

状態空間のファジィ分割による制御系の設計

A Design of Controller Using Fuzzy States Space Division

○坂田宗久, 大久保重範

○Munehisa Sakata, Sigenori Okubo

山形大学

Yamagata University

キーワード: 状態空間のファジィ分割 (fuzzy state space division), 線形化 (linearize),
ファジィモデル (fuzzy model), 安定解析 (stability analysis)

連絡先: 〒992 米沢市城南4-3-16 山形大学大学院 工学研究科 機械システム工学専攻 大久保研究室
坂田宗久, Tel.: (0238)26-3246, Fax.: (0238)24-6445, E-mail: hsakata@mip3470.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

制御器設計の目的は言うまでもなく制御系を安定化し、かつ、希望の応答を実現することである。よって、ファジィ制御器の設計においても、安定性の概念は欠かすことのできないものである。ファジィ制御の安定解析の方法としては様々な方法が行われており、主なところでは、ファジィ制御器を普通の制御と比較し論じている北村¹⁾や張、荒木²⁾らのルーリエ系の絶対安定問題や前田, 村上³⁾らのリミットサイクルを考慮した位相面での解析がある。また、田中、菅野⁴⁾はプラントのファジィモデル化により、リアプノフ関数を用いて安定解析を行っている。ファジィモデルとは、エキスパートがいないプラントを対象とする場合、あるいはオペレータより良い制御を目指すためにプラントの特性を *if-then* 形式で記述したものである。

本稿では、非線形モデルを各動作点まわりで線形近似し、ファジィ制御を用いてプラントへの

入力を滑らかに接続する。その際、ファジィモデルを用いたリアプノフの安定論を用いることにより、安定性を考慮した設計を行っている。

2. 問題の設定

f, g が t の陽なる関数とはならない(オートノマス)非線形システム

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + d \quad (1)$$

$$y(t) = g(x(t)) + d_o \quad (2)$$

について考える。 x_i, u_i を基準値として

$$x(t) = x_i + \Delta x(t) \quad (3)$$

$$u(t) = u_i + \Delta u(t) \quad (4)$$

$$(5)$$

とおくと、式(3)より

$$\dot{x}(t) = \Delta \dot{x}(t) \quad (6)$$

を得る。また $f(x(t), u(t))$ を x_i, u_i の近傍でテーラー展開すると

$$\begin{aligned} & f(x(t), u(t)) \\ &= f(x_i, u_i) \\ &+ \frac{1}{1!} \left\{ \Delta x(t) \frac{\partial}{\partial x} + \Delta u(t) \frac{\partial}{\partial u} \right\} f(x_i, u_i) \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ \Delta x(t) \frac{\partial}{\partial x} + \Delta u(t) \frac{\partial}{\partial u} \right\}^2 f(x_i, u_i) \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \Delta x(t) \frac{\partial}{\partial x} + \Delta u(t) \frac{\partial}{\partial u} \right\}^{(n-1)} \\ &\quad \times f(x_i, u_i) \\ &+ R_n \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!} \left\{ \Delta x(t) \frac{\partial}{\partial x} + \Delta u(t) \frac{\partial}{\partial u} \right\}^n \\ &\quad \times f\{x_i + \theta \Delta x(t), u_i + \theta \Delta u(t)\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$0 < \theta < 1$$

式(7)より高次項を切り捨て、式(6)を用いると

$$\begin{aligned} \Delta \dot{x}(t) &= \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x} \Delta x(t) + \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial u} \Delta u(t) \\ &\quad + f(x_i, u_i) + d \end{aligned} \quad (9)$$

を得る。同様に $y(t)$ についても以下の式で与えられる。

$$y(t) = \frac{\partial g(x_i)}{\partial x} \Delta x(t) + g(x_i) + d_o \quad (10)$$

