_{s0}(t) \quad (53)$$

$$= C_s(pI - A_s)^{-1}B_s f_s(v_s(t)) + w_s = H(p)f_s(v_s(t)) + w_s(t) \quad (54)$$

$$w_s(t) = C_s(pI - A_s)^{-1}d_s(t) + d_{s0}(t) \quad (55)$$

となり， $\bar{C}_s, \bar{A}_s, \bar{B}_s$  と置いて  $H(p) = \bar{C}_s(pI - \bar{A}_s)^{-1}\bar{B}_s$  の最小実現を次のようにとる．

$$\dot{z}(t) = \bar{A}_s z(t) + \bar{B}_s f_s(v_s(t)) \quad (56)$$

$$v_s(t) = \bar{C}_s z(t) + w_s(t) \quad (57)$$

$\hat{H}(p) = R_s^T H(p)$  とする． $R_s$  を次のように取る．ここで， $R_{s11}, R_{s22}$  は正定対称行列である．

$$R_s = \begin{bmatrix} R_{s11} & 0 \\ R_{s21} & R_{s22} \end{bmatrix} \quad (58)$$

これより次式が成り立つ．

$$\hat{H}(j\omega) + \hat{H}^T(-j\omega) = \begin{bmatrix} \frac{2\lambda R_{s11}}{\lambda^2 + \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (59)$$

式 (59) より  $\hat{H}(p)$  は正実伝達関数である．従って，次のような対称行列  $P_s$  ( $P_s > 0$ ),  $Q_s$  ( $Q_s > 0$ ) が存在する．

$$P_s \bar{A}_s + \bar{A}_s^T P_s = -Q_s \quad (60)$$

$$P_s \bar{B}_s = \bar{C}_s^T R_s \quad (61)$$

$$P_s > 0, Q_s \geq 0$$

( $P_s$ : 正定対称行列,  $Q_s$ : 準正定対称行列)

次に，リアプノフ関数の候補として  $z(t)$  の 2 次形式を扱う．

$$V(t) = \frac{1}{2} \bar{z}^T(t) P_s \bar{z}(t) \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \bar{z}^T(t) P_s \dot{\bar{z}}(t) \\ &= -\frac{1}{2} \bar{z}^T(t) Q_s \bar{z}(t) + v_s^T(t) R_s f_s(v_s(t)) - w_s^T(t) R_s f_s(v_s(t)) \end{aligned} \quad (63)$$

ここで，制御対象

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + d(t) \quad (64)$$

に  $C$  を掛けると次のようになる．

$$C\dot{x}(t) = Cf(x(t), u(t)) + Cd(t) \quad (65)$$

これより,  $T(p)D_m(p)e(t) = 0$  の両辺を微分すると

$$T(p)D_m(p)(\dot{e}(t)) = 0 \quad (66)$$

従って,  $\dot{e}(t)$  は指数減衰項からなる信号であり有界である. 更に, 式 (9) より

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{y}_m(t) \quad (67)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{e}(t) + \dot{y}_m(t) \quad (68)$$

となる. また,

$$y_m(t) = \frac{N_m(t)}{D_m(t)} r_m(t) \quad (69)$$

$$\dot{y}_m(t) = \frac{pN_m(p)}{D_m(p)} r_m(t) \quad (70)$$

次数の条件は  $n_{mk} - \sigma_{mk} \geq 1$  となる.  $r_m(t)$  が有界であるから  $\dot{y}_m(t)$  が有界となる. 式 (68) より  $\dot{y}(t)$  も有界となる. 以上のことより,  $\dot{y}(t), \dot{d}_0(t), d(t)$  が有界であるから次式が成立する.

$$Cf(x(t), u(t)) = \dot{y}(t) - \dot{d}_0(t) - Cd(t) \quad (71)$$

$y(t), d(t), d_0(t)$  が有界であるから  $Cf(x(t), u(t))$  は有界である. また,

$$v(t) = N_r^{-1}C(f(x(t), u(t)) + \lambda x(t)) \quad (72)$$

より,  $v(t)$  も有界である. さらに

$$\dot{\xi}_1(t) = F_1\xi_1(t) + G_1v(t) \quad (73)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = F_2\xi_2(t) + G_2y(t) \quad (74)$$

より,  $\xi_1(t), \xi_2(t)$  も有界である.

