計測自動制御学会東北支部第177回研究集会
資料番号177－8

むだ時間系のモデル追従形制御系設計

秋山 孝夫 (山形大)
大久保 重範 (山形大)

Design of the Model Following Control System with Time Delays

Takao Akiyama, Shigenori Okubo (Yamagata University)

キーワード: むだ時間(time delay), モデル追従形制御系(model following control system), 内部状態(inner states), 有界性(boundedness), 外乱(disturbances)

1. 緒 言

制御対象とする産業システムの中にはむだ時間を含んだ系がしばしば存在する．例えば，製鉄プロセスにおける連続焼鈍プロセスの板温制御[1]や化学プロセスの液液抽出装置[2]，蒸留装置[3]等が挙げられる．制御システムにむだ時間が存在すると，目標入力に対する追従性や外乱抑制性の劣化，安定性を損なう等の問題を招くことにもなり，これまでにむだ時間を補償する様々な制御手法が提案されている．スミス法[4]，状態予測制御[5~9]，部分極配置法[10]，有限極配置法[11~15]，H^∞制御[16]，離散時間化制御[17,18]，適応制御[19]等は代表的な方法であり，文献(20)にはこれらの制御系設計法が体系化されて記述されている．これらの研究の多くは，レギュレータ問題やサーボ系設計問題，最適制御問題等を扱っているが，著者らが知る限り，むだ時間を含むシステムのモデル追従形制御系の設計に関する研究は，まだ少なく不十分である．

そこで，本論文では大久保[21]が提案したモデル追従形制御系の設計手法を拡張し，外乱を考慮したむだ時間を含む線形システムに対するモデル追従形制御系の設計を考察した．まず，制御対象となるむだ時間システムおよび参照モデルの設定を行い，制御則の詳細な構成手順を示した．さらに，制御システムの内部安定性を示し，本設計法の実用性を保証した．最後に，具体的な数値例に基づき，外乱が存在する場合でも制御対象の出力は参照モデルに漸近的に追従することを確認した．

2. 問題の設定

入出力と状態にむだ時間を含む制御対象（プラント）および参照モデルをそれぞれ次式(1)と(2)で表す．

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=0}^{k} A_i x(t-h_i) + \sum_{i=0}^{k} B_i u(t-h_i) + d(t),\\ y(t) &= \sum_{i=0}^{k} C_i x(t-h_i) + d_o(t)\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_m &= A_m x_m(t) + B_m r_m(t),\\ y_m(t) &= C_m x_m(t)\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ここで，$x(t)\in R^n$ は状態変数，$u(t)\in R^l$ は制御入力，$y(t)\in R^l$ は制御対象の出力，$d(t)\in R^n$，$d_o(t)\in R^l$ は有界な外乱，$h_i\,(0=h_0<h_1<\cdots<h_k)$ はむだ時間，$x_m(t)\in R^{n_m}$，$r_m(t)\in R^{l_m}$，$y_m(t)\in R^l$ はそれぞれ参照モデルに関する状態，参照入力，出力である．A_i，B_i，C_i，A_m，B_m，C_m はそれぞれ適合する次元の実数定数行列であり，(A_m, B_m) 可制御，(C_m, A_m) 可観測，A_m は安定行列とする．制御対象で利用可能な状態は $y(t)$ のみであり，内部状態 $x(t)$ は直接入手できないものとする．また，制御対象と参照モデルとの出力誤差 $e(t)$ は次式で与えられる．

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \qquad (3)$$

本研究では，初期値関数 $x(t)=x_0(t)\ (t\le 0)$，$u(t)=u_0(t)\ (t\le 0)$ に対し，$t\to\infty$ で $e(t)\to o$ にするようなモデル追従形制御系の設計を考える．

3．制御系の設計

式(1)の記述を簡単にするために，次式で定義される形式的な時間遅れ作用素ベクトル σ を導入する．

$$\left.\begin{aligned}&\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_k)^T,\\ &\left.\begin{aligned}\sigma_i z(t) &= z(t-h_i),\\ \sigma_i &= e^{-ph_i}\end{aligned}\right\}\ (i=0,1,\cdots,k)\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ただし，$\sigma_0=1$ であり，実際のむだ時間作用素は $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k$ である．また，$p=d/dt$ とする．式(4)を利用して制御対象の状態方程式および出力方程式(1)を書き換えれば，次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\sigma)x(t) + B(\sigma)u(t) + d(t),\\ y(t) &= C(\sigma)x(t) + d_o(t)\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

