

Mathematicaを用いたマニピュレータの運動方程式の構築

Using Mathematica for Manipulator Dynamics Equation Described

○孫 信偉, 大久保 重範

○Xinwei Sun, Shigenori Okubo

山形大学工学部

Faculty of Engineering, Yamagata University

キーワード: マニピュレータ (Manipulator), 動特性方程式 (Dynamics Equation), Mathematica

連絡先: 〒992 山形県米沢市城南4-3-16 山形大学工学部 機械システム工学科 大久保研究室
孫 信偉, Tel.: (0238)26-3246, Fax.: (0238)26-3205, E-mail: xwsun@mipultra.yz.yamagata-u.ac.jp

Abstract: In this paper we shows a design for manipulator using mathematica. We then develop the manipulator, in the Lagrangian, very difficult merely to obtain the dynamics equations for a system as complicated as a any degree of freedom manipulator. According to link parameters, we will make use of mathematica program mechanics as this method allows us to obtain the dynamics equations for very complicated system in the simplest manner possible.

1. はじめに

コンピュータ数学システム Mathematica は数値計算、数式処理、グラフィックスが強力でありユーザインターフェースの優れたシステムの構造に適している。

従来のロボットマニピュレータは、高精度な位置決め、あるいは運動は可能であるが人間が実際に行っている巧みな運動は苦手である。ただし、ロボットマニピュレータの設計するとき、運動方程式中に含まれる各種パラメータの値がわかっていなければならない。マニピュレータの運動方程式を導き、正確な結果を得るのはかなり困難であるので、本構想は Mathematica を用いて、各リンクの質量、質量中心位置、慣性テンソル、摩擦力などのリンクパラメータから、マニピュレータの運動方程式を構築することである。

2. マニピュレータの動特性方程式

T変換行列で表された任意のマニピュレータに対する動特性方程式を導くときに、これを5段階に分けて行う。まず任意のリンクの点の速度を計算し、つぎに運動のエネルギーを計算する、それから位置

エネルギーを出し，ラグランジアンを作り，最後にこれを微分して動特性方程式を求める。

2.1 リンクの座標系について

リンク座標系を固定すれば，座標系 $i-1$ と i の関係をつぎの回転および並進によって確定できる。

- 1) z_{i-1} 軸まわりに角度 θ_i だけ回転させる。
- 2) z_{i-1} に沿って距離 d_i だけ並進させる。
- 3) 回転後の x_{i-1} ，すなわち x_i に沿って長さ a_i だけ並進させる。
- 4) x_i 軸まわりにねじれ角 α_i だけ回転させる。

以上の操作は，リンク i の座標系をリンク $i-1$ の座標系に關係づける 4 つの同次変換の積として表現でき，これが T 行列とよばれるものである。すなわち

$${}^{i-1}T_i = T_{trans}(x_{i-1}, a_{i-1}) \cdot T_{rot}(x_{i-1}, \alpha_{i-1}) \cdot T_{trans}(z_i, d_i) \cdot T_{rot}(z_i, \theta_i) \quad (1)$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ \cos(\alpha_{i-1}) \sin(\theta_i) & \cos(\alpha_{i-1}) \cos(\theta_i) & -\sin(\alpha_{i-1}) & -\sin(\alpha_{i-1}) d_i \\ \sin(\alpha_{i-1}) \sin(\theta_i) & \sin(\alpha_{i-1}) \cos(\theta_i) & \cos(\alpha_{i-1}) & \cos(\alpha_{i-1}) d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

となる。リンク座標系が定まってしまうと，リンクパラメータの値から α などの正弦や余弦を計算しておくことができる。 T 行列は関節変数 θ または d だけの関数となる。

2.2 マニピュレータ上の位置、速度の計算

同次変換行列を用い，各リンクの位置、速度、角速度、加速度、角加速度を求める関係式を導く。ベース座標系 \sum_0 より見たリンク i の座標系 \sum_i の位置は，同次変換行列 0T_i により表される。すなわち

$${}^0T_i = {}^0T_1 {}^1T_2 {}^2T_3 \dots {}^{i-1}T_i \quad (3)$$

となる。

\sum_i に対して ${}^i p$ の位置にあるリンク i 上の点が， \sum_0 に対して ${}^0 p_i$ の位置にあるとすると，リンク i に関して表示した任意の点 ${}^i p$ が与えられたとき，基準座標から見たその点の位置は

$${}^0 p_i = {}^0T_i {}^i p \quad (4)$$

と表される。したがってその速度は

$$\frac{d{}^0 p_i}{dt} = \left(\sum_{j=1}^i \frac{\partial {}^0T_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) {}^i p \quad (5)$$

