

宇宙往還機の帰還軌道計算

Reentry trajectory optimization of a space-shuttle-type orbiter

井前 譲*, ○上馬 信之**

Joe Imae*, ○Nobuyuki Kamiyama**

*岩手大学工学部, **岩手大学大学院

*Faculty of Engineering, Iwate University

**Graduate School of Iwate University

キーワード: 宇宙往還機 (Space-shuttle-type orbiter), 最適化 (optimization), 帰還軌道 (Reentry Trajectory), 操作量拘束 (Hard-control-constrain)

連絡先: 〒020 盛岡市上田 4-3-5, 岩手大学工学部機械工学科
井前 譲 Tel. 019(624) 6401, Email: jimac@iwate-u.ac.jp

1. 緒言

宇宙往還機 (オービタ) の帰還軌道の最適化計算を扱う。この問題は状態方程式の強い非線形性および拘束条件の存在のため、一般に解法困難といわれる。本研究では拘束条件がない場合に有効とされる2次アルゴリズムを、拘束条件が直接取り扱い可能な形に改良し、帰還軌道計算を試みる。拘束条件を直接取り扱う手法としてクリッピングオフ手法¹⁾を採用する。この手法は考え方が容易なことから種々の最適化法との組み合わせが報告されているが、2次アルゴリズムとの組み合わせは収束性が保証されないため報告例はない。ここでは、ある種の工夫により、2次アルゴリズムとクリッピングオフ手法の組み合わせが実用的であることを示す。具体的にはオービタ帰還軌道の計算を操作量拘束最適制御問題としてとらえ、改良アルゴリズムにより解軌道を算出する。その着陸地点は、国

産スペースシャトルの発着基地として決定又はその候補地として立候補しているクリスマス島と遠野を選んだ。

2. 改良アルゴリズム

操作量拘束最適制御問題および数値解法アルゴリズムについて以下に示す。

[最適制御問題]

システム方程式、初期条件がそれぞれ

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0 \in R^n \quad (1)$$

で与えられるとき、評価関数 $J(u)$

$$J(u) = G(x(t_1)) \quad (2)$$

を最小にする操作量 $u(t)$ を求める。ただし、 $x \in R^n$ は状態量、 $u \in R^r$ は操作量、 t_0, t_1 は初期、

終端時刻とし、操作量 $u = [u_1, \dots, u_r]^T$ は拘束条件

$$L_k \leq u_k \leq N_k, k = 1, \dots, r \quad (3)$$

が与えられているとする。

[アルゴリズム]

<step0> $\beta \in (0, 1), M_1 \in (0, 1)$ とする。

<step1> 拘束条件(3)を満足する可測関数 $u^0(t): [t_0, t_1] \rightarrow R^r$ を選び, $i=0$ とする.

<step2> $u^i(t)$ を用いて, システムの状態方程式より $x^i(t)$ を求める.

<step3> 次式より, $\delta x^i(t), K^i(t), r^i(t), \delta u^i(t)$ を求める. なお, A^i, B^i, C^i は Kalman の十分条件により, 適切に選ばれるものとする.

$$\begin{aligned} \delta \dot{x}^i(t) &= [f_x(t, x^i, u^i) \\ &\quad + f_u(t, x^i, u^i)(C^i)^{-1} \{f_u(t, x^i, u^i)^T K(t)\}] \delta x(t) \\ &\quad + f_u(t, x^i, u^i)(C^i)^{-1} f_u(t, x^i, u^i)^T r(t), \\ \delta x(t_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} K^i(t) &= -K(t)f_x(t, x^i, u^i) - f_x(t, x^i, u^i)K(t) + B^i \\ &\quad + \{K(t)f_u(t, x^i, u^i)\}(C^i)^{-1} \{-f_u(t, x^i, u^i)^T K(t)\}, \\ K(t_1) &= -A^i \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} r^i(t) &= -f_x(t, x^i, u^i)^T r(t) \\ &\quad + \{-K(t)f_u(t, x^i, u^i)\}(C^i)^{-1} f_u(t, x^i, u^i)^T r(t), \\ r(t_1) &= -G_x(x^i(t_1)) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{u}^i(t) &= (C^i)^{-1} \{ \{f_u(t, x^i, u^i)^T K(t)\} \delta x(t) \\ &\quad + f_u(t, x^i, u^i)^T r(t) \} \end{aligned} \quad (7)$$

<step4> $\alpha^i = 1$

<step5> $\tilde{u}^{i+1}(t) = u^i(t) + \alpha^i \delta u^i(t)$ とおく.

