

制御則の切り替えを含む最適レギュレーターについて

Non-linear Optimal Regulator including switching control policy

○小原太輔[†], 森本潤^{†‡}, 鈴木睦[†]○ Daisuke Obara[†], Jun Morimoto^{†‡}, Mutumi Suzuki[†]

† 東北大学院・工、‡ 三共株式会社 第二生産技術研究所

† Tohoku University, ‡ Sankyo Co., LTD. Process Development Laboratories

キーワード : 最適レギュレーター (optimal regulator), 最大原理(maximum principle)

連絡先 : 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉07 東北大学工学部 大学院工学研究科 化学工学専攻 鈴木研究室
小原太輔, Tel.: (022)217-7268, Fax.: (022)217-7293, E-mail: obara@pse.che.tohoku.ac.jp

1. 緒言

非線形システムにおける最適レギュレータの問題について、様々な手法が考案されている。我々は化学プラントの最適運転計画の検討で得たPontryaginの最大原理による1変数および2変数の解法を用いて、最適レギュレータ問題を状態方程式から直接解くことを考え、この手法により制御則を物理量を用いて簡単に表現する手法を紹介してきた。今回は、特異制御の考えに基づき、比較的簡単に導出が可能な制御則である、最適温度軌道を用いた切り替え制御を紹介する。

2. 一般解法

2.1 はじめに

終端時間が自由な場合のPontryaginの最大原理をTable 1に示す。この性質を用いてHamilton随伴関数を消去することができる。1変数系の場合直接制御則を得ることができ、2変数系の場合操作

Table 1 Hamilton関数の性質

	Hamilton関数の性質	数学的表現
(a)	極大値で最適	$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$
(b)	極大値は0	$H = 0$
(c)	常に極大	$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial H}{\partial u} \right) = 0$

変数の微分形を得ることができる。

3. 設定した問題

Fig.1に示すバッチ反応器を用いて、A(原料) → B(製品) → C(副生成物)のような逐次反応を行う問題を考える。ジャケット内は完全混合とし反応熱項を $R(T_1)$ で表すと、反応器内部温度 T_1 、ジャケット温度 T_2 の時間微分はそれぞれEq (1)、(2)のように表される。ここで $W_1 = C_{P1}\rho_1 V_1$ 、 $W_2 = C_{P2}\rho_2 V_2$ 、 $w_1 = C_{P2}\rho_2 u$ である。

$$\dot{T}_1 = \frac{1}{W_1} \{R(T_1) - AU(T_1 - T_2)\} \quad (1)$$

$$\dot{T}_2 = \frac{w_2}{W_2} (T_{2in} - T_2) + \frac{AU(T_1 - T_2)}{W_2} \quad (2)$$

