計測自動制御学会東北支部 第177回研究集会 (1998.10.31)
資料番号 177-9

遺伝的アルゴリズムを用いた最適制御の設計

A design of optimal control system using genetic algorithms

○菊地毅，大久保重範

○Takeshi Kikuchi, Shigenori Okubo

山形大学

Yamagata University

キーワード： 非線形レギュレーター(nonlinear regulator), クロネッカーべき(kronecker product), べき状態ベクトル(power state vector), 最簡形式(Simplify form) 遺伝的アルゴリズム (genetic algorithm)

連絡先： 〒992-8510 山形県米沢市城南4-3-16 山形大学 工学部 機械システム工学科 大久保研究室
菊地毅, Tel.: (0238)26-3246, Fax.: (0238)24-6445, E-mail: tkikuchi@mip3470.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

従来、非線形レギュレータはその複雑さから、近似的な方法でしか設計する事ができなかった。大久保[1)]により考案された非線形レギュレータは、べき状態の形で系をそのまま記述できるので近似計算する必要がない反面、行列計算が煩雑になりやすい。そこで本稿では、遺伝的アルゴリズムを使用する際に使う行列を機械的に作成する方法について考察する。

2. 問題の設定

制御対象の非線形システム方程式を式(1)で与える。

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{2N-1} A_{(1,k)} x^{(k)} + Bu = A_{G(1,2N-1)} G^{(2N-1)}(x) + Bu \qquad (1)$$

$A_{(1,k)}$：$(1,k)$型共変対称テンソル
$x^{(k)}$：xのk次の縮約形クロネッカーべき

また各ベクトルは以下の次元を持つ。

$x \in R^n$, $u \in R^m$, $x^{(k)} \in R^{n^k}$,
$G^{(2N-1)}(x)$： ${}_{n+1}H_N - 1 \times 1$,
$A_{G(1,2N-1)}$: $n \times {}_{n+1}H_N - 1$, $B \in R^n$

この系における評価関数を式(2)で与える。

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_t^{\infty} (G^{(2N-1)T}(x) Q_{G(2N-1,2N-1)} G^{(2N-1)}(x) + u^T R u) dt \qquad (2)$$

$Q_{G(2N-1,2N-1)} \in {}_{n+1}H_N - 1 \times {}_{n+1}H_N - 1$:
$Q_{(i,j)}$をブロック要素とする行列

ハミルトニアンと最大原理より式(3),(4),(5)を得る。

$$u = -R^{-1} B^T P_{G(1,2N-1)} G^{(2N-1)}(x) \qquad (3)$$

$$Q_{G(2N-1,2N-1)} + A^T_{G(1,2N-1)} P_{G(1,2N-1)}$$

$$+P^T_{G(1,2N-1)}A_{G(1,2N-1)}$$

$$-P^T_{G(1,2N-1)}BR^{-1}B^TP_{G(1,2N-1)} = 0 \quad (4)$$

$$V(t) = \frac{1}{2}G^{T(N)}(x)\tilde{P}_{G(N,N)}G^{(N)}(x) \quad (5)$$

$\tilde{P}_{G(N,N)}$: $\tilde{P}^{(i,j)}_{(i,j)}(n^i \times n^j)$をブロック要素とする正方荷重行列

$\tilde{P}^{(i,j)}_{(i,j)}(n^i \times n^j)$: $\tilde{P}_{G(N,N)}$ の(i,j)ブロックに位置する(i,j)型完全対称テンソル

ここで、P_G, Q_Gが正定対称行列であるなら、$V > 0, \dot{V} < 0$となり安定なレギュレータが設計できる。

3. 最簡形式

$\tilde{P}_{G(N,N)}$を与えて$P_{G(1,2N-1)}$を実現するには$\tilde{P}_{G(N,N)}$の与え方に任意性がある。出来るだけ簡単な方な構成の方が望ましいので、$\tilde{P}^{(i,i-1)}_{(i,i-1)}, \tilde{P}^{(i,i)}_{(i,i)}, \tilde{P}^{(i,i+1)}_{(i,i+1)}$以外をゼロとおくことにする。この場合、$\tilde{P}_{G(N,N)}$は式(6)のブロックバンド行列で与えられる。