ここでクリッピングオフ手法を適用する. すなわち, $k=1, \dots, r$ に対し

$$\begin{aligned} \tilde{u}_k^{i+1} < L_k \text{ ならば } u_k^{i+1} &= L_k \\ L_k \leq \tilde{u}_k^{i+1} \leq N_k \text{ ならば } u_k^{i+1} &= \tilde{u}_k^{i+1} \\ \tilde{u}_k^{i+1} > N_k \text{ ならば } u_k^{i+1} &= N_k \end{aligned}$$

とする. この $u^{i+1}(t)$ を用いて, システムの状態方程式より $x^{i+1}(t)$ を求める. このとき,

$$J(u^{i+1}) - J(u^i) \leq -\alpha^i M_1 \int_{t_0}^{t_1} H_u(t, x^i, u^i, p^i) \delta u^i dt \quad (8)$$

ならば, step6へ. それ以外は, $\alpha^i = \beta \alpha^i$ とおいて, step5を繰り返す. ここに,

$H(t, x, u, p) = -L(t, x, u, p) + p^T f(t, x, u, p)$ であり, $p^i(t)$ は次式の解である.

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -f_x(t, x^i, u^i)^T p(t) + L_x(t, x^i, u^i)^T \\ p(t_1) &= -G_x(x^i(t_1))^T \end{aligned} \quad (9)$$

<step6> 評価関数の値が収束したと判断したとき, step7へ. それ以外は, $i=i+1$ とおいて, step3へ戻る.

<step7> もし $A^i=0, B^i=0, C^i=I$ ならば終了. それ以外は $A^i=0, B^i=0, C^i=I$ とおいて step3へ.

(注) step5が主な改良部分である. 操作量拘束を侵す場合, 強制的にその部分を除外する考え方である. 図1に概要を示す. (a)はクリッピングオフを適用する前である. $\tilde{u}^{i+1}(t)$ は上限・下限の値を侵している. (b)はクリッピングオフを適用した後である. $\tilde{u}^{i+1}(t)$ が拘束条件を侵していた部分を排除した $u^{i+1}(t)$ になっている.

3. クリッピングオフ手法の検討

例題を通して2次アルゴリズムとクリッピングオフ手法の組み合わせについて検討する. 例題は次式で与えられる Rayleigh 問題を考える⁽²⁾.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + (1.4 - 0.14x_2^2(t))x_2(t) + 4u(t) \\ x_1(0) &= x_2(0) = -5 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$J(u) = \int_0^{2.5} (x_1^2(t) + u^2(t)) dt \quad (11)$$

操作量拘束条件がない場合を例題1とし, 例題2には操作量拘束条件として $|u| \leq 1$ を与える. 計算結果を図2に示す. 操作量がない場合とある場合では得られた操作量の形が大きく変化している. いずれの計算も最適解

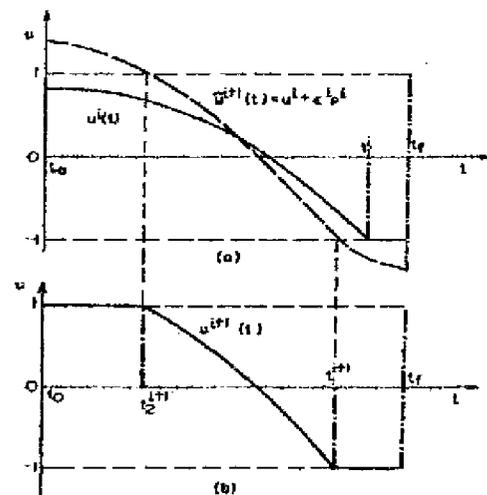


Fig.1 Clipping-off process
(a) Before-it (b) After-it

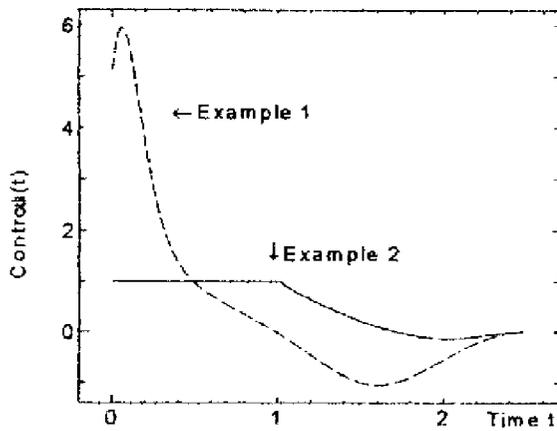


Fig. 2 Control function versus time (Example 1 & 2)