各反応が一次反応である時、反応熱項は以下のよ
うに表される。

$$R(T_1) = V_1 k_A C_A H_A + V_1 k_B C_B H_B \quad (3)$$

$$k_A = A_A \exp\left(\frac{-E_A}{RT_1}\right) \quad (4)$$

$$k_B = A_B \exp\left(\frac{-E_B}{RT_1}\right) \quad (5)$$

以上に示した問題について、操作変数をジャケット
ト入口温度 T_{2in} として反応液温度 T_1 制御則を導く。

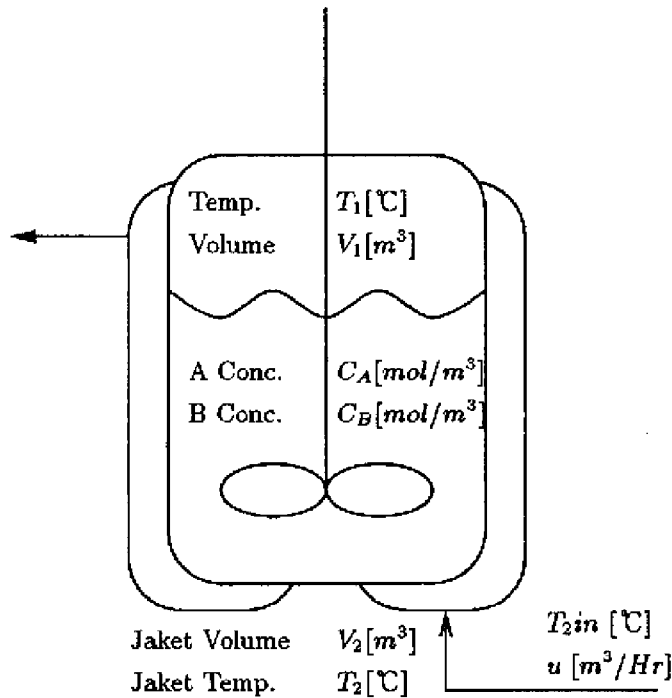


Fig. 1 装置図

3.1 計算条件

計算に用いた物性をTable 2に、装置条件,計算
条件をTable 3,4に示す。

4. 理論

4.1 特異解

評価関数を以下のように定義する。

$$\int_0^{t_f} f_0 dt \rightarrow \text{minimum} \quad (6)$$

$$f_0 = P(T_1 - T_1^*)^2 + Q(T_2 - T_2^*)^2$$

Table 2 物性

parameter			value
<i>A</i> → <i>B</i>			
頻度因子	A_A	1/Hr	3.6×10^{14}
活性化エネルギー	E_A	cal/mol	25000
反応熱	H_A	kcal/mol	20
<i>B</i> → <i>C</i>			
頻度因子	A_B	1/Hr	3.6×10^{14}
活性化エネルギー	E_B	cal/mol	27000
反応熱	H_B	kcal/mol	20
反応液比熱	Cp_1	kcal/m ³	1
熱媒比熱	Cp_2	kcal/m ³	1
反応液比重	ρ_1	kg/m ³	1000
熱媒比重	ρ_2	kg/m ³	1000

Table 3 装置条件

parameter			value
内容量	V_1	m ³	5
伝熱面積	A	m ²	5
総括伝熱係数	U	kcal/m ² /°C/Hr	300
ジャケット容量	V_2	m ³	0.5
熱媒流速	u	m ³ /Hr	5

式中の T_1^*, T_2^* は目標の定常値を表す。また、E q
(1),(2)で表される温度の時間微分を

$$\dot{T}_1 = f_1 \quad (7)$$

$$\dot{T}_2 = f_2 \quad (8)$$

と置き、Lagrangeの未定数法により、E q (6),(7),(8)
を統合すると以下の式が得られる。

$$\int F dt = \int \{f_0 + \lambda_1(\dot{T}_1 - f_1) + \lambda_2(\dot{T}_2 - f_2)\} dt \rightarrow \text{extremal} \quad (9)$$

このときのHamilton関数は以下のように表される。

$$H = -F + p_1 f_1 + p_2 f_2$$

$$= g(T_1, T_2, p_1, p_2) + p_2 \frac{w_2}{W_2} T_{2in} \quad (10)$$

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial T_1} = \lambda_1 \quad (11)$$

Table 4 計算条件

parameter			value
目標反応液温度	T_1^*	℃	100
A成分濃度	C_A	mol/m ³	800
B成分濃度	C_B	mol/m ³	200
ジャケット入口温度			
最大値	T_{2inmax}	℃	120
最小値	T_{2inmin}	℃	-50

$$p_2 = \frac{\partial F}{\partial T_2} = \lambda_2 \quad (12)$$

Pontryaginの最大原理に基づき、Eq (10)のHを最大にする操作変数を求める。操作変数 T_{2in} に関して一次式となるので、

$$T_{2in} = \begin{cases} T_{2inmax} & p_2 \frac{w_2}{W_2} T_{2in} > 0 \text{の時} \\ T_{2inmin} & p_2 \frac{w_2}{W_2} T_{2in} < 0 \text{の時} \end{cases}$$