$\Delta x(t), \Delta u(t)$ を消去すると

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x} (x(t) - x_i) \\ &\quad + \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial u} (u(t) - u_i) + f(x_i, u_i) + d \\ &= A_i(x(t) - x_i) + B_i(u(t) - u_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ f(x_i, u_i) + d \\ &= A_i x(t) + B_i u(t) + f(x_i, u_i) \\ &\quad + d - A_i x_i - B_i u_i \\ &= A_i x(t) + B_i u(t) + d_i \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\partial g(x_i)}{\partial x} (x(t) - x_i) + g(x_i) + d_o \\ &= C_i(x(t) - x_i) + g(x_i) + d_o \\ &= C_i x(t) + g(x_i) + d_o - C_i x_i \\ &= C_i x(t) + d_{oi} \end{aligned} \quad (12)$$

$A_i, B_i, C_i, d_i, d_{oi}$ はそれぞれ式(13) ~ (17)である。

$$A_i = \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial x} \quad (13)$$

$$B_i = \frac{\partial f(x_i, u_i)}{\partial u} \quad (14)$$

$$C_i = \frac{\partial g(x_i)}{\partial x} \quad (15)$$

$$d_i = d - A_i x_i - B_i u_i \quad (16)$$

$$d_{oi} = d_o - C_i x_i \quad (17)$$

ただし、 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial u}$ はヤコビ行列であり以下のように定義される。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix} \quad (19)$$

各行列の次元は以下のとおりである。

$$A_i \in R^{n \times n}, B_i \in R^{n \times m}, C_i \in R^{s \times n}$$

$$x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^s$$

次に式(11),(12)を用いて目標値を r としたとき、 $r - y \rightarrow 0$ となるサーボ系を設計する。 $\dot{v}(t)$ を次式のように定義する。

$$\dot{v}(t) = e = r - y(t) \quad (20)$$

$$= r - C_i x(t) \quad (21)$$

ここで e は偏差である。式(11),(21)より式(22)で表される状態方程式を得る。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} d_i \\ r \end{bmatrix} \quad (22)$$

$z(t), A_{si}, B_{si}, d_{si}$ を式(23)~(26)のように置き換えると、式(22)は式(27)となる。

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$A_{si} = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$B_{si} = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$d_{si} = \begin{bmatrix} d_i \\ r \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\dot{z}(t) = A_{si} z(t) + B_{si} u(t) + d_{si} \quad (27)$$

3. 設計及び安定解析

3.1 制御器の設計

ファジールールを後件部が関数型で表現される関数型推論法を用いる。

$$\text{if } z(t) \text{ is } D_i \text{ then } \begin{cases} \dot{z}(t) = A_{si} z(t) + B_{si} u(t) + d_{si} \\ y(t) = C_{si} z(t) \\ \text{and } u(t) = F_i z(t) \end{cases} \quad (28)$$

メンバーシップ関数を式(29)と定義する。

$$w_i(t) = \exp\{(z(t) - z_i)^T (z(t) - z_i)\} \quad (29)$$

$w_i(t)$ は時間 t に依存せず、時間 t での適合度を表している。入力の非ファジィ値 z^* が与えられたとき、

式(29)のメンバーシップ関数より各規則の適合度 $w_i(t)$ は式(30)で与えられる。

$$w_i(t) = \exp\{(z^* - z_i)^T (z^* - z_i)\} \quad (30)$$

ファジィ制御器からの出力は式(31)となる。

$$u(t) = \frac{\sum_{i=1}^l w_i(t) F_i z(t)}{\sum_{i=1}^l w_i(t)} \quad (31)$$

各動作点まわりで線形近似された $A_{si}, B_{si}, C_{si}, d_{si}$ を用いて足田の極配置によるレギュレーターの設計により、フィードバック係数 F_i を求める。