ここで，

$$A(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} A_i\sigma_i,\ B(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} B_i\sigma_i,\ C(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} C_i\sigma_i \qquad (6)$$

であり，$\{A(\sigma), B(\sigma)\}$ スペクトル可制御，$\{C(\sigma), A(\sigma)\}$ スペクトル可観測とし，$C(\sigma)\{pI-A(\sigma)\}^{-1}B(\sigma)$ の不変零点は安定であるものとする．式(5)と(2)から $y(t)$ と $y_m(t)$ はそれぞれ次式のように表される．

$$\begin{aligned}y(t) &= C(\sigma)\{pI-A(\sigma)\}^{-1}B(\sigma)u(t)\\ &\quad + C(\sigma)\{pI-A(\sigma)\}^{-1}d(t) + d_o(t)\end{aligned} \qquad (7)$$

$$y_m(t) = C_m(pI-A_m)^{-1}B_m r_m(t) \qquad (8)$$

式(７)と(８)において

$$\left.\begin{aligned} &C(\sigma)\{pI - A(\sigma)\}^{-1}B(\sigma) = N(\sigma,p)/D(\sigma,p), \\ &N(\sigma,p) = C(\sigma)adj\{pI - A(\sigma)\}B(\sigma) \in R^{l\times l}[\sigma], \\ &D(\sigma,p) = |pI - A(\sigma)|, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} &C_m(pI - A_m)^{-1}B_m = N_m(p)/D_m(p), \\ &N_m(p) = C_m adj(pI - A_m)B_m \in R^{l_m \times l_m}, \\ &D_m(p) = |pI - A_m| \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

とおけば，式(７)と(８)は式(11)と(12)のようになる．ただし，式(９)の$N(\sigma,p)$の各要素は，明らかにσの多項式を係数とするpに関する多項式となり，これを$R^{l\times l}[\sigma]$と表すことにする．また，$D(\sigma,p) \in R[\sigma]$である．外乱はまとめて式(13)のようになる．

$$D(\sigma,p)y(t) = N(\sigma,p)u(t) + w(t) \tag{11}$$

$$D_m(p)y_m(t) = N_m(p)r_m(t) \tag{12}$$

$$w(t) = C(\sigma)adj\{pI - A(\sigma)\}d(t) + D(\sigma,p)d_0(t) \tag{13}$$

設計の都合上，$N(\sigma,p)$と$N_m(p)$をそれぞれ次式(14)と(15)の形式で表す．

$$\left.\begin{aligned} &N(\sigma,p) = diag(p^{\eta_i})N_r(\sigma) + \tilde{N}(\sigma,p),\ (i = 1,2,\cdots,l) \\ &N_r(\sigma) = diag(\sigma_{\min_i})\hat{N}_r + \bar{N}_r(\sigma) \in R^{l\times l}[\sigma], \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$N_m(p) = diag(p^{\eta_{m_i}})N_{m_r} + \tilde{N}_m(p),\ (i = 1,2,\cdots,l) \tag{15}$$

ここで，η_iは$N(\sigma,p)$の各行のpに関する次数（最高次数）を表し，η_{m_i}は$N_m(p)$の各行の次数（最高次数）である．また，$\partial_{r_i}\tilde{N}(\sigma,p) < \eta_i$，$\partial_{r_i}\tilde{N}_m(p) < \eta_{m_i}$（$\partial_{r_i}(\bullet)$は$(\bullet)$の各行の$p$に関する多項式の次数を表す）である．$N_r(\sigma)$は明らかに$\sigma$に関する多項式を要素とする行列となり，$\sigma_{\min_i}$は各行の実際に存在する　の中で添字が最小のもの（対応するむだ時間の大きさが最小のもの）を表すとともに，$\bar{N}_r(\sigma)$には$\sigma_{\min_i}$が含まれていないこととする．$\hat{N}_r$は$l\times l$の定数行列であり，$|\hat{N}_r| \neq 0$であるとする．また，外乱$d(t)$，$d_o(t)$は

$$\left.\begin{aligned} &D_d(p)d(t) = o,\ D_d(p)d_o(t) = o, \\ &\partial D_d(p) = n_d \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