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}^{(1,1)}_{(1,1)} & \tilde{P}^{(1,2)}_{(1,2)} & 0 & 0 \\ \tilde{P}^{(2,1)}_{(2,1)} & \tilde{P}^{(2,2)}_{(2,2)} & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \tilde{P}^{(N-1,N)}_{(N-1,N)} \\ 0 & 0 & \tilde{P}^{(N,N-1)}_{(N,N-1)} & \tilde{P}^{(N,N)}_{(N,N)} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$P_{G(1,2N-1)}$と$\tilde{P}_{G(N,N)}$とのブロック行列の対応は以下のようになる。

$$P_{(1,2r-1)} = r\tilde{P}^{(r,r)}_{(1,2r-1)} \quad (7)$$

$$P_{(1,2r)} = \frac{2r+1}{2}(\tilde{P}^{(r,r+1)}_{(r,2r)} + \tilde{P}^{(r+1,r)}_{(1,2r)})$$
$$= (2r+1)\tilde{P}^{(r,r+1)}_{(r,2r)} \quad (8)$$

ここで、式(6)を$\{\tilde{P}_{G(N,N)}\}$と表す。$\{\tilde{P}_{G(N,N)}\}$は3重ブロックバンド行列になるが、このうち対角成分から遠い要素を出来るだけゼロにおいて簡略化できる。そのようにして構成した$\{\tilde{P}_{G(N,N)}\}$を$< \{\tilde{P}_{G(N,N)}\} >$とする。$\{\tilde{P}_{G(N,N)}\}$を第1最簡形式、$< \{\tilde{P}_{G(N,N)}\} >$を第2最簡形式と呼ぶことにする。

4. 遺伝的アルゴリズムにおける設計

GAの適合度関数として

$< \{Q_{G(2N-1,2N-1)}\} >, < \{\tilde{P}_{G(N,N)}\} >$の各主座小行列式$D_i$の最小値とする。

$$f_Q = min\{D_1, D_2, \cdots, D_{N_Q}\} \quad (9)$$

$$f_P = min\{D'_1, D'_2, \cdots, D'_{N_P}\} \quad (10)$$

$$N_Q = \sum_{n=1}^{2N-1} {}_nH_k = {}_{n+2N-1}C_{2N-1} - 1 \quad (11)$$

$$N_P = \sum_{n=1}^{N} {}_nH_k = {}_{n+N}C_N - 1 \quad (12)$$

$$f = min\{f_Q, f_P\} \quad (13)$$

$$f \to max \quad (14)$$

5. 縮約形と展開形の相互変換

クロネッカーべき$x^{[k]}$から縮約形$x^{<k>}$への変換及び逆変換の一般的解法についてはある種の行列変換を用いる事で可能である。

ここで、$x \in R^n, n = 2, k = 2$の場合について考える。

$$x^{[2]} = [x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_1x_2 \quad x_2^2]^T \quad (15)$$

$$x^{<2>} = [x_1^2 \quad x_1x_2 \quad x_2^2]^T \quad (16)$$

$x^{[2]}$をクロネッカーべきの展開形、$x^{<2>}$をクロネッカーべきの縮約形と呼ぶ。これに対して次のような変換行列が存在する。

$$C_{<2]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_{[2>} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

この行列を使い、以下の変換を行える。

$$x^{<2>} = C_{<2]}x^{[2]} \quad (18)$$

$$x^{[2]} = C_{[2>}x^{<2>} \tag{19}$$

一般に次式が成立する。

$$x^{<r>} = C_{<r]}x^{[r]} \tag{20}$$

$$x^{[r]} = C_{[r>}x^{<r>} \tag{21}$$

$C_{<r]}$を縮約変換行列、$C_{[r>}$を展開変換行列という。変数の個数nを明記するときは$C_{<n,r]}C_{[n,r>}$と記すものとする。

次に、$C_{<r]}$、$C_{[r>}$の一般形を求めることを考える。$x^{[r]}$の要素を$(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_r})$と表記する。この要素は辞書引き順に並ぶことから、$I_{kk}$：出現番号とすると以下の式で表現できる。

$$I_{kk} = (j_r - 1) + n(j_{r-1} - 1) + n^2(j_{r-2} - 1) + \cdots + n^{r-k}(j_k - 1) + \cdots + n^{r-1}(j_1 - 1) \tag{22}$$

これより

$$j_k = \frac{I_{kk}}{n^{r-k}} - \left(\left(\frac{I_{kk}}{n^{r-k}}\right)/n\right) * n + 1 \tag{23}$$

上式において、I_{kk}を$1 \sim n^r$まで発生させる事により$(j_1 j_2 \cdots j_r)$を求める事が出来る。

つぎに辞書引き順で並んだ$(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_r})$を$(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n})$のべき形式に変換し、$(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n})$が$x^{<r>}$の何番目の要素であるかを調べる。この操作は$(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_r})$の中に$x_k$が何個あるかを数えて、その個数を$p_k$とすることである。