3.2 制御系の安定解析

プラントの特性を*if-then*形式で記述したファジィモデルを用いる。後件部には関数型を使用する。ファジィモデルの記述形式には、後件部が線形関数になっているのが最も適しているからである。ファジィラベルも使用可能だが、プラント法則の数が膨大になってしまう恐れがある。それはプラントは制御器に比べ、一般に次元が大きいからである。まず、一般的な安定解析の方法を説明する。プラントより以下のルールが得られたとする。

$$\text{if } z(t) \text{ is } D_i \text{ then } \begin{cases} \dot{z}(t) = A_{si} z(t) + B_{si} u(t) + d_{si} \\ y(t) = C_{si} z(t) \end{cases} \quad (32)$$

式(32)のルールで与えられている連続系のファジィモデルは式(33)で与えられる。ファジィモデルの前件部には状態変数のみが使われているものとする。すなわち、 $w_i(t)$ は状態変数のみに依存するものとする。

$$\dot{z}(t) = \frac{\sum_{i=1}^l w_i(t) \{A_{si} z(t) + B_{si} u(t)\}}{\sum_{i=1}^l w_i(t)} \quad (33)$$

ファジィ制御器のルールが式(28)で与えられたとするとファジィ制御系全体のモデルは式(31)を式(33)に代入して、式(34)で与えられる。

$$\dot{z}(t) = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(t)w_j(t)(A_{si} + B_{si}F_j)}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l w_i(t)w_j(t)} z(t) + \frac{\sum_{i=1}^l w_i(t)d_i}{\sum_{i=1}^l w_i(t)} \quad (34)$$

本稿では、ファジィモデルを以下のルールで与える。

$$\text{if } z(t) \text{ is } D_i \text{ then } \begin{cases} \dot{z}(t) = A_{si}z(t) + B_{si}u(t) + d_{si} \\ y(t) = C_{si}z(t) \\ \text{and } u(t) = F_i z(t) \end{cases} \quad (35)$$

これより、制御系全体のモデルは式(36)で与えられる。

$$\dot{z}(t) = \frac{\sum_{i=1}^l w_i(t)(A_{si} + B_{si}F_i)}{\sum_{i=1}^l w_i(t)} z(t) + \frac{\sum_{i=1}^l w_i(t)d_i}{\sum_{i=1}^l w_i(t)} \quad (36)$$

式(34)と式(36)の違いは、式(36)はファジィプラントに、直接、入力を組み込んだ系として考えていることである。これは、ファジィ制御からの入力のメンバーシップ値が $w_j(t) = 1$ の時のみを考えていることになる。しかし、ここで式(34)を変形していくと、式(37)で与えられる干渉項 G_{ij} の存在が問題となる。

$$G_{ij} = \frac{(A_i + B_i F_j) + (A_j + B_j F_i)}{2} \quad (37)$$

本来、干渉項は無視できない要素であるが、本稿では、安定解析の簡易化を考え、干渉項を無視するものとする。またメンバーシップ関数同士を可能な限り遠ざけることによって、干渉項を微小なものとして無視することも可能である。

$w_i(t)$ はファジィモデルの前件部のファジィ集合から求められる各規則の適合度であり、各時間 t で次の条件が成り立つものとする。

$$w_i(t) \geq 0 \quad (38)$$

$$\sum_{i=1}^l w_i(t) > 0 \quad (39)$$

$$i = 1, 2, \dots, l$$

リアプノフの直接法を用いれば、式(36)で表現されるファジィモデルが安定となるための十分条件は $\forall i \in \{1, 2, \dots, l\}$ に対して式(40)の条件を満たす共通の正定対称行列 P が存在することであり、ファジィシステムは大域的漸近安定となる。