となる。速度の 2 乗は

$$\left(\frac{d{}^0 p_i}{dt} \right)^2 = \dot{p}_i \cdot \dot{p}_i = \text{Trace}(\dot{p} \cdot \dot{p}^T) \quad (6)$$

と表される。式 (5) を代入すると

$$\left(\frac{dp_i}{dt}\right)^2 = \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} \dot{q}_j^i p^i \sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k} \dot{q}_k^i p \right)^T \right] \quad (7)$$

$$= \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} {}^i p^i p^T \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \quad (8)$$

を得る。

2.3 運動エネルギー

リンク i 上の ${}^i p$ の位置にある微小質量 dm の運動エネルギーは

$$dK_i = \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} {}^i p^i p^T \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] dm \quad (9)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} {}^i p^i dm {}^i p^T \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \quad (10)$$

である。したがってリンク i の運動エネルギーは

$$K_i = \int_{link_i} dK_i = \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} \left(\int_{link_i} {}^i p^i p^T dm \right) \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \quad (11)$$

式 (11) 右辺中央の積分は擬似慣性行列 H_i として知られており、次式

$$H_i = \int_{link_i} {}^i p^i p^T dm = \begin{bmatrix} \int_{link_i} {}^i x^2 dm & \int_{link_i} {}^i x^i y dm & \int_{link_i} {}^i x^i z dm & \int_{link_i} {}^i x dm \\ \int_{link_i} {}^i x^i y dm & \int_{link_i} {}^i y^2 dm & \int_{link_i} {}^i y^i z dm & \int_{link_i} {}^i y dm \\ \int_{link_i} {}^i x^i z dm & \int_{link_i} {}^i y^i z dm & \int_{link_i} {}^i z^2 dm & \int_{link_i} {}^i z dm \\ \int_{link_i} {}^i x dm & \int_{link_i} {}^i y dm & \int_{link_i} {}^i z dm & \int_{link_i} {}^i dm \end{bmatrix} \quad (12)$$

で与えられる。したがってマニピュレータの全運動エネルギーは

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} H_i \frac{\partial^0 T_i}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \quad (13)$$

となる。

2.4 位置エネルギー

重力場 g においてある基準高さからだけ上にある質量 m の物体によって、リンク i の座標系 T_i に関してその質量中心がベクトル r_i で表されるリンクの位置エネルギーは

$$P_i = -m_i g^T {}^0 T_i^i r_i \quad (14)$$

となる。ただし

$$g = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

である。ゆえにマニピュレータの全位置エネルギーは

$$P = -\sum_{i=1}^n m_i g^{T^0} T_i^i r_i \quad (16)$$

で与えられる。

2.5 動特性方程式

式 (13), (16) よりラグランジアン $L=K-P$ は

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^0 T_i}{\partial q_j} H_i \frac{\partial^0 T_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n m_i g^{T^0} T_i^i r_i \quad (17)$$

となる。

動特性方程式は、運動および位置エネルギーを表した座標によって、つぎのように与えられる。

$$F_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (18)$$

$$= \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \text{Trace} \left(\frac{\partial^0 T_j}{\partial q_k} H_j \frac{\partial^0 T_j^T}{\partial q_i} \right) \ddot{q}_k + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 T_j}{\partial q_k \partial q_m} H_j \frac{\partial^0 T_j^T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=i}^n m_j g^T \frac{\partial^0 T_j^j r_j}{\partial q_i} \quad (19)$$

ここで F_i は対応する力またはトルクである。従って、式は総和をとる順序に無関係であるから、さらに粘性摩擦 V と外乱 d を含めた場合、 n 自由度アームの運動方程式の一般形はつぎのように書き換えられる。

$$F + d = M(q)\ddot{q} + h(q, \dot{q}) + V\dot{q} + g(q) \quad (20)$$

ただし、 M , h , g それぞれの式は以下のようにある。

$$M(q)_{ij} = \sum_{p=\max(i,j)}^n \text{Trace} \left(\frac{\partial^0 T_p}{\partial q_i} H_p \frac{\partial^0 T_p^T}{\partial q_j} \right) \quad (21)$$

$$h_{ijk} = \sum_{p=\max(i,j,k)}^n \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 T_p}{\partial q_j \partial q_k} H_p \frac{\partial^0 T_p^T}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial M(q)_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial M(q)_{jk}}{\partial q_i} \quad (22)$$

$$h(q, \dot{q})_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (23)$$

$$g(q)_i = -\sum_{p=i}^n m_p g^T \frac{\partial^0 T_p^p r_p}{\partial q_i} \quad (24)$$