また、$(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n})$の順序についてはつぎの式で与えられる。

$$N(n, r : p_1, p_2, \cdots, p_n) = \sum_{k=1}^{n-1} {}_{p_{k+1}+\cdots+p_n}H_{n-k} \tag{24}$$

但し、$r = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$, ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$

このようにして$(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_r})$の出現番号$N_j$と$(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n})$の出現位置$N_p$が1対1に決まる。$C_{[r>}$は$(N_j, N_p)$の要素を1に、その他の要素を0にした行列である。$C_{<r]}$は$C_{[r>}^T$のそれぞれの行を成分の総和を求めてその総和でそれぞれの行成分を割り算することにより構成される。$C_{[r>]}$の成分を(c_{ij})とすれば、

$$C_{<r]} = \left[c_{ji} / \sum_j c_{ji}\right] \tag{25}$$

このようにしてnとrが与えられれば、$C_{[r>}C_{<r]}$を求めることができる。さらに、これらの行列を拡張して、$G^{[k]}(x)$,$G^{<k>}(x)$の相互変換をする行列を定義することができる。

$$C_{G<k]} = blockdiag[C_{<1]}\ C_{<2]} \cdots C_{<k]}] \tag{26}$$

$$C_{G[k>} = blockdiag[C_{[1>}\ C_{[2>} \cdots C_{[k>}] \tag{27}$$

$$G^{<k>}(x) = C_{G<k]}G^{[k]}(x) \tag{28}$$

$$G^{[k]}(x) = C_{G[k>}G^{<k>}(x) \tag{29}$$

以上から、式(1)、(2)におけるシステム行列、荷重行列の相互変換が可能となる。

$$A_{G(1,2N-1)} = A_{G[1,2N-1]}C_{G[2N-1)} \tag{30}$$

$$A_{G[1,2N-1]} = A_{G(1,2N-1)}C_{G(2N-1]} \tag{31}$$

$$Q_{G<2N-1,2N-1>} = C^T_{G[2N-1>}Q_{G[2N-1,2N-1]}C_{G[2N-1>} \tag{32}$$

$$Q_{G[2N-1,2N-1]} = C^T_{G<2N-1]}Q_{G<2N-1,2N-1>}C_{G<2N-1]} \tag{33}$$

6. 最簡形式への変換手順

縮約形式$Q_{G<N,N>}$：$({}_{n+1}H_{N-1}) \times ({}_{n+1}H_{N-1})$を第2最簡形式$< \{Q_{G<N,N>}\} >$：$({}_{n+1}H_{N-1}) \times ({}_{n+1}H_{N-1})$に変換する手順について詳しく述べる。行または列の番号を$k : 1 \le k \le ({}_{n+1}H_{N-1})$と

する。このkがどのべき形式に対応するのかを求める。最初に$Q_{G<N,N>}$の要素$(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n})$が何番目になるのかを決める。$k=N_p$は次式で与えられる。

$$N_p=\sum_{k=0}^{n-1} p_{k+1+\cdots+p_n}H_{n-k} \tag{34}$$

また、J_{pp}：出現番号とすると$p_1,p_2,\cdots,p_n$は以下の関係で表される。

$$J_{pp}=p_1+p_2(N+1)+p_3(N+1)^2+\cdots+p_n(N+1)^{n-1} \tag{35}$$

したがって、

$$p_j=\frac{J_{pp}}{(N+1)^{j-1}}-\{J_{pp}/(N+1)^{j-1}/(N+1)\}*(N+1) \tag{36}$$

J_{pp}を$1\sim(N+1)^n-1$で発生させ、$(p_1p_2\cdots p_n)$を求める。ここで、$N_p=k$となる場合を探索する。これにより、kに対応する$(p_1p_2\cdots p_n)$を求めることができる。

解が１つしか存在しないことは$G^{<N>}(x)$の項が全て異なり、かつ辞書引き順に並んでいることから明らかである。

次に、縮約形式$Q_{G<N,N>}$の(k_p,k_q)要素を考える。k_p,k_qはそれぞれ$(p_1p_2\cdots p_n)$,$(q_1\ q_2\ \cdots\ q_n)$に対応する。このようにすると拡張２次形式$G^{T<N>}(x)$ $Q_{G<N,N>}G^{<N>}(x)$を取った場合には(k_p,k_q)要素から出る項は$x^{p_1}x^{p_2}\cdots x^{p_n}$と$x^{q_1}x^{q_2}\cdots x^{q_n}$であり、$x^{r_1}x^{r_2}\cdots x^{r_n}$,$r_i=p_i+q_i$の項となる。