を満たすものとする．$D_d(p)$は既知のモニックな多項式であり，外乱のモードを与える．従って，$w(t)$は次式を満足する．

$$D_d(p)w(t) = o \tag{17}$$

次に，ρ次（$\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \eta_i$）のモニックで安定な多項式$T(p)$を選び，次式より$p$に関する多項式$R(\sigma,p)$と$S(\sigma,p)$を求める．

$$T(p)D_m(p) = D_d(p)D(\sigma,p)R(\sigma,p) + S(\sigma,p) \tag{18}$$

ここで，各多項式の次数は$\partial T(p) = \rho$，$\partial D_m(p) = n_m$，$\partial D_d(p) = n_d$，$\partial D(\sigma,p) = n$，$\partial R(\sigma,p) = \rho + n_m - n_d - n$，$\partial S(\sigma,p) \leq n_d + n - 1$である．

［補題１］　式(18)を満足するpに関する多項式$R(\sigma,p)$と$S(\sigma,p)$の各係数はσの多項式となる．　□

［証明］　$T(p)$，$D_m(p)$，$D_d(p)$および$D(\sigma,p)$はそれぞれモニックな多項式であることから，$T(p)D_m(p)$と$D_d(p)D(\sigma,p)$は共にモニックな多項式となり，次式のように記述できる．

$$\begin{aligned} T(p)D_m(p) = {}& p^{\rho+n_m} + \alpha_1 p^{\rho+n_m-1} + \alpha_2 p^{\rho+n_m-2} + \cdots \\ & + \alpha_{\rho+n_m-1}p + \alpha_{\rho+n_m} \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} D_d(p)D(\sigma,p) = {}& p^{n_d+n} + \beta_1(\sigma)p^{n_d+n-1} + \beta_2(\sigma)p^{n_d+n-2} \\ & + \cdots + \beta_{n_d+n-1}(\sigma)p + \beta_{n_d+n}(\sigma) \end{aligned} \tag{20}$$

ここで，$\alpha_i (i = 1,2,\cdots,\rho + n_m)$は定数，$\beta_i(\sigma)$ $(i = 1,2,\cdots, n_d + n)$は$\sigma$の多項式である．また，$R(\sigma,p)$と$S(\sigma,p)$をそれぞれ次のように書き表す．

$$\begin{aligned} R(\sigma,p) = {}& \gamma_0(\sigma)p^{\rho+n_m-n_d-n} + \gamma_1(\sigma)p^{\rho+n_m-n_d-n-1} + \cdots \\ & + \gamma_{\rho+n_m-n_d-n-1}(\sigma)p + \gamma_{\rho+n_m-n_d-n}(\sigma) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} S(\sigma,p) = {}& \delta_0(\sigma)p^{n_d+n-1} + \delta_1(\sigma)p^{n_d+n-2} + \cdots \\ & + \delta_{n_d+n-2}(\sigma)p + \delta_{n_d+n-1}(\sigma) \end{aligned} \tag{22}$$

ここで，$\gamma_i(\sigma)(i = 0,1,\cdots,\rho + n_m - n_d - n)$，$\delta_i(\sigma)$ $(i = 0,1,\cdots, n_d + n - 1)$はそれぞれ$\sigma$の関数である．式(20)～(22)から$D_d(p)D(\sigma,p)R(\sigma,p) + S(\sigma,p)$を求めれば，次のようになる．

$$\begin{aligned} & D_d(p)D(\sigma,p)R(\sigma,p) + S(\sigma,p) = \\ & \quad \Gamma_0(\sigma)p^{\rho+n_m} + \Gamma_1(\sigma)p^{\rho+n_m-1} + \Gamma_2(\sigma)p^{\rho+n_m-2} + \cdots \\ & \quad + \Gamma_{\rho+n_m-n_d-n}(\sigma)p^{n_d+n} + \Gamma_{\rho+n_m-n_d-n+1}(\sigma)p^{n_d+n+1} \\ & \quad + \Gamma_{\rho+n_m-n_d-n+2}(\sigma)p^{n_d+n+2} + \cdots + \Gamma_{\rho+n_m-1}(\sigma)p + \Gamma_{\rho+n_m}(\sigma) \end{aligned} \tag{23}$$