$$(A_{si} + B_{si}F_{si})^T P + P(A_{si} + B_{si}F_i) < 0 \quad (40)$$

4. 磁気浮上車制御のシミュレーション

4.1 磁気浮上車のモデル

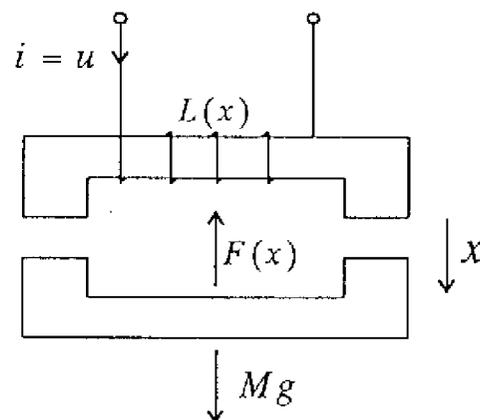


Fig. 1 Model of magnetic floating car

Fig.1は磁気浮上車を簡単に模擬したものである。

インダクタンスが,

$$L(x) = \frac{K}{x} \quad (41)$$

で与えられたとき、吸引力は

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} L(x) i^2 \right\} \\ &= \frac{K i^2}{2x^2} \end{aligned} \quad (42)$$

したがって、磁気浮上車の運動方程式は式(43)で与えられる。

$$M\ddot{x} + \frac{Ku^2}{2x^2} = Mg \quad (43)$$

平衡点を $x = x_o, u = u_o$ とすると

$$u_o = \sqrt{\frac{2Mgx_o^2}{K}} \quad (44)$$

これより、目標値を r 、外乱を d_i とした線形近似サーボ系は $x(t) = x_1(t), \dot{x}(t) = x_2(t)$ とすると式(45)で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{2g}{x_o} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{\frac{2gK}{Mx_o^2}} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ d_i \\ r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (45)$$

$$z(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad v(t)]^T \quad (46)$$

4.2 制御器の設計及び安定解析

設計及び制御についてはFig.2で示すモデルを、安定解析についてはFig.3で示すモデルをそれぞれ使用する。

各パラメータを $M = 1.0(kg), K = 320(Nm^2/A^2), g = 9.8(m/s^2)$ とする。平衡点を $x_{1o} = 10, 20, 30, 40(cm)$ と与えれば、 $A_{si}, B_{si}, d_{si}, F_i (i = 1 \sim 4)$ が求められる。それぞれの極は $[-2 \quad -4 \quad -6]$ とした。

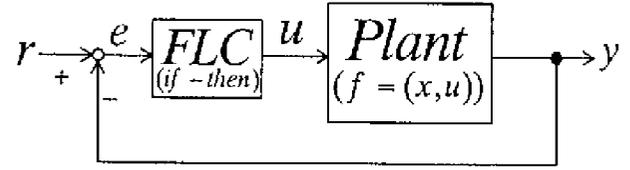


Fig. 2 General model in simulation

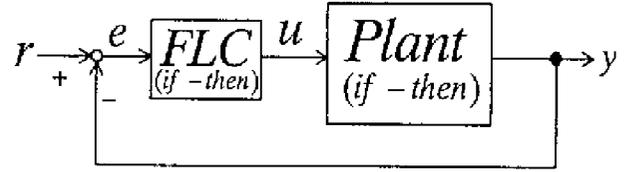


Fig. 3 Fuzzy model in stability analysis

$$i = 1, x_{1o} = 10(cm)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 196 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -792 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$F_1 = [0.3030 \quad 0.01515 \quad -0.0606] \quad (48)$$

$$i = 2, x_{1o} = 20(cm)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 98 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -396 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$F_2 = [0.3586 \quad 0.0303 \quad -0.1212] \quad (50)$$

$$i = 3, x_{1o} = 30(cm)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 65.3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -264 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$F_3 = [0.4140 \quad 0.04546 \quad -0.1818] \quad (52)$$

$$i = 4, x_{1o} = 40(cm)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 49 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -198 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$F_4 = [0.4697 \quad 0.06061 \quad -0.2424] \quad (54)$$