一方で拡張２次形式から出てくる$x^{r_1}x^{r_2}\cdots x^{r_n}$, $r_i=p_i+q_i$の項は$Q_{G<N,N>}$の(k_p,k_q)要素からだけではなく、他の要素からも出てくる。これを(k'_p,k'_q)とする。$x^{r_1}x^{r_2}\cdots x^{r_n}$の係数は$k'_p$と$k'_q$の要素の和となっている。縮約形式の複数の要素の和が$x^{r_1}x^{r_2}\cdots x^{r_n}$の係数になるために、縮約形式に冗長度があることになる。

この冗長度を全くなくした形を考えれば、拡張２次形式のスカラー多項式と拡張２次形式の荷重行列は１対１に対応し、荷重行列が一意的に与えられる。こうした考えに基づいて定義したものが第２最簡形式である。ここでは、対角要素から遠い要素をゼロにした形式、すなわち非ゼロ要素が対角要素に近い場所に集中する形式を第２最簡形式と定義する。Fig.1に変換の原理を示す。

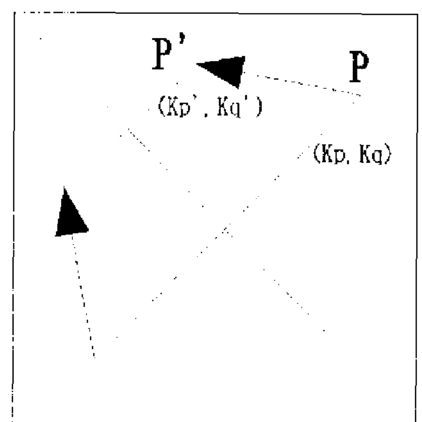

Fig. 1　Transpose to simplest style

$|k_p-k_q|$と$|k'_p-k'_q|$とを比較して、$|k'_p-k'_q|$が小さければ、(k_p,k_q)の要素を(k'_p,k'_q)の要素に加算する。この操作を繰り返すことにより第２最簡形式を構成する。(k_p,k_q)から(k'_p,k'_q)を見つける方法は以下のようにする。

1) $r_i=p_i+q_i$を求め、$r_i=p_{i1}+q_{j1}$, $0\le p_{i1}\le r_i$, $q_{i1}=r_i-p_{i1}$より、(r_i+1)個の(k_{p1},k_{q1})が求まる。

2) $|k_{p1}-k_{q1}|$が最小になる組を探し、これを(k'_p,k'_q)とする。

行列の対称性を考慮すれば、$k_p\ge k_q$のとき、$k'_p\le k'_q$として、$k_p\le k_q$のとき、$k'_p<k'_q$という条件を付けることで、一意的に決定する。対称性を考えると任意の(k_p,k_q)に対して(k'_p,k'_q)が一意的に決定することは第２最簡形式の性質から明らかである。

以上により、$Q_{G<N,N>}$を構成することができる。また、同様の手順を用いて$\tilde{P}_G$も求める事ができる。従って、ＧＡに必要な要素は全て求められることになる。

7. 計算例

```
n =     2     N=    3

   k:    prr(j)
   1  x(1)1 x(2)0
   2  x(1)0 x(2)1
   3  x(1)2 x(2)0
   4  x(1)1 x(2)1
   5  x(1)0 x(2)2
   6  x(1)3 x(2)0
   7  x(1)2 x(2)1
   8  x(1)1 x(2)2
   9  x(1)0 x(2)3
```

<{QGn}>

1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	2	2	1	0	0	0	0
1	2	3	3	0	1	0	0	0
0	2	3	7	3	2	0	0	0
0	1	0	3	3	3	3	2	1
0	0	1	2	3	1	1	0	0
0	0	0	0	3	1	3	2	0
0	0	0	0	2	0	2	3	1
0	0	0	0	1	0	0	1	1

qgnn

1	2	4	0	0	0	0	0	0
2	3	5	7	10	0	0	0	0
4	5	6	8	0	13	0	0	0
0	7	8	9	11	14	0	0	0
0	10	0	11	12	15	17	20	23
0	0	13	14	15	16	18	0	0
0	0	0	0	17	18	19	21	0
0	0	0	0	20	0	21	22	24
0	0	0	0	23	0	0	24	25