のbang-bang制御が得られる。これを普通解と呼ぶ。

このときHamilton関数の性質からEq (10)は一定の値をとる。

$$g(T_1, T_2, p_1, p_2) + p_2 \frac{w_2}{W_2} T_{2in} = Const \quad (13)$$

この条件を満たすもう一つの解が存在する事が知られている。すなわちある有限時間 t_1, t_2 において

$$g(T_1, T_2, p_1, p_2) = Const \quad (14)$$

および

$$p_2 \frac{w_2}{W_2} T_{2in} = 0 \quad (15)$$

を満たす解である。この解は特異解と呼ばれる。システムの最適解は、ある条件の下で普通解と特異解を接続する事で得ることが出来る。以下に特異解についての検討を行う。

4.2 特異解の導出

Eq (13)の両辺を T_{2in} で微分すると以下の関係式が得られる。

$$\frac{\partial H}{\partial T_{2in}} = p_2 \frac{w_2}{W_2} = 0 \quad (16)$$

Table 1の(c)の条件から、

$$\frac{d}{dt}(p_2) = 0 \quad (17)$$

Hamiltonの正準形式から

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial T_2} \quad (18)$$

$$= \frac{\partial F}{\partial T_2} - p_1 \frac{\partial f_1}{\partial T_2} - p_2 \frac{\partial f_2}{\partial T_2} \quad (19)$$

$$= 2Q(T_2 - T_2^*) - p_1 \frac{AU}{w_1} - p_2 \frac{\partial f_2}{\partial T_2} \quad (20)$$

$p_2 = \dot{p}_2 = 0$ であることから、

$$p_1 = \frac{2Q(T_2 - T_2^*)}{\frac{AU}{W_1}} \quad (21)$$

が得られる。Eq (16)をさらに微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial H}{\partial T_{2in}} \right) &= \frac{d}{dt} (2Q(T_2 - T_2^*) - p_1 \frac{AU}{W_1}) \\ &= 2Q\dot{T}_2 - \dot{p}_1 \frac{AU}{W_1} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Hamiltonの正準形式から

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial T_1}$$

$$= 2P(T_1 - T_1^*) - \frac{p_1}{W_1} \left(\frac{\partial R(T_1)}{\partial T_1} - AU \right) \quad (23)$$

をEq (22)に代入し、整理すると、特異解の条件を満たす操作変数の式として、

$$\begin{aligned} T_{2in} &= T_2 + \frac{P AU W_2}{Q W_1 w_2} (T_1 - T_1^*) - \frac{AU(T_1 - T_2)}{w_2} \\ &\quad - \frac{W_2 (T_2 - T_2^*)}{w_2} \left(\frac{\partial R(T_1)}{\partial T_1} - AU \right) \end{aligned} \quad (24)$$

が得られる。

4.3 最適 T_2 温度軌跡の導出

現在の反応液温度を維持するジャケット温度を T_2^o とすると、

$$T_2^o = T_1 - \frac{R(T_1)}{AU} \quad (25)$$

同様に目標反応液温度 T_1^* を維持するジャケット温度を T_2^* とすると、

$$T_2^* = T_1^* - \frac{R(T_1^*)}{AU} \quad (26)$$

と表すことができる。反応液温 T_1 を x 、ジャケット温度 T_2 を u とし、評価関数Eq(6)の被積分関数を f_0 、Eq(1)を f_1 とおくとHamilton関数 H および随伴関数 p_1 は以下のように定義される。

$$H = -f_0 + p_1 f_1 \quad (27)$$

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_1} = \lambda \quad (28)$$

Table 1の(a),(b)の条件より

$$-\frac{\partial f_0}{\partial u} + p_1 \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \quad \therefore p_1 = \frac{\frac{\partial f_0}{\partial u}}{\frac{\partial f_1}{\partial u}} \quad (29)$$

$$-f_0 + p_1 f_1 = 0 \quad \therefore p_1 = \frac{f_0}{f_1} \quad (30)$$

このEq(29),(30)から p_1 を消去して

$$f_0 \frac{\partial f_1}{\partial u} = f_1 \frac{\partial f_0}{\partial u} \quad (31)$$

を得る。また

$$\frac{\partial f_0}{\partial u} = 2Q(u - u^*) \quad , \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = B(x) \quad (32)$$