各点でのメンバーシップ関数 $w_i(t)$ を式(55) ~ (58) と定義し、Fig.4で図示する。

$$w_1(t) = \exp\{(x_1(t) - 10)^2\} \quad (55)$$

$$w_2(t) = \exp\{(x_1(t) - 20)^2\} \quad (56)$$

$$w_3(t) = \exp\{(x_1(t) - 30)^2\} \quad (57)$$

$$w_4(t) = \exp\{(x_1(t) - 40)^2\} \quad (58)$$

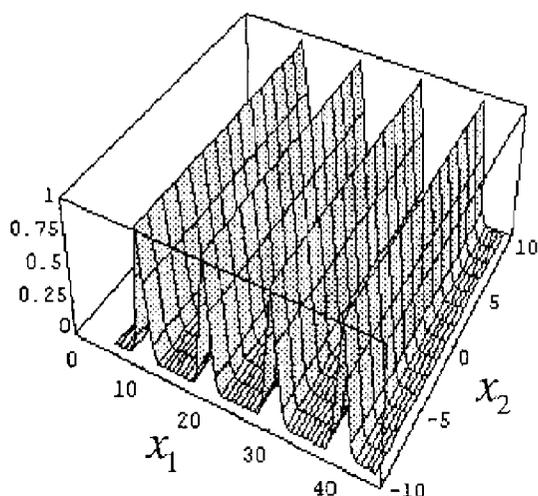


Fig. 4 Membership function

次にこのシステムの安定性について考える。このシステムが安定であるための条件は式(40)を満たす正定対称行列 P が存在することと等価である。本稿では P を以下の方法で求める。式(40)より

$$M_{si}^T P + P M_{si} = -Q \quad (59)$$

$$M_{si} = A_{si} + B_{si} F_{si} \quad (60)$$

Q は正定対称行列である。式(59)は2つの写像 η と θ を用いることにより式(61)のように変換できる。

$$\eta(M_{si})\theta(P) = -\eta(Q) \quad (61)$$

θ は全単射であるので、 $\eta(M_{si})$ が正則ならば P は式(62)で得ることができる。

$$P = \theta^{-1}[-\{\eta(M_{si})\}^{-1}\eta(Q)] \quad (62)$$

式(62)より式(40)の $i = 1 \sim 4$ を満たす共通の P を試行錯誤的に求めると式(63)で表される P を得る。

$$P = \begin{bmatrix} 5.05 & 0.153 & -5.74 \\ 0.153 & 0.0961 & -0.0104 \\ -5.74 & -0.0104 & 8.81 \end{bmatrix} \quad (63)$$

4.3 シミュレーション結果

Fig.5 ~ Fig.7 はファジィ制御による結果である。Fig.5 は目標値 r に対する応答であり、外乱 $d = 0$ である。時間 $t(s)$ の経過により r を以下のように与えた。

$$0 < t \leq 6 \quad r = 35(cm)$$

$$6 < t \leq 12 \quad r = 0.1(cm)$$

$$12 < t \leq 18 \quad r = 30(cm)$$

$$18 < t \leq 24 \quad r = 50(cm)$$

$$24 < t \leq 30 \quad r = 10(cm)$$

Fig.6 は $r = 25(cm)$ = 一定としたときの d に対する応答であり、 $8 < t \leq 25$ の間、 $d = 5.0(N)$ を、その他の時間では $d = 0$ を与え続けている。Fig.7 は目標値と外乱が混在したときの応答であり、目標値や外乱は Fig.5, Fig.6 と同じ条件である。いずれも初期条件として $x_1 = 30(cm)$, $x_2 = 0$ を与えている。