ここで、 $M(q)_{ii}$ の形の項は関節 i の有効慣性を表し、 $M(q)_{ij}$ は関節 i と j の間の相互慣性を表す。 h_{ijk} の項は関節 j および k における速度によって関節 i に生じるコリオリ力を表す。最後に $g(q)_i$ の形の項は関節 i における重力負荷を表す。

3. Mathematica を用いた方程式の構築するプログラム

Mathematica で方程式の構築するプログラム流れ図を次のようにする。まず最初リンクのパラメータを入力して、つぎにパラメータによって慣性行列、遠心力及びコリオリ力と重量負荷を計算する、最後にこれを微分して動特性方程式を求める。

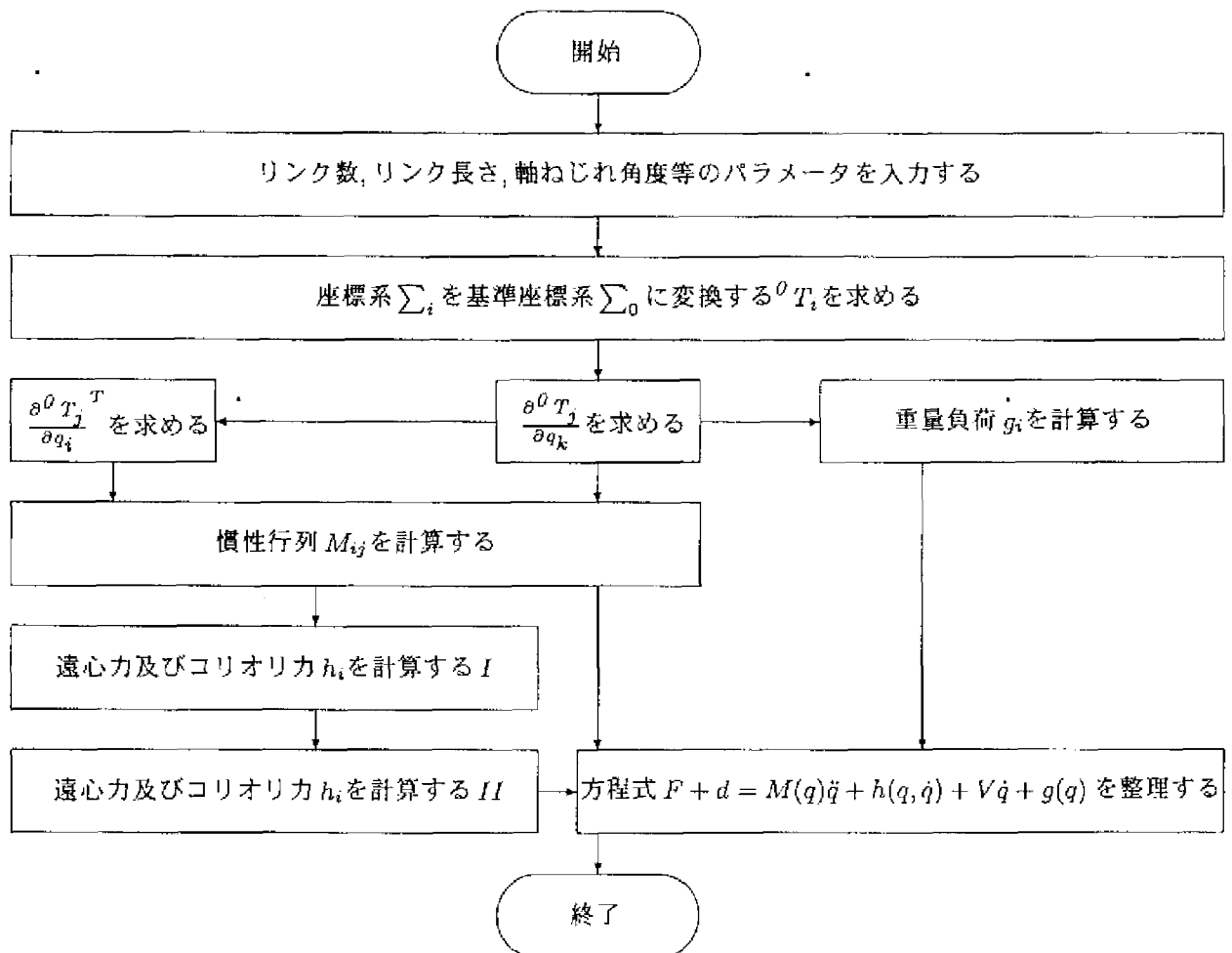


Fig.1 Flowchart of Program

Mathematica の方程式を構築するプログラミング以下のようなになる。

```

    (***** Link Parameter define for creat dynamics equation *****)
    LinkNumbers=3; リンク数
    ai0={0,0,l2}; リンク長さ
    di0={0,0,0}; 直動変数
    ali0={0,-Pi/2,0}; 軸ねじれ角度
    ti0={t1,t2,t3}; まわり角度変数
    mi0={m1,m2,m3}; リンク質量
    rGii={{0,0,lg1,0},{lg2,0,0,0},{lg3,0,0,0}}; リンク質量中心位置
    gT={{g},{0},{0},{0}}; 重力場ベクトル

    (***** Function define for using mathematica from formulation *****)
    Trotxa[alpha_]:={{1,0,0,0},{0,Cos[alpha_],-Sin[alpha_],0},{0,Sin[alpha_],Cos[alpha_],0},{0,0,0,1}};
    Ttransxa[ai_]:={{1,0,0,ai},{0,1,0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};
    Trotzo[theta_]:={{Cos[theta_],-Sin[theta_],0,0},{Sin[theta_],Cos[theta_],0,0},{0,0,1,0},{0,0,0,1}};
    Ttranszd[di_]:={{1,0,0,0},{0,1,0,0},{0,0,1,di},{0,0,0,1}};
  
```

```

Tat[alpha_i, ai, thetai, di] := Ttransxa[ai].Trotxa[alpha_i].Ttranszd[di].Trotzo[theta_i];