P_G

1	2	4	5	6	8	9	10	11
2	3	5	6	7	9	10	11	12

<{P~G}>

1	1	1	0	0
1	1	2	2	1
1	2	1	1	0
0	2	1	3	1
0	1	0	1	1

pgmatnn

1	2	4	5	6
2	3	5	6	7
4	5	8	9	10
5	6	9	10	11
6	7	10	11	12

8. 力学系への応用

バネ及びダッシュポッドに非線形性を持っている力学系としてFig.2を考える。

この系の運動方程式を立てると式(37)となる。

$$M\ddot{x}+(D_1+D_2x^2)\dot{x}+(K_1+K_2x^2)x=u \quad (37)$$

ここで、Mは物体の質量、Dは粘性減衰係数、Kはバネ係数である。

上式を式(1)に当てはめるため、$x_1=x, x_2=\dot{x}$とおくことにより次式に変形できる。

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-\frac{K_1}{M}&-\frac{D_1}{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\-\frac{K_2}{M}&-\frac{D_2}{M}&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^3\\x_1^2x_2\\x_1x_2^2\\x_2^3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{M}\end{bmatrix}u \quad (38)$$

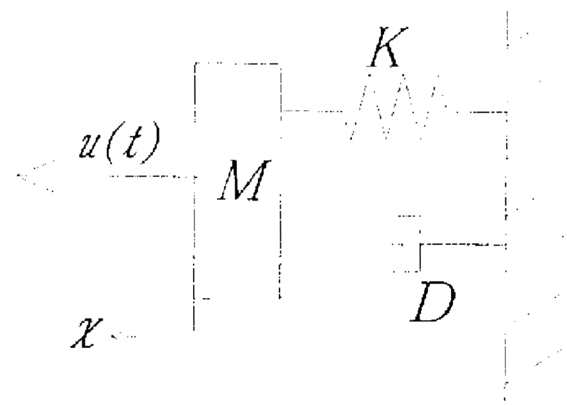

Fig. 2　Mechanical system

9. シミュレーション

系の定数及びＧＡのパラメータは次のようにして行った。

$M=1.0$[Kg]

$K_1=1.5$[N/m], $K_2=0.8$[N/m]

$D_1=0.1$[Ns/m], $D_2=0.01$[Ns/m]

CHC[5]アルゴリズムを使用。

個体数100個

1変数あたり15Bit

実数値は-16.384から16.383まで

世代数は20000

シミュレーション結果を以下に記す。

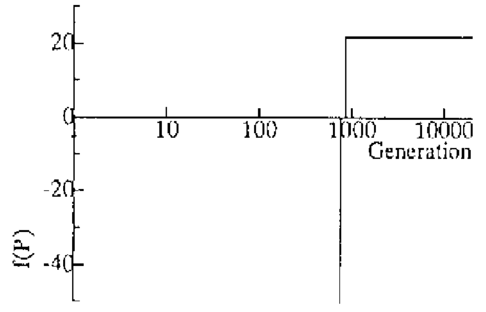

Fig. 3 Behavior of f(P)

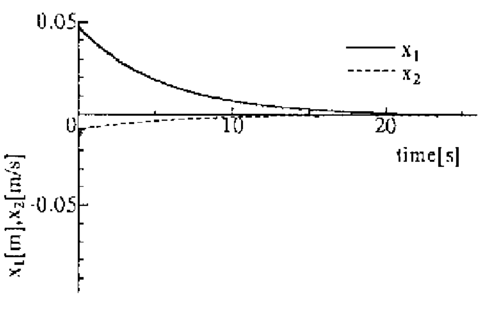

Fig. 4 Response of non-linear regulator

10. おわりに

本方法を用いることで、いままで手計算で求めらていたQ_Gと$\hat{P}_G$を機械的に生成することができ、また有効性もシミュレーションにより確認された。

参考文献

1) 大久保重範：遺伝的アルゴリズムによる非線形レギュレータの設計，計測自動制御学会東北支部第156回研究会集会資料,156-19, (1995)

2) 大久保重範：非線形レギュレータに関連したソフトウェア技法，第20回Dynamical Systemシンポジウム資料,209/212, (1997)

3) 大久保重範：非線形レギュレータの遺伝的アルゴリズムによる設計，計測自動制御学会論文集,33-11,1072/1080, (1997)

4) 志水清孝：最適制御の理論と計算法,105/110,コロナ社(1994)

5) 坂和正敏ほか：遺伝的アルゴリズム,13/30,61/64,朝倉書店(1995)