ここで,  $\bar{x}(t)$  を次のように定義する.

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} C \\ C^\perp \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} Cx(t) \\ C^\perp x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} \quad (75)$$

$\bar{x}_1(t)$  は  $y(t) - d_0(t)$  と等価であり, 有界である.  $\bar{x}_2(t)$  を有界とするための条件を導く. なお,  $C$  と  $C^\perp$  は直交し,  $\bar{C}_1, \bar{C}_2$  を次のように定義する.

$$x(t) = \begin{bmatrix} C \\ C^\perp \end{bmatrix}^{-1} \bar{x}(t) = [\bar{C}_1 \quad \bar{C}_2] \bar{x}(t) \quad (76)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= \begin{bmatrix} C\bar{C}_1 & C\bar{C}_2 \\ C^\perp\bar{C}_1 & C^\perp\bar{C}_2 \end{bmatrix} \bar{x}(t) \\ &= \begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix} \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (77)$$

次式を満たすものとする.

$$\begin{aligned} C\bar{C}_1 &= I_l, \quad C\bar{C}_2 = 0, \\ C^\perp\bar{C}_1 &= 0, \quad C^\perp\bar{C}_2 = I_{n-l} \end{aligned} \quad (78)$$

$C$  の正規直交系を  $C_1$  とし, さらに  $C^\perp = C_2$  とする.

$$C = \Gamma C_1, \quad C^\perp = C_2 \quad (79)$$

式 (79) のような正則行列  $\Gamma$  が存在する.

次に,  $R_{s11} = C_2^T Q_{rs} C_2$ , ( $Q_{rs}$ : 正定対称行列) とおく. 式 (63) の右辺第二項は以下のようにになる.

$$\begin{aligned} v_s^T R_s f_s(v_s(t)) &= x^T(t) R_{s11} f_2(v_s(t)) \\ &\quad + v^T(t) (R_{s21} f_2(v_s(t)) \\ &\quad + R_{s22} f_3(v_s(t))) \end{aligned} \quad (80)$$

上式の  $v^T(t)$  項は, ダミー関数  $f_3(v_s(t))$  が入っており, 次式を満足するように決める.

$$\begin{aligned} v^T(t) (R_{s21} f_2(v_s(t)) + R_{s22} f_3(v_s(t))) \\ = -q_v \|v(t)\|^N \end{aligned} \quad (81)$$

$(q_v \geq 0, N \geq 0)$

なお, 次式を常に満足するようにする.

$$\begin{aligned} R_{s21} f_2(v_s(t)) + R_{s22} f_3(v_s(t)) \\ = -q_v \|v(t)\|^{N-2} v(t) \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} f_3(v_s(t)) &= -R_{s22}^{-1} (q_v \|v(t)\|^{N-2} v(t) \\ &\quad + R_{s21} f_2(v_s(t))) \end{aligned} \quad (83)$$

よって, 式 (80) は次のようになる.

$$\begin{aligned} v_s^T R_s f_s(v_s(t)) &= x^T(t) C_2^T Q_{rs} C_2 (f(x(t), u(t)) \\ &\quad + \lambda x(t)) - q_v \|v(t)\|^N \\ &= \bar{x}_2^T(t) Q_{rs} C_2 (f(x(t), u(t)) \\ &\quad + \lambda x(t)) - q_v \|v(t)\|^N \end{aligned} \quad (84)$$

ここで、次式が成立しているものとする。(非線形関数の内積条件)

$$\begin{aligned} \bar{x}_2^T(t) Q_{rs} C_2 (f(x(t), u(t)) + \lambda x(t)) \\ \leq \alpha - \beta \|\bar{x}_2(t)\|^\gamma \quad (85) \\ (\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma > \gamma_1 \geq 0) \end{aligned}$$

この条件が満たされるためには、 $C_2 f(x(t), u(t))$  が  $u(t)$  を含まないことである。すなわち、 $x(t)$  のみの関数である必要がある。よって次式が成立する必要があるものと仮定する。

$$\frac{\partial}{\partial u(t)} C_2 f(x(t), u(t)) = 0 \quad (86)$$

以上より、式(84)は

$$\begin{aligned} v_s^T R_s f_s(v_s(t)) &= \alpha - \beta \|\bar{x}_2(t)\|^\gamma \\ &\quad - q_v \|v(t)\|^N \quad (87) \end{aligned}$$