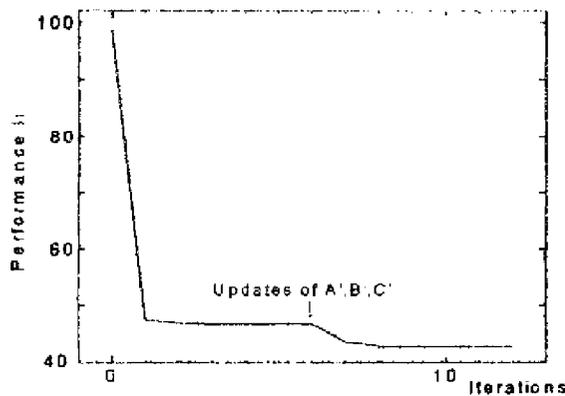


Fig. 3 Performance index versus iteration number (Example 2)

と一致しており、2次アルゴリズムとクリッピングオフ手法の組み合わせが有効に働いているのが簡単な例題を通してではあるが、確認できる。図3に繰返数ごとの評価関数の変化を示す。

4. 掃還飛行の運動方程式

状態方程式、拘束条件、初期条件、終端条件は次のようになる。

状態方程式は

$$\dot{h} = v \sin \gamma \quad (12)$$

$$\dot{\Lambda} = \frac{v}{R+h} \cos \gamma \sin \chi \quad (13)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{R+h} \frac{\cos \gamma \cos \chi}{\cos \Lambda} \quad (14)$$

$$\dot{v} = -C_L^n \frac{v^2 \rho}{2WL} - C_{D0} \frac{v^2 \rho}{2WL} - g \sin \gamma \quad (15)$$

$$\dot{\gamma} = C_L \cos \mu \frac{v \rho}{2WL} + \left(\frac{v}{R+h} - \frac{g}{v} \right) \cos \gamma \quad (16)$$

$$\dot{\chi} = C_L \sin \mu \frac{v \rho}{2WL \cos \gamma} \sigma - \frac{v}{R+h} \cos \gamma \cos \chi \tan \Lambda \quad (17)$$

このとき、状態量は

- h : 高度, v : 速度
- Λ : クロスレンジ角, γ : 飛行経路角
- θ : ダウンレンジ角, χ : 方位角

であり、図4にその模式図を記す。

操作量は

- C_L : 揚力係数, μ : バンク角

である。また、

- g : 重力加速度, $g(h) = G \cdot ME / (R+h)^2$
- ρ : 空気濃度, $\rho(h) = \rho_0 \cdot \exp(-\beta h)$
- R : 地球半径, ME : 地球重量
- ρ_0 : 地表での空気濃度,
- β : 単位高さによる空気濃度変化率の逆数であり、その値を表1に示す⁽³⁾。ところで
- C_{D0} : ゼロ抵抗係数,

WL : 翼面荷重 (オービタ質量/翼面積) はオービタの種類に依存する。それらは揚抗比 $E = \text{揚力} / \text{抗力}$ より決まっており、今回の計算では $E = 1.4, 2.22, 3.0$ を使用した。揚抗比により決定される値を表2に示す⁽⁴⁾。また $C_{L,max}$ は

$$E \geq C_L / (C_{D0} + k C_L^2) \quad (18)$$

が常に成り立つように定めている。

操作量拘束条件は

$$-90[\text{deg}] < \mu < 90[\text{deg}], \quad 0 < C_L \leq C_{L,max}$$

与えられる。

初期条件、終端条件を表3に与える。これは、赤道上空高度 242km の円軌道における全エネルギーの 97% で再突入態勢に入り、着陸地点へグライダー滑空により着陸するための条件である。

本研究では簡単化のため動圧及び熱的拘束、空気濃度の偏りや風の影響は考慮していない。

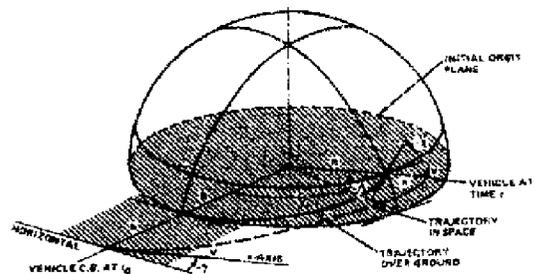


Fig. 4 Coordinate system

Table1 Parameters

R [km]	6.37×10^3
G [$\text{km}^3/\text{kg s}$]	6.67×10^{-20}
ME [kg]	6.00×10^{24}
ρ_0 [kg/km^3]	1.22×10^9
β [$1/\text{km}$]	13.85×10^{-2}