であるから、Eq(31)に代入して整理すると $(u - u^*)$ の二次式となる。

$$(u - u^*)^2 - 2(u^0 - u^*)(u - u^*) - \frac{P}{Q}(x - x^*)^2 = 0 \quad (33)$$

この式を解くことにより最適 T_2 温度軌跡

$$T_2 = T_2^0 \pm \sqrt{(T_2^0 - T_2^*)^2 + \frac{P}{Q}(T_1 - T_1^*)^2} \quad (34)$$

を得る。Eq(34)から T_2 の時間微分を求め、以下の関係式が得られる。

$$\dot{T}_2 = \dot{T}_1 \left(\frac{\partial T_2^0}{\partial T_1} \pm \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{F}} \frac{\partial F}{\partial T_1} \right) \quad (35)$$

$$F = (T_2^0 - T_2^*)^2 + \frac{P}{Q}(T_1 - T_1^*)^2 \quad (36)$$

得られたEq(35)を一方熱収支から与えられるジャケット温度 T_2 の時間微分の式Eq(2)に代入して \dot{T}_2 を消去すると、Eq(37)を得ることが出来る。この式を整理するとすでに求めた特異解の式Eq(24)と同様の式を得ることが出来る。このことから最適 T_2 軌道を維持する操作変数の式が、特異解の条件を満たす式であることが確認された。

$$T_{2inopt} = T_2 + \frac{PW_2AU}{QW_1w_2}(T_1 - T_1^*) - \frac{AU}{w_2}(T_1 - T_2) - \frac{W_2(\dot{R}(T_1) - AU)}{W_1w_2}(T_2 - T_2^*) \quad (37)$$

$$\dot{R}(T_1) = \frac{V_1 E_1}{RT_1^2} k_A C_A H_A + \frac{V_1 E_2}{RT_1^2} k_B C_B H_B$$

4.4 切り替え制御

以上で得られた通常解と特異解を組み合わせた制御を行う。ジャケット温度がEq(34)で表される T_{2opt} の値からはずれている場合、最適制御は通常解に基づく u_{max} と u_{min} のbang-bang制御となり、制御則は

$$T_{2in} = \begin{cases} T_{2inmax} & T_{2opt} > T_2 \text{の時} \\ T_{2inmin} & T_{2opt} < T_2 \text{の時} \end{cases}$$

で与えられる。一方ジャケット温度が、Eq(34)で表される T_{2opt} の値に一致した際には、Eq(37)に基づいて T_{2in} を決定する。数値的問題及び安定性を考慮して以下の式に基づき制御則を決定する。

$$T_{2in} = T_{2inopt} + k(T_{2opt} - T_2) \quad (38)$$

$$T_{2inmin} \leq T_{2in} \leq T_{2inmax}$$

T_2 の値と、 T_{2opt} とのずれに応じて操作変数が決定される。係数 k の値が大きいほど、bang-bang制御を行う領域が広がる。Fig.2に T_1^* を100℃とし、 $k = 10$, $P/Q = 100$ として切り替え制御を行った際の T_{2opt} , T_2 , T_{2inopt} , T_{2in} 各温度の変化と制御マップを示す。 T_{2opt} と T_2 の値が離れているときはbang-bang制御を行い、 T_{2opt} と T_2 の値が近づくと、特異