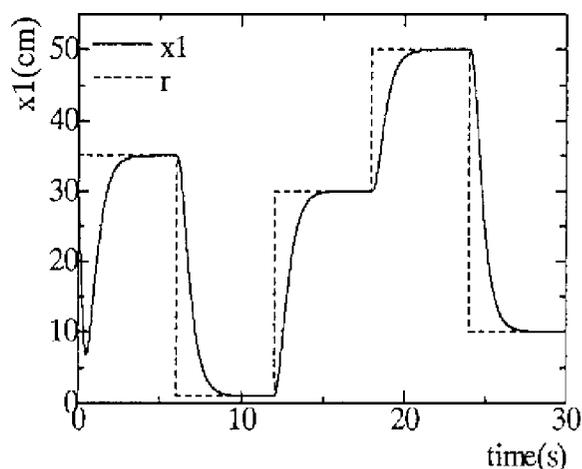


Fig. 5 Fuzzy control for reference

GAを用いた検索などが考えられる。

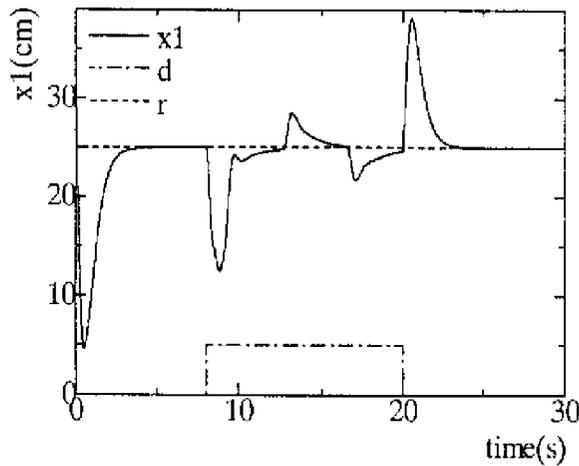


Fig. 6 Fuzzy control for disturbance

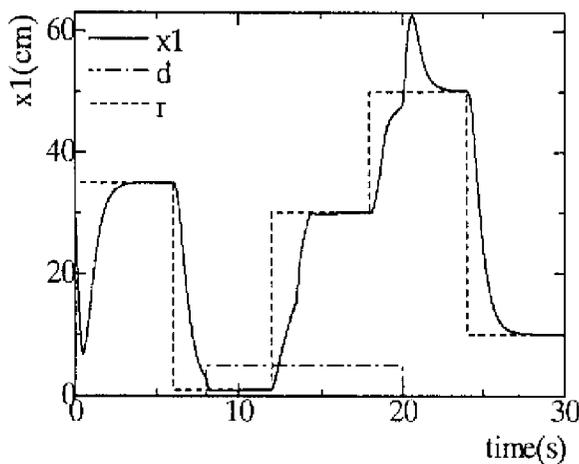


Fig. 7 Fuzzy control for reference and disturbance

5. おわりに

非線形モデルの線形化により、直接、入力を組み込んだif-then形式のファジィモデルを作成し、リアプノフ関数を用いた制御系の安定解析の簡易化を行った。その結果はFig.5 ~ Fig.7から分かるように、様々に変化する目標値や外乱に対して、安定した制御結果が得られた。本稿で示した安定解析の方法は、従来の方法に比べ簡易化されているが、それでも式(40)を満たす共通の正定対称行列Pを見つけるのは困難であり、これに関しては

参考文献

- 1) 北村: ファジィルール制御系の絶対安定条件, 第5回ファジィシステムシンポジウム, pp.505-508(1989)
- 2) 張, 荒木: ファジィ制御系の安定性の十分条件, 第33回自動制御連合講演会, pp.149-152(1990)
- 3) 前田, 村上: 位相面を用いたファジィ制御系の安定解析, 日本ファジィ学会誌3-2, pp.329-338(1991)
- 4) 田中, 菅野: ファジィ制御系の解析と設計に関する一考察, 第5回ファジィシステムシンポジウム, pp.127-132(1989)
- 5) 小松崎, 王: ファジィ理論をもちいたレギュレータ問題, 計測自動制御学会第30回学術講演会, pp.327-328(1991)
- 6) 日本ファジィ学会: 講座ファジィ5 ファジィ制御, 日刊工業新聞社(1993)
- 7) 田中一男: アドバンストファジィ制御, 共立出版株式会社(1994)
- 8) 菅野道夫: ファジィ制御, 日刊工業新聞社(1987)