Table2 Vehicle characteristics

E	C_{D0}	k	n	WL	$C_{L,max}$
1.40	0.109	1.45	2.18	150	0.31
2.22	0.04	1.00	1.86	250	0.16
3.00	0.028	1.46	2.21	250	0.15

Table3 Initial and final conditions

	$t_0=0$	$T_f=t_f$
h [km]	95.00	30.00
Λ [deg]	0.00	
Θ [deg]		3.00
v [kms ⁻¹]	7.85	1.12
χ [deg]	0.00	
γ [deg]	-1.25	-2.70

5. クロスレンジ角を最大化する軌道計算

揚抗比によって到達できる最大クロスレンジ角が異なり、また揚抗比が大きいくほど操作量の取りうる範囲が狭くなることから分かっている。これにより目標とする着陸地点の緯度によって、最適な揚抗比を選ぶ必要がある。そのため着陸点を定める前にクロスレンジ角 Λ を最大化するという計算を行った。評価関数として

$$I = -\Lambda(t_f) + \{(v(t_f)/v_f - 1)^2 + (\gamma(t_f)/\gamma_f - 1)^2 + (h(t_f)/h_f - 1)^2\} \quad (19)$$

を選び、最適制御問題として定式化した。この評価関数は終端条件を満たしながらクロスレンジ角 Λ を大きくすることを要求している。計算条件は次のとおりである。

- 1) E=1.40 の場合: $C_L^0=0.26$,
 $\mu^0=0.87[\text{rad}]$,
- 2) E=2.22 の場合: $C_L^0=0.15$,
 $\mu^0=1.05[\text{rad}]$,
- 3) E=3.00 の場合: $C_L^0=0.15$,

$$\mu^0=1.05[\text{rad}],$$

共通の条件として、 $t_f=2000[\text{sec}]$ とした。なお C_L^0, μ^0 は操作量の初期値をあらわし、それぞれの値は試行錯誤ののち決定した。

計算の結果、最大クロスレンジ角 Λ_{max} は

- 1) E=1.40 の場合: $\Lambda_{max}=23.2[\text{deg}]$
- 2) E=2.22 の場合: $\Lambda_{max}=37.3[\text{deg}]$
- 3) E=3.00 の場合: $\Lambda_{max}=56.1[\text{deg}]$

となった。

図5は揚抗比Eと到達できる最大クロスレンジ角の関係を示す。最大クロスレンジ角に関しては参考文献[4]とほぼ同様な値を示した。

(注) $A^i=0, B^i=0, C^i=I$ 以外の場合、アルゴリズムが発散してしまう現象が起きた。そのため、今回の計算においては最初から $A^i=0, B^i=0, C^i=I$ とおいている。

6. 着陸地点を考慮した軌道計算

着陸地点には国産スペースシャトル基地の候補地として名前の挙がっている太平洋上のクリスマス島と岩手県の遠野を想定した。

着陸地点へ到達可能な軌道算出のため、評価関数を次のようにおいた。

$$I = (\Lambda(t_f)/\Lambda_f - 1)^2 + (v(t_f)/v_f - 1)^2 + (\gamma(t_f)/\gamma_f - 1)^2 + (h(t_f)/h_f - 1)^2 \quad (20)$$

これは終端条件からのずれと着陸地点からのずれがそれぞれ小さくなることを要求している。

計算条件は次のとおりである。

- 1) クリスマス島(北緯2.73度)の場合:
E=1.4, $t_f=800[\text{sec}]$,
 $C_L^0=0.20, \mu^0=0.42[\text{rad}]$
- 2) 遠野(北緯39.32度)の場合:
E=3.0, $t_f=1900[\text{sec}]$,
 $C_L^0=0.15, \mu^0=1.31[\text{rad}]$

それぞれの計算で使う揚抗比Eは前章の結果を踏まえて決定した。なお、クリスマス島へはすべての揚抗比で到達できるが C_L の範囲が狭くならないように E=1.4 を選んだ。