制御に切り替わり、Eq (34)から得られる T_2 最適温度軌道をたどり、目標温度へ到達する。

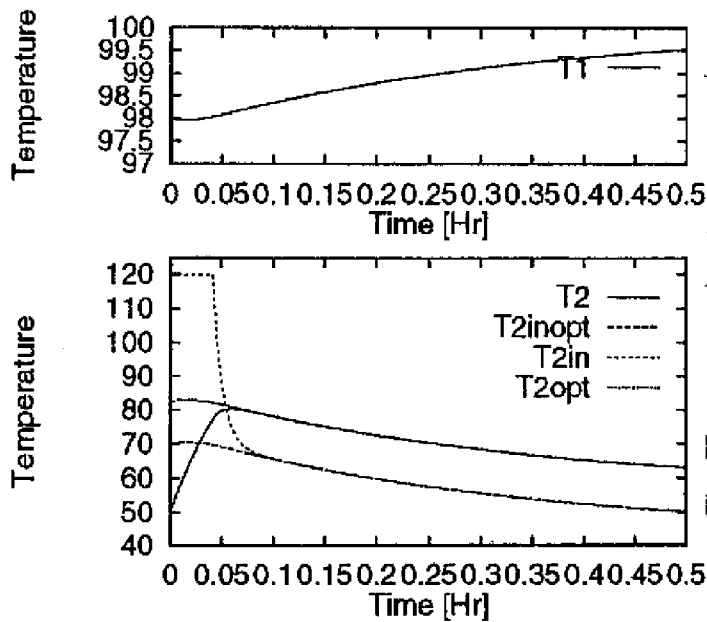


Fig. 2 切り替え制御軌道 ($P/Q = 10^2$)

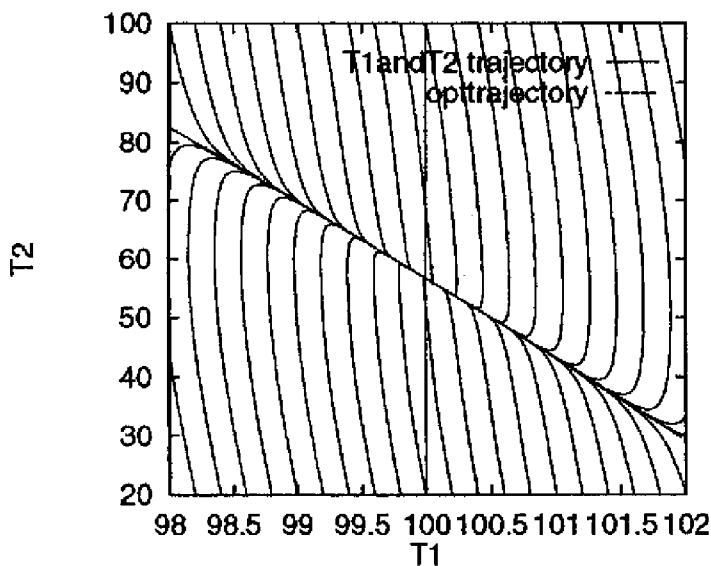


Fig. 3 切り替え制御軌道 ($P/Q = 10^2$)

4.5 1変数系

反応液 T_1 の変化に対してジャケット温度 T_2 の変化は非常に早い事が予想されるため、 $\dot{T}_2 = 0$ と近似した1変数系として考える。評価関数を

$$\int \{P(T_1 - T_1^*)^2 + Q(T_{2in} - T_{2in}^*)^2\} dt \rightarrow \text{minimum} \quad (39)$$

と定義する。熱収支より

$$w_2(T_{2in} - T_2) = -AU(T_1 - T_2) \quad (40)$$

上式を用いてEq(1)より T_2 を消去すると

$$\dot{T}_1 = \frac{R(T_1)}{W_1} - \frac{1}{W_1} \frac{AUw_2}{AU + w_2} (T_1 - T_{2in}) \quad (41)$$

となる。ここで現在の反応液温度を維持するジャケット入口温度を T_{2in}^o とすると、

$$T_{2in}^o = T_1 - \frac{AU + w_2}{AUW_2} R(T_1) \quad (42)$$

同様に目標反応液温度 T_1^* を維持するジャケット入口温度を T_{2in}^* とすると、

$$T_{2in}^* = T_1^* - \frac{AU + w_2}{AUW_2} R(T_1^*) \quad (43)$$

と表すことができる。評価関数の被積分関数を f_0 、Eq(41)を f_1 とおくとEq (31)の関係が成り立ち、整理した二次式を解くと

$$T_{2in} = T_{2in}^o \pm \sqrt{(T_{2in}^o - T_{2in}^*)^2 + \frac{P}{Q}(T_1 - T_1^*)^2} \quad (44)$$

を得る。評価関数の重みを、 $P/Q = 10^2$ 、 $P/Q = 10^4$ とした時の1変数系と切り替え制御の制御軌道をFig.4に示す。ジャケット温度 T_2 の応答の遅れを考慮していない1変数系制御と比べ、切り替え制御でのジャケット温度の立ち上がりは早く、1変数系制御に比べよい結果が得られた。