ここで，各係数は

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_0(\sigma) = \gamma_0(\sigma), \\ &\Gamma_1(\sigma) = \gamma_1(\sigma) + \beta_1(\sigma)\gamma_0(\sigma), \\ &\Gamma_2(\sigma) = \gamma_2(\sigma) + \beta_1(\sigma)\gamma_1(\sigma) + \beta_2(\sigma)\gamma_0(\sigma), \\ &\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Gamma_{\rho+n_m-n_d-n}(\sigma) = \gamma_{n_d+n}(\sigma) + \beta_1(\sigma)\gamma_{n_d+n-1}(\sigma) \\ &\quad + \beta_2(\sigma)\gamma_{n_d+n-2}(\sigma) + \cdots + \beta_{n_d+n}(\sigma)\gamma_0(\sigma), \\ &\Gamma_{\rho+n_m-n_d-n+1}(\sigma) = \beta_1(\sigma)\gamma_{n_d+n}(\sigma) + \beta_2(\sigma)\gamma_{n_d+n-1}(\sigma) \\ &\quad + \cdots + \beta_{n_d+n}(\sigma)\gamma_1(\sigma) + \delta_0(\sigma), \\ &\Gamma_{\rho+n_m-n_d-n+2}(\sigma) = \beta_2(\sigma)\gamma_{n_d+n}(\sigma) + \beta_3(\sigma)\gamma_{n_d+n-1}(\sigma) \\ &\quad + \cdots + \beta_{n_d+n}(\sigma)\gamma_2(\sigma) + \delta_1(\sigma), \\ &\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\Gamma_{\rho+n_m-1}(\sigma) = \beta_{n_d+n-1}(\sigma)\gamma_{\rho+n_m-n_d-n}(\sigma) \\ &\quad + \beta_{n_d+n}(\sigma)\gamma_{\rho+n_m-n_d-n-1}(\sigma) + \delta_{n_d+n-2}(\sigma), \\ &\Gamma_{\rho+n_m}(\sigma) = \beta_{n_d+n}(\sigma)\gamma_{\rho+n_m-n_d-n}(\sigma) + \delta_{n_d+n-1}(\sigma) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

である．式(19)と(23)の係数を等置すれば，$\gamma_i(\sigma)$ $(i = 0,1,\cdots, \rho + n_m - n_d - n)$と$\delta_i(\sigma)$ $(i = 0,1,\cdots,n_d + n - 1)$が順次求められ，$\beta_i(\sigma)$ $(i = 1,2,\cdots,n_d + n)$はσの多項式であることに注意すれば，これらは全てσの多項式となることは明らかである．

（証明終）

式(３)と(18)および(12)を考慮すれば，$e(t)$は次のように求められる．

$$\begin{aligned} T(p)D_m(p)e(t) = {}& D_d(p)D(\sigma,p)R(\sigma,p)y(t) \\ & + S(\sigma,p)y(t) - T(p)N_m(p)r_m(t) \end{aligned} \tag{25}$$

さらに，式(11)と(17)を利用すれば，$e(t)$は次のように記述される．

$$
\begin{aligned}
T(p)D_m(p)e(t) = \{&D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,p) \\
&-Q(p)N_r(\sigma)\}u(t) + Q(p)N_r(\sigma)u(t) \\
&+S(\sigma,p)y(t) - T(p)N_m(p)r_m(t)
\end{aligned}
\tag{26}
$$

ここで，$Q(p)$ は $|Q(p)|$ が安定多項式であるような多項式行列であり，次式のように表す．

$$
Q(p) = diag(p^{\rho+n_m-n+\eta_i}) + \tilde{Q}(p), \quad (i=1,2,\cdots,l) \tag{27}
$$

ただし，$\partial_{r_i}\tilde{Q}(p) < \rho + n_m - n + \eta_i$ である．式(26)において $T(p)D_m(p)e(t) = o$ となるように式(26)の右辺を o と置けば，$\left|\hat{N}_r\right| \neq 0$ に注意して $u(t)$ は次式のように求められる．

$$
\begin{aligned}
u(t) = &-\hat{N}_r^{-1}diag(\sigma_{\min_i}^{-1})\overline{N}_r(\sigma)u(t) - \hat{N}_r^{-1}diag(\sigma_{\min_i}^{-1}) \\
&\cdot Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,p) - Q(p)N_r(\sigma)\}u(t) \\
&-\hat{N}_r^{-1}diag(\sigma_{\min_i}^{-1})Q(p)^{-1}S(\sigma,p)y(t) \\
&+\hat{N}_r^{-1}diag(\sigma_{\min_i}^{-1})Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