また、 C_L^0 、 μ^0 、 t_f の値は試行錯誤ののち決定した。

図6はオービタの高度をあらわしている。軌道が上下に振動しているのは、揚抗比を一定にしたときの特徴である。また終端付近の動きはこの問題の強い非線形性を示している。図7は上から軌道を見た図である。弧を描くようになめらかに目的地へ近づいていく様子が分かる。図8に状態量 v の時間変化を示す。初めは減速されていない。これは空気濃度が薄いためと考えられる。そして十分濃くなってから減速されている様子が分かる。図9、10に x 、 y の挙動を示す。 x は Λ に、 y は h にそれぞれ同調しているのがわかる。図11、12に操作量 C_L 、 μ をそれぞれ示す。クリスマス島に関しては C_L 、 μ がともに拘束条件の範囲内に収まっている。それに対して、遠野の C_L は拘束条件に抑え込まれた形となっており、それに対応して μ もほとんど身動きできない状態にある。このことは、遠野への帰還はクリスマス島に比べ難しい問題を抱えていることを示唆している。

7. 結言

2次アルゴリズムとクリッピング手法の組み合わせにより、操作量拘束を直接とり扱うことのできる改良アルゴリズムを提案した。それによりオービタの問題を最適制御問題として定式化して軌道計算を行った。なお、操作量の初期値や飛行時間を試行錯誤で求めなければならないなどの問題点が残っており今後の課題である。

参考文献

- [1] V. H. QUINTANA and E. J. DAVISON ; Clipping-off gradient algorithms to compute optimal controls with constained magnitude, (1974), INT. J. CONTROL, VOL. 20, NO. 2, 243-255
 [2] Jacobson, D. H. and Mayne, D. Q. ; Differential Dynamic Programming, (1970), Academic Elsevier, New York.

- [3] Kugelmann, B. and pesch, H. j. ; A New General Guidance Method in Constrained Optimal Control, Part1 : The Numerical Method, Part2: Application to Space shuttle Guidance, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.67, pp.421-435, 437-446, 1990.
 [4] E. D. Dickmanns ; Maximum Range Three-Dimensional Lifting Planetary Entry, NASA Technical Report, 1972