となる。一方、式(63)の右辺第三項の  $f_s(v_s(t))$  について以下の式が成立しているものとする。(非線形関数のノルムの条件) なお、この条件を満足するようにダミー関数  $f_3(v_s(t))$  を決めればよい。従って、この条件は設計上の制約とはならないことに注意する。

$$\begin{aligned} \|f_s(v_s(t))\| &\leq \alpha_1 + \beta_1 \|\bar{x}_2(t)\|^\gamma \quad (88) \\ (\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \gamma_1 \geq 0) \end{aligned}$$

式(63)は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\frac{1}{2} \bar{z}(t)^T Q_s \bar{z}(t) + \alpha - \beta \|\bar{x}_2(t)\|^\gamma \\ &\quad - q_v \|v(t)\|^N + \alpha_2 + \beta_2 \|\bar{x}_2(t)\|^\gamma \\ &\leq \alpha_3 - \beta_3 \|\bar{x}_2(t)\|^\gamma \quad (89) \\ (\alpha_3 \geq 0, \beta_3 \geq 0, \gamma > \gamma_1 \geq 0) \end{aligned}$$

よって、 $\bar{x}_2(t)$  は有界である<sup>1)2)</sup>。ここに、全状態は有界となった。

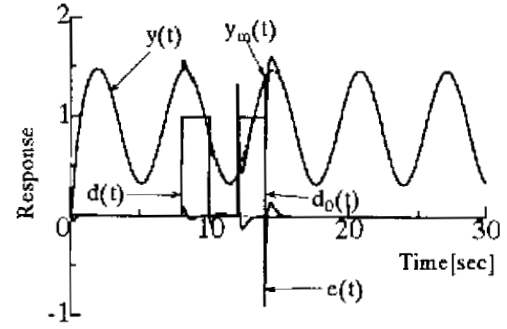


Fig. 1 Output response of nonlinear model following control system

## 4. シミュレーション結果

### 4.1 数値例

本シミュレーションでは定数  $\lambda = 5$  とし、次のような 2 次元 1 入出力 ( $n = 2, l = 1$ ) の制御対象を考える。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \\ &= \begin{bmatrix} -x_{s1}^4 - x_{s2}^2 - 7x_{s1} \\ u^3(t) + 3u(t) - x_{s1}^2 \end{bmatrix} \quad (90) \end{aligned}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \end{bmatrix}, u = u_{s1} \quad (91)$$

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ N_r &= 1 \quad (92) \end{aligned}$$

また、即知確定多項式行列  $T(p), D_m(p), D(p)$  を次のように置く。

$$T(p) = p + 5 \quad (93)$$

$$D_m(p) = (p + 5)^5 \quad (94)$$

$$D(p) = p + 5 \quad (95)$$

即知確定スカラー多項式  $D_d(p)$  を次式とする。

$$D_d(p) = p^2 \quad (96)$$

また、安定でモニックな対角行列  $Q(p)$  は次式とする。

$$Q(p) = (p + 5)^2 \quad (97)$$

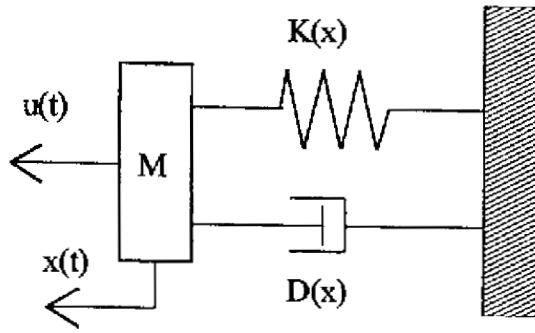


Fig. 2 Mechanical system

以上のことにより  $S(p)$  は

$$S(p) = 10p^2 + 75p + 125 \quad (98)$$

次に多項式行列とシステム行列の関係から数値を求める。

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{bmatrix} -25 & -10 \end{bmatrix} \\ E_2 &= 10, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -125 & -25 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (99)$$