式(28)の各行列要素の分数式が proper であるためには，次の条件 ① $\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \eta_i \ (i=1,2,\cdots,l)$，② $n_m - \eta_{m_i} \geq n - \eta_i \ (i=1,2,\cdots,l)$ を満足しなければならない．さらに，次の関係式

$$
\left.
\begin{aligned}
&\hat{N}_r^{-1}dag(\sigma_{\min_i}^{-1})\overline{N}_r(\sigma) = E_0(\sigma_i^*), \\
&\hat{N}_r^{-1}dag(\sigma_{\min_i}^{-1})Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,p) \\
&\quad -Q(p)N_r(\sigma)\} = H_1(\sigma_i^*)(pI-F_1)^{-1}G_1, \\
&\hat{N}_r^{-1}dag(\sigma_{\min_i}^{-1})Q(p)^{-1}S(\sigma,p) \\
&\quad = E_2(\sigma_i^*) + H_2(\sigma_i^*)(pI-F_2)^{-1}G_2, \\
&\hat{N}_r^{-1}dag(\sigma_{\min_i}^{-1})Q(p)^{-1}T(p)N_m(p) \\
&\quad = E_3 + H_3(pI-F_3)^{-1}G_3, \\
&\sigma_i^* = \sigma\sigma_{\min_i}^{-1}, \ (i=1,2,\cdots,l)
\end{aligned}
\right\}
\tag{29}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1(t) &= F_1\xi_1(t) + G_1u(t), \\
\dot{\xi}_2(t) &= F_2\xi_2(t) + G_2y(t), \\
\dot{\xi}_3(t) &= F_3\xi_3(t) + G_3r_m(t)
\end{aligned}
\right\}
\tag{30}
$$

$$
|pI - F_i| = |Q(p)|, \ (i=1,2,3) \tag{31}
$$

を利用すれば，式(28)は状態変数フィルタ $\xi_i(t)$ $(i=1,2,3)$ を用いて次のように書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
u(t) = &-E_0(\sigma_i^*)u(t) - H_1(\sigma_i^*)\xi_1(t) - E_2(\sigma_i^*)y(t) \\
&-H_2(\sigma_i^*)\xi_2(t) + u_m(t)
\end{aligned}
\tag{32}
$$

ここで，外生信号 $u_m(t)$ は

$$
u_m(t) = E_3r_m(t) + H_3\xi_3(t) \tag{33}
$$

であり，(F_i, G_i) $(i=1,2,3)$ は可制御実現であるとする．式(29)において，$N_r(\sigma) \in R^{l \times l}[\sigma]$，$\overline{N}_r(\sigma) \in R^{l \times l}[\sigma]$，$R(\sigma,p) \in R[\sigma]$，$S(\sigma,p) \in R[\sigma]$ を考慮すれば，$E_i(\sigma_i^*)$ $(i=0,2)$ および $H_i(\sigma_i^*)$ $(i=1,2)$ は明らかに σ_i^* の多項式を要素とする定数行列となる．ここで，σ_i^* は

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_i^* = (1, \exp(-ph_{1_i}^*), \exp(-ph_{2_i}^*), \cdots, \exp(-ph_{j_i}^*))^T \\
&0 < h_{1_i}^* < h_{2_i}^* < \cdots < h_{j_i}^*, \quad j \leq k
\end{aligned}
\right\}
$$

となり，形式的な時間遅れ作用素ベクトルを表す．また，$E_0(\sigma_i^*)$ には定数項が含まれていない．したがって，式(32)の右辺は過去の入力信号 $u(t)$，現在あるいは過去の状態変数フィルタ $\xi_i(t)$ $(i=1,2)$ および出力信号 $y(t)$，現在の外生信号 $u_m(t)$ で構成されている．式(32)の $u(t)$ は $e(t) \to o$ $(t \to \infty)$ を満足するから，制御系を構成する内部状態が有界であれば，モデル追従形制御系が実現できる．