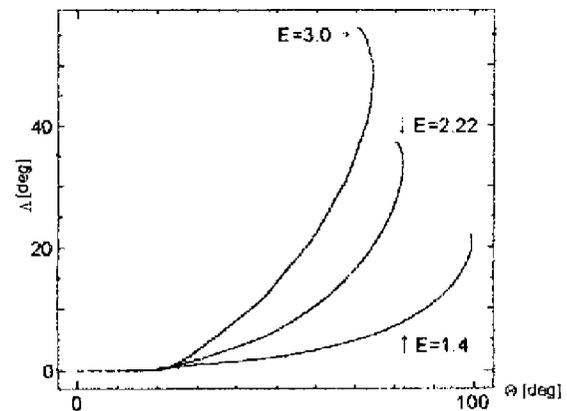


Fig.5 $\Lambda - \Theta$ curve

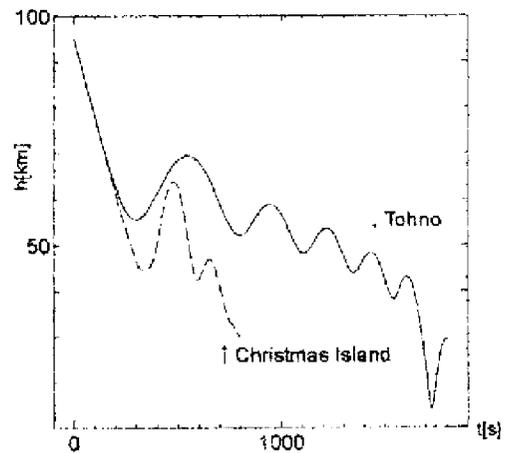


Fig.6 $h-t$ curve

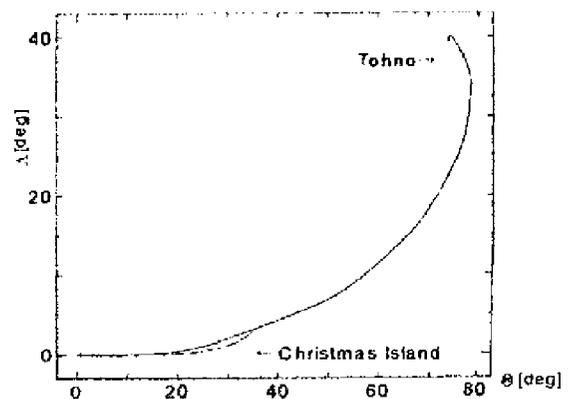


Fig.7 $\Lambda - \Theta$ curve

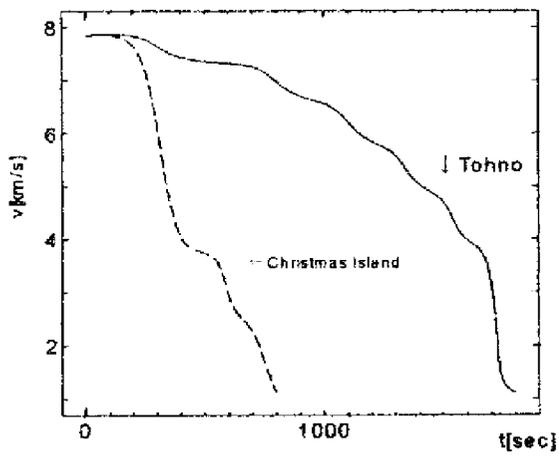


Fig. 8 v-t curve

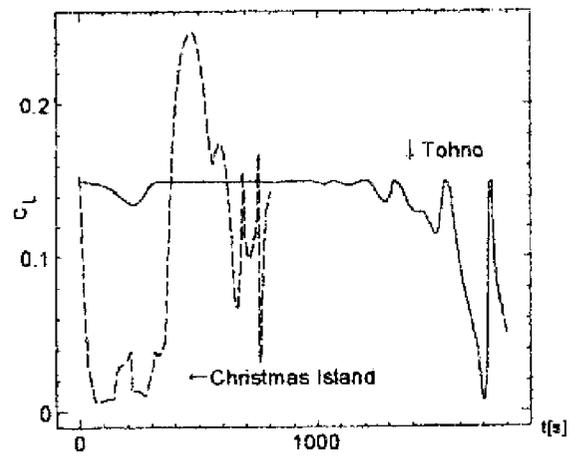


Fig. 11 C_L -t curve

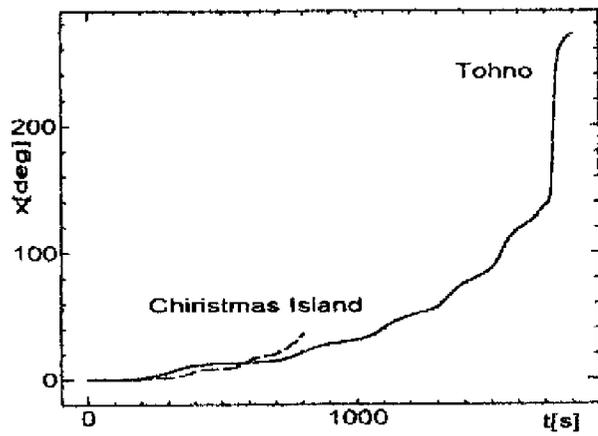


Fig. 9 x-t curve

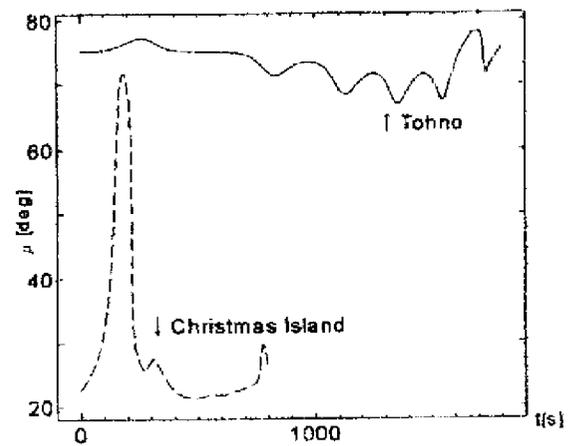


Fig. 12 μ -t curve

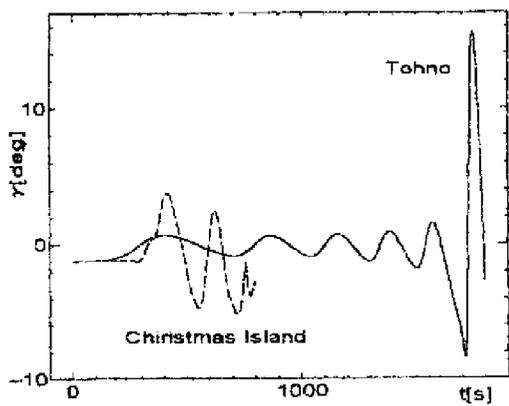


Fig. 10 γ -t curve