Ti[Ni_] := Tat[ai0[[Ni+1]], ai0[[Ni+1]], ti0[[Ni+1]], di0[[Ni+1]]];
Tij[Ni_, Nj_] := Simplify[(TS = IdentityMatrix[4];
    Do[ TS = TS.Ti[i], {i, Ni, Nj-1}];
    Return [TS]];
dtiT[Ni_, Nj_, Nk_] := D[Tij[Ni, Nj], ti0[[Nk]]];
TracePlus[ListA_] := Apply[Plus, Table[ListA[[i, i]], {i, 4}]];
Hki[i_] := {{rGii[[i, 1]], {rGii[[i, 2]], {rGii[[i, 3]], {1}}}};
Mij[Ni_, Nj_] := Simplify[Sum[TracePlus[dtiT[0, k, Nj].Hki[k].Transpose[dtiT[0, k, Ni]]], {k, Nj, LinkNumbers}]];
dtkMij[Ni_, Nj_, tk_] := D[Mij[Ni, Nj], ti0[[tk]]];
hijk[Ni_, Nj_, Nk_] := dtkMij[Ni, Nj, Nk] - (dtkMij[Nj, Nk, Ni])/2;
hi[Ni_] := Sum[Sum[hijk[Ni, j, k]*dti0[[j]]*dti0[[k]], {k, 1, LinkNumbers}], {j, 1, LinkNumbers}];
gi[Ni_] := -Sum[mi0[[j]]*Transpose[gT].dtiT[0, j, Ni].rGii[[j]], {j, Ni, LinkNumbers}];

```

(***** Function running output equation *****)

```

(*M(q)ij*)
For[j=1, j <= LinkNumbers, j++,
    For[i=1, i <= LinkNumbers, i++, Collect[Mij[i, j], {1, 1, 2, 3}]]
]

```

```

(*h(q, q)ij*)
For[j=1, j <= LinkNumbers, j++, hi[j]]

```

```

(*g(q)ij*)
For[j=1, j <= LinkNumbers, j++, gi[j]]

```

4. 実行例

この例には、3リンクマニピュレータに対して有効慣性項、相互慣性項、重力項を算出して、リンクパラメータは以下表を示すようになる

Table 1 Link Parameter

リンクパラメータ						
リンク	a_{i-1}	α_{i-1}	d_i	θ_i	m_i	l_{g_i}
1	0	0	0	θ_1	m_1	l_{g_1}
2	0	90	0	θ_2	m_2	l_{g_2}
3	l_2	0	0	θ_3	m_3	l_{g_3}