4．内部状態の安定性の解析

制御系に対して外部から入る信号は参照入力 $r_m(t)$ と外乱 $d(t)$，$d_o(t)$ であるが，これらはすべて有界であるものとする．外乱の特性多項式 $D_d(p)$ は一般に複素右半平面に根を有するが，式(16)は時間の有限区間で成立するものであり，$d(t)$ と $d_o(t)$ は有界であるものとする．制御系全体の挙動をまとめると次のようになる．

$$
\left.
\begin{aligned}
&\dot{x}(t) = A(\sigma)x(t) + B(\sigma)u(t) + d(t), \\
&\dot{\xi}_1(t) = F_1\xi_1(t) + G_1u(t), \\
&\dot{\xi}_2(t) = F_2\xi_2(t) + G_2y(t), \\
&\dot{\xi}_3(t) = F_3\xi_3(t) + G_3r_m(t), \\
&u(t) = -E_0(\sigma_i^*)u(t) - H_1(\sigma_i^*)\xi_1(t) - E_2(\sigma_i^*)y(t) \\
&\quad -H_2(\sigma_i^*)\xi_2(t) + u_m(t), \\
&u_m(t) = E_3r_m(t) + H_3\xi_3(t), \\
&y(t) = C(\sigma)x(t) + d_o(t), \\
&\dot{x}_m(t) = A_mx_m(t) + B_mr_m(t), \\
&y_m(t) = C_mx_m(t)
\end{aligned}
\right\}
\tag{34}
$$

式(34)において $|Ip - F_3| = |Q(p)|$ が安定な多項式であり，かつ $r_m(t)$ が有界であるため，$\xi_3(t)$ は有界となる．また，初期値関数 $x(t) = x_0(t)$ $(t \leq 0)$，$u(t) = u_0(t)$ $(t \leq 0)$，$\xi_i(t) = \xi_i^0$ $(t \leq 0)$ $(i=1,2)$ は有界とする．式(34)から $y(t)$ を消去するとともに $z_s(t)^T = [x(t)^T, \xi_1(t)^T, \xi_2(t)^T, u(t)^T]$ とおいて有界性の解析に必要な部分をまとめれば，次式を得る．

$$
E\dot{z}_s(t) = A_s(\sigma,\sigma_i^*)z_s(t) + d_s(t) \tag{35}
$$

ここで，

$$
\left.
\begin{aligned}
&E = \begin{bmatrix} I & O & O & O \\ O & I & O & O \\ O & O & I & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}, \\
&A_s(\sigma,\sigma_i^*) = \\
&\begin{bmatrix}
\{A(\sigma) - B(\sigma)E_2(\sigma_i^*)C(\sigma)\} & -B(\sigma)H_1(\sigma_i^*) & -B(\sigma)H_2(\sigma_i^*) & -B(\sigma)E_0(\sigma_i^*) \\
-G_1E_2(\sigma_i^*)C(\sigma) & \{F_1 - G_1H_1(\sigma_i^*)\} & -G_1H_2(\sigma_i^*) & -G_1E_0(\sigma_i^*) \\
G_2C(\sigma) & O & F_2 & O \\
-E_2(\sigma_i^*)C(\sigma) & -H_1(\sigma_i^*) & -H_2(\sigma_i^*) & -\{I + E_0(\sigma_i^*)\}
\end{bmatrix}, \\
&d_s(t) = \\
&\begin{bmatrix} B(\sigma) \\ G_1 \\ O \\ I \end{bmatrix} u_m(t) + \begin{bmatrix} d(t) - B(\sigma)E_2(\sigma_i^*)d_o(t) \\ -G_1E_2(\sigma_i^*)d_o(t) \\ G_2d_o(t) \\ -E_2(\sigma_i^*)d_o(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}
\right\}
\tag{36}
$$

式(35)の安定性を論ずるために，特性多項式 $\left|pE - A_s(\sigma_i^*)\right|$ を計算すれば，次のようになる（付録参照）．

$$\left|pE - A_s(\sigma,\sigma_i^*)\right| = T(p)^l D_m(p)^l \left|Q(p)\right| \frac{\left|\hat{N}_r\right|^{-1}\left|diag(\sigma_{\min_i}{}^{-1})\right|\left|N(\sigma,p)\right|}{D(\sigma,p)^{l-1}} \tag{37}$$