4.6 カスケード制御

目標反応液温度 T_1^* に対してまず仮の操作変数としてジャケット温度 T_2 を考え、最適レギュレータを構成する。次に上記レギュレータにより求まる操作量 T_2 を T_2^* として、ジャケット入口温度 T_{2in} の操作量を決定するカスケード制御を考える。

評価関数をEq(45)。現状の T_1 を維持する T_2^o, T_1^* を維持する T_2^* はそれぞれEq(46),Eq(47)となる。

$$\int \{P_1(T_1 - T_1^*)^2 + Q_1(T_2 - T_2^*)^2\} dt \rightarrow \text{minimum} \quad (45)$$

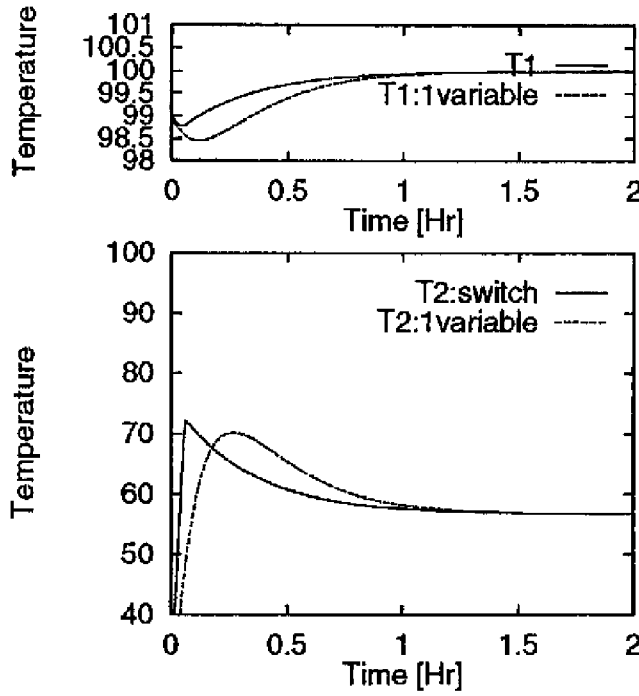


Fig. 4 1変数系制御軌道と切り替え制御軌道 ($P/Q = 10^2$)

$$T_2^o = T_1 - \frac{R(T_1)}{AU} \quad (46)$$

$$T_2^* = T_1^* - \frac{R(T_1^*)}{AU} \quad (47)$$

1変数系の解法より

$$T_2 = T_2^o \pm \sqrt{(T_2^o - T_2^*)^2 + \frac{P_1}{Q_1}(T_1 - T_1^*)^2} \quad (48)$$

Eq(48)で得た T_2 を新たな目標値 T_2^{**} として最適レギュレータを構成する。評価関数をEq(49)。現状の T_2 を維持する T_{2in}^o, T_2^{**} を維持する T_{2in}^* はそれぞれEq(50),Eq(51)となる。

$$\int \{P_2(T_2 - T_2^{**})^2 + Q_2(T_{2in} - T_{2in}^*)^2\} dt \rightarrow \text{minimum} \quad (49)$$

$$T_{2in}^o = T_2 - \frac{AU}{w_2}(T_1 - T_2) \quad (50)$$

$$T_{2in}^* = T_2^{**} - \frac{AU}{w_2}(T_1^* - T_2^{**}) \quad (51)$$

全く同様にして

$$T_{2in} = T_{2in}^o \pm \sqrt{(T_{2in}^o - T_{2in}^*)^2 + \frac{P_2}{Q_2}(T_2 - T_2^{**})^2} \quad (52)$$