なお、モデル入力  $r_m = 3 \sin(t) + 4.5$  とした。

## 4.2 機械系の実システム

機械系の模式図を Fig.2 に示す。ラグランジュ法により運動方程式を求めると次式のようなになる。

$$M\ddot{x} + (D_1 + D_2x^2)\dot{x} + (K_1x + K_2x^3) = u \quad (100)$$

$M$  は物体の質量,  $D_1, D_2$  は粘性減衰係数,  $K_1, K_2$  はばね係数とする。

Table 1 Parameters of Mechanical system

Parameter	Paralell
$M$	1.0 (kg)
$G$	0.961 (N/V)
$D_1$	0.1 (Ns/m)
$D_2$	0.01 (Ns/m)
$K_1$	2.0 (N/m)
$K_2$	1.0 (N/m)

定数  $\lambda$  を  $\lambda = 5$  とする。また、制御入力行列  $B$ ,

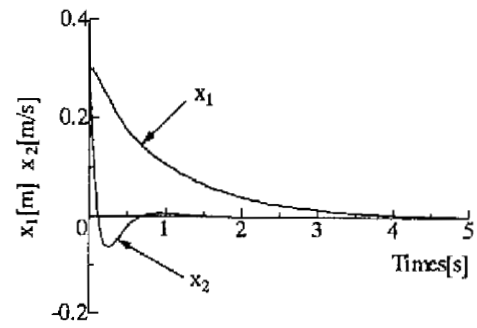


Fig. 3 Response of  $x_1, x_2$  in case of  $r_m(t) = 0.0$

出力行列  $C$  を次式のようにする。

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (101)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (102)$$

まず、状態変数を次のように置く。

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{s1} \\ x_{s2} \end{bmatrix} \quad (103)$$

運動方程式を次式のように置く。

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (104)$$

これより、以下のようなになる。

$$L_1 = x_{s2} \quad (105)$$

$$L_2 = \frac{1}{M} \{ -(D_1 + D_2x_{s1}^2)x_{s2} - (K_1x_{s1} + K_2x_{s1}^3) + u_{s1} \} \quad (106)$$

この結果より、 $f_1(x, u)$  は次式のようなになる。

$$f_1(x, u) = \begin{bmatrix} L_1 + 5x_{s1} \\ L_2 + 5x_{s2} - u_{s1} \end{bmatrix} \quad (107)$$

$$N_r = 1 \quad (108)$$

また、多項式行列  $T(p), D_m(p), D(p), Q(p)$  を次のように置く。

$$T(p) = p + 5 \quad (109)$$

$$D_m(p) = (p+5)^2 \quad (110)$$

$$D(p) = (p+5) \quad (111)$$

$$Q(p) = (p+6)^2 \quad (112)$$

即知確定スカラー多項式  $D_d(p)$  を次式とする。

$$D_d(p) = p^2 \quad (113)$$

以上より,  $S(p)$  を求める。

$$S(p) = 10p^2 + 75p + 125 \quad (114)$$

次に, 多項式行列とシステム行列の関係から数値を求める。

$$H_1 = \begin{bmatrix} -25 & -10 \end{bmatrix} \quad (115)$$

$$E_2 = 10 \quad (116)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -125 & -25 \end{bmatrix} \quad (117)$$

## 5. おわりに

本設計法の長所は, 正実条件が常に満足できるということと, 制御系全体がシンプルであることである。

状態, 制御入力の両者について非線形であるような一般的な非線形制御対象に対しても, 内部状態が有界なモデル追従形制御系の設計が可能であることが確認できた。また, 実システムの応用に関して可能であることが確認できた。

## 参考文献

- 1) 大久保 重範: 外乱を考慮した非線形系のモデル追従形制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, 21-8, 792/799(1985)
- 2) 大久保 重範: 零点の安定配置を使った非線形モデル追従形制御系, 計測自動制御学会論文集, 28-8, 939/946 (1992)
- 3) 大久保 重範: 一般的な非線形系のモデル追従形制御系, 第2回制御理論シンポジウム前刷, 37/40 (1994)
- 4) 田中, 大久保: 一般的な非線形系に対するモデル追従形制御系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, 34-8, 968/976(1998)
- 5) S. Okubo: The Model Following Control System for the General Nonlinear System, Preprint of SICE'94, 527/528 (1994)
- 6) 劉, 大久保: 内積条件と正実条件を緩和した非線形モデル追従形制御系の一設計法, 電気学会論文誌, Vol.118-C, No.2, 202/209 (1998)
- 7) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- 8) 古田, 佐野: 基礎システム理論, コロナ社 (1978)
- 9) 日本数学学会編集: 数学辞典第2版, 岩波書店 (1968)