さらに，$C(\sigma)\{pI - A(\sigma)\}^{-1}B(\sigma)$ の不変零点の多項式を $V_s(\sigma,p)$（$\in R[\sigma]$）とおけば，

$$\left|N(\sigma,p)\right| = D(\sigma,p)^{l-1}V_s(\sigma,p) \tag{38}$$

となることから，式(37)は次式のようになる．

$$\left|pE - A_s(\sigma,\sigma_i^*)\right| = \left|\hat{N}_r\right|^{-1}\left|diag(\sigma_{\min_i}{}^{-1})\right| T(p)^l D_m(p)^l \left|Q(p)\right| V_s(\sigma,p) \tag{39}$$

式(39)右辺の各 p に関する多項式は恒等的にゼロとはならないため

$$\left|pE - A_s(\sigma,\sigma_i^*)\right| \neq 0, \forall p \tag{40}$$

となって解の一意性を保証するレギュラー条件は満足されている．さらに，式(36)の E の階数および式(39)の p に関する多項式としての次数を求めれば，

$$\operatorname{rank} E = \deg\left|pE - A_s(\sigma,\sigma_i^*)\right| = n + 2(\rho + n_m - n)l + 2\sum_{i=1}^{l}\eta_i \tag{41}$$

を満足することから $z_s(t)$ は指数関数モードのみで表されることがわかる．そこで，式(39)において $T(p)$，$D_m(p)$，$\left|Q(p)\right|$ は安定多項式であり，$V_s(\sigma,p)$ が安定ならば，$A_s(\sigma,\sigma_i^*)$ は安定なシステム行列となる．よって，$z_s(t)$ の有界性が証明された．一般に，$V_s(\sigma,p)$ の安定判別はナイキストの安定判別法，ルーシェの定理，根軌跡法等を利用する．特に，$V_s(\sigma,p)$ が σ のみに関する多項式 $V_{s1}(\sigma)$ と p のみに関する多項式 $V_{s2}(p)$ の積

$$V_s(\sigma,p) = V_{s1}(\sigma)V_{s2}(p) \tag{42}$$

に分解可能で，$V_{s1}(\sigma)$ と $V_{s2}(p)$ が共に安定多項式ならば，$V_s(\sigma,p)$ は安定である．なお，$V_{s1}(\sigma)$ が安定多項式であるための条件は，$V_{s1}(\sigma) = 0$ の根 σ_i が全て $\left|\sigma_i\right| > 1$ を満足することである．

以上の議論をまとめれば，次の定理を得る．

［定理1］ 任意のむだ時間 h_i（$0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_k$）を含む制御対象を次式

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma)x(t) + B(\sigma)u(t) + d(t), \\ y(t) &= C(\sigma)x(t) + d_o(t), \\ \sigma &= (1, e^{-ph_1}, e^{-ph_2}, \cdots, e^{-ph_k})^T \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

で表す．ここで，$x(t) \in R^n$，$u(t) \in R^l$，$y(t) \in R^l$ である．この制御系において次の条件を満たすとする．

（1）$\{A(\sigma), B(\sigma)\}$ スペクトル可制御，$\{C(\sigma), A(\sigma)\}$ スペクトル可観測で，かつ $C(\sigma)\{pI - A(\sigma)\}^{-1}B(\sigma)$ の不変零点は複素左半平面に存在するものとする．

（2）制御対象の分子多項式行列

$$\left.\begin{aligned} N(\sigma,p) &= diag(p^{\eta_i})N_r(\sigma) + \tilde{N}(\sigma,p), \ (i = 1,2,\cdots,l), \\ N_r(\sigma) &= diag(\sigma_{\min_i})\hat{N}_r + \bar{N}_r(\sigma) \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

において，$\hat{N}_r$ が正則である．

（3）外乱 $d(t)$，$d_o(t)$ および参照モデルの参照入力 $r_m(t)$ が有界である．

このような条件下で第3章による方法でモデル追従形制御系を設計すれば，その内部状態が有界でかつ $y(t)$ が参照モデル出力 $y_m(t)$ に漸近的に追従する制御系が実現できる． □