を得る。カスケード制御と切り替え制御の比較のため、 $P_1/Q_1 = 10^2 P_2/Q_2 = 1$ とした際の制御軌道Fig.5と、 $P_1/Q_1 = 10^2 P_2/Q_2 = 100$ とした際の制御軌道Fig.6を示す。カスケード制御では T_2 の遅れが考慮されているが、 P_2/Q_2 の値が小さいFig.5に比べ、 P_2/Q_2 の値の大きいFig.6では、切り替え制御とカスケード制御はほぼ同様の結果を示した。カスケード制御に関する式(Eq 52)からも明らかなように、 P_2/Q_2 の値が大きいとき、 T_2 の T_{2opt} からの偏差が重視されるようになる。そのため、カスケード制御と T_{2opt} からの偏差を基準に制御を行う切り替え制御とではほぼ同様の制御側が得られる事が確認できた。

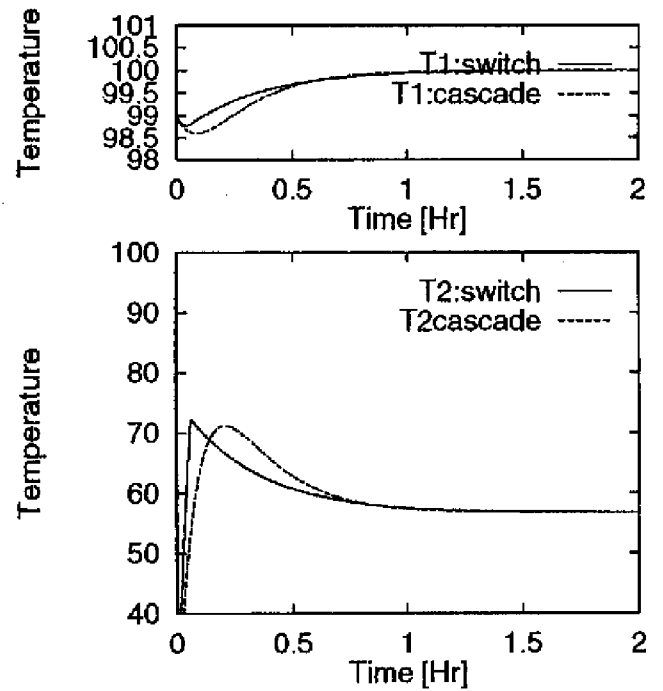


Fig. 5 カスケード制御軌道と切り替え制御軌道 ($P_1/Q_1 = 10^2 P_2/Q_2 = 1$)

5. 結言

特異制御の考えより得られた切り替え制御手法と、すでに求められていた1変数系およびカスケード制御との特性の比較を行った結果、カスケード制御と同等以上な良好な制御を行うことができた。

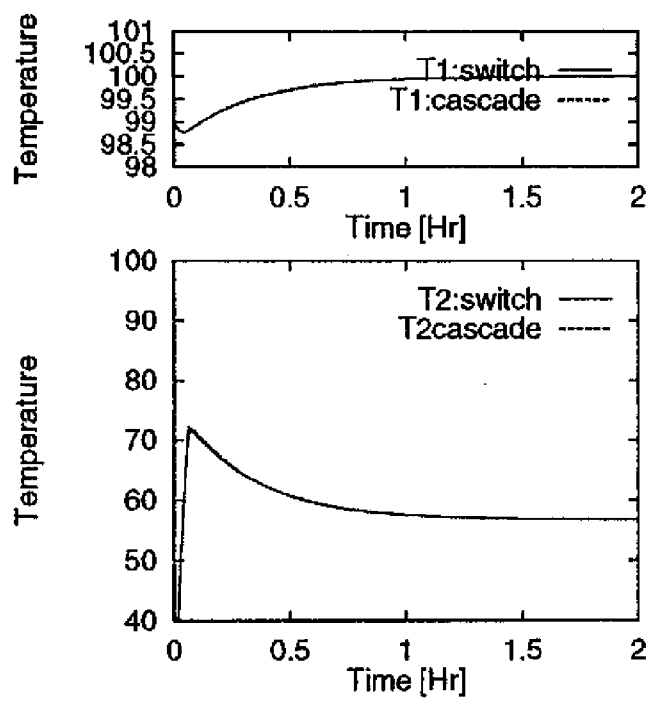


Fig. 6 カスケード制御軌道と切り替え制御軌道
 $(P_1/Q_1 = 10^2 P_2/Q_2 = 10^2)$