まずリンクパラメータより、プログラムを運転するによって、以下のような結果になる。

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \frac{l_{g_2}^2 m_2}{2} + \frac{l_{g_3}^2 m_3}{2} + \frac{l_{g_2}^2 m_2 \cos(2\theta_2)}{2} + l_2^2 \left(\frac{m_3}{2} + \frac{m_3 \cos(2\theta_2)}{2} \right) + \frac{l_{g_3}^2 m_3 \cos(2(\theta_2 + \theta_3))}{2} + \\
 &\quad l_2 (l_{g_3} m_3 \cos(\theta_3) + l_{g_3} m_3 \cos(2\theta_2 + \theta_3)) \\
 M_{12} &= M_{21} = 0 \\
 M_{13} &= M_{31} = 0 \\
 M_{22} &= l_{g_2}^2 m_2 + l_{g_3}^2 m_3 + l_2^2 m_3 + 2l_{g_3} l_2 m_3 \cos(\theta_3) \\
 M_{23} &= M_{32} = l_{g_3}^2 m_3 + l_{g_3} l_2 m_3 \cos(\theta_3) \\
 M_{33} &= l_{g_3}^2 m_3 \\
 h(q, \dot{q})_1 &= \frac{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (-2l_{g_2}^2 m_2 \sin(2\theta_2) - 2l_2^2 m_3 \sin(2\theta_2) - 2l_{g_3}^2 m_3 \sin(2(\theta_2 + \theta_3)) - 4l_{g_3} l_2 m_3 \sin(2\theta_2 + \theta_3))}{2} + \\
 &\quad \frac{\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_3 (-2l_{g_3} l_2 m_3 \sin(\theta_3) - 2l_{g_3}^2 m_3 \sin(2(\theta_2 + \theta_3)) - 2l_{g_3} l_2 m_3 \sin(2\theta_2 + \theta_3))}{2} \\
 h(q, \dot{q})_2 &= -2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 l_{g_3} l_2 m_3 \sin(\theta_3) - \\
 &\quad \frac{\dot{\theta}_3^2 (-2l_{g_2}^2 m_2 \sin(2\theta_2) - 2l_2^2 m_3 \sin(2\theta_2) - 2l_{g_3}^2 m_3 \sin(2(\theta_2 + \theta_3)) - 4l_{g_3} l_2 m_3 \sin(2\theta_2 + \theta_3))}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h(q, \dot{q})_3 &= \dot{\theta}_2^2 l_{g_3} l_2 m_3 \sin(\theta_3) - \frac{\dot{\theta}_1^2 (-2 l_{g_3} l_2 m_3 \sin(\theta_3) - 2 l_{g_3}^2 m_3 \sin(2(\theta_2 + \theta_3)) - 2 l_{g_3} l_2 m_3 \sin(2\theta_2 + \theta_3))}{4} \\
g_1 &= 0 \\
g_2 &= l_{g_2} m_2 g \cos(\theta_2) + l_{g_3} m_3 g \cos(\theta_2 + \theta_3) \\
g_3 &= l_{g_3} m_3 g \cos(\theta_2 + \theta_3)
\end{aligned}$$

以上結果を式 (20) ような整理して、マニピュレータの運動方程式は

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_1 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & 0 \\ 0 & 0 & V_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (25)$$

となる。

5. あとがき

このマニピュレータの運動方程式の構成方法は、各リンクの質量、質量中心位置、慣性テンソル、摩擦係力などのリンクパラメータから、運動方程式を導くことができる。設計効率が高く、かつ正確である。また、任意のリンクのパラメータでの設計が可能である。但し、6リンク以上計算するとき、パソコンのメモリが不足する。

参考文献

- 1) 吉田和信, 川辺尚志: 鉛直変動支点を持つ多自由度振子に対する可変ゲインフィードバック制御, 第35回 学術講演会予稿集, 105A-4, 125/126(1996)
- 2) 小菅一弘, 竹尾光治: テレオペレーションにおける仮想・実環境の統一のマニピュレーション, 第33回学術講演会予稿集, 308M-3, 687/688(1994)
- 3) ロボット工学ハンドブック, 日本ロボット学会, コロナ社, 192/230(1990)
- 4) 吉川恒夫 (編): ロボット制御基礎理論, コロナ社 (1988)
- 5) 伊藤宏司, 伊藤正美: 生体とロボットにおける運動制御, 計測自動制御学会, pp.135/140(1991)
- 6) 渡邊泰之: 三次元フリーフライング宇宙ロボットの実験的研究, From InterNet by Computer(1998)
- 7) Stephen Wolfram: The Mathematic Book Third Edition, Wolfram Research, Inc.(1998)
- 8) Paul, Richard P. Robot manipulators: Mathematics, Programming and Control, MIT Press, Cambridge, Mass.(1986)