6. 結 言

本稿では，外乱が作用する場合の入出力および状態に任意のむだ時間が含まれる線形システムに対してモデル追従形制御系の設計法を提案した．さらに，具体的な数値例に本設計法を適用し，制御入力を求めるとともに外乱が入った場合でもプラント出力が参照モデルに漸近的に追従する状態の数値シュミレーションを行った．本方法では，むだ時間に対応する時間遅れ作用素ベクトル σ および時刻に関する微分作用素 p を導入し，σ と p に関する多項式行列の簡単な代数演算で制御系が設計できる．本稿の設計方法は，制御対象に含まれるむだ時間を任意としていること，外乱の影響を除去できる機能を有すること，内部状態の有界性が保証されること，設計計算が簡単であること等の優れた特徴を持っている．

文 献

(1) 高橋・中川・一宮:「鉄鋼製造プロセスにおけるロバスト制御」, 計測と制御, Vol.21, No.8, pp669-674 (1991)

(2) 加藤・池田・清瀬・山本:「ミキサセトラ抽出装置の動特性モデルの検討」, 化学工学, Vol.38, No.4, pp.324-326 (1974)

(3) R.K.Wood and M.W.Berry: "Terminal Composition Control of A Binary Distillation Control", Chem. Eng. Sci., Vol.28, pp.1707-1717 (1973)

(4) O.J.M.Smith: "A Controller to Overcome Dead Time", ISA J., Vol.6, pp.28-33 (1959)

(5) A.T.Fuller: "Optimal Nonlinear Control of System with Pure Delay", Int. J. Control, Vol.8, No.2, pp.145-168 (1968)

(6) D.L.Kleinman: "Optimal Control of Linear Systems with Time-Delay and Observation Noise", IEEE, Trans. Automatic Control, Vol.AC-14, No.5, pp.524-527 (1969)

(7) Furukawa and E.Shimemura: "Predictive Control for Systems with Time Delay", Int. J. Control, Vol.37, No.2, pp.399-412 (1983)

(8) 渡部・伊藤:「入出力にむだ時間を含むシステムの制御」, システムと制御, Vol.28, No.5, pp.269-277 (1984)

(9) 渡部 慶二:「入力にむだ時間をもつ系に対するＹ型サーボ系の構造を有する予測制御」, 計測自動学会論文集, Vol.21, No.9, pp.928-933 (1985)

(10) L.Pandolfi: "On Feedback Stabilization of Functional Differential Equations", Bollettino U.M.I.(4) Ⅱ, Suppl. Vol.3, pp.626-635 (1975)

(11) S.Morse: "Ring Models for Delay-Differential Sytems", Automatica, Vol.12, No.5, pp.529-531 (1976)

(12) E.B.Lee and S.H.Zak: "On Spectrum Placement for Linear Time Invariant Delay Systems", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-27, No.2, pp.446-449 (1982)

(13) Z.Manitius and A.W.Olbrot: "Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol.AC-24, No.4, pp.541-553 (1979)

(14) 玄・新・大久保:「本質的なむだ時間を一つ含む１入力線形系の有限極配置法」, 計測自動制御学会論文集,

Vol.23, No.4, pp.386-393 (1987)

(15) 渡部 慶二:「むだ時間をもつ多変数系の有限極配置－有理関数から有限ラプラス変換行列への Smith Form を利用した変換」, 計測自動制御学会論文集, Vol.26, No.4, pp.389-396 (1990)

(16) 児島 晃:「むだ時間系の H^{∞} 制御」, システム/制御/情報, Vol.39, No.2, pp.74-80 (1995)

(17) 鈴木:「入力経路にむだ時間をもつ多変数最適追従系の設計」, 計測自動制御学会論文集, Vol.11, No.5, pp.573-578 (1975)

(18) 藤中・荒木:「一方向性むだ時間系に対する離散時間形最適レギュレータ問題の解法」, 計測自動制御学会論文集, Vol.20, No.4, pp.288-293 (1984)

(19) 藤井・水野:「むだ時間系の適応制御」, システムと制御, Vol.28, No.6 pp.364-373 (1984)

(20) 渡部 慶二:「むだ時間システムの制御」, 計測自動制御学会 (1993)

(21) 大久保 重範:「外乱を考慮した非線形系のモデル追従形制御系の設計」, 計測自動制御学会論文集, Vol.21, No.8, pp.792-799 (1985)