計測自動制御学会東北支部 第181回研究集会(1999.5.21) 資料番号 181-5

ステップ加圧法による非線形拡散係数の測定について

A New Measuring Procedure for Non-linear Diffusivities with the One-step Outflow Method

○原 道宏,宮本和佳○Michihiro Hara, Kazuyoshi Miyamoto

岩手大学

Iwate University

キーワード: 計測(measurement),水分容量(water capacity),水理特性(hydraulic characteristics),ステ ップ加圧法(one-step outflow method),透水係数(hydraulic conductivity),閉じた表現形(closed form expression),土壤(soil),非線形水分拡散係数(non-linear water diffusivity).

連絡先: 〒020-8850 盛岡市上田3-18-8 岩手大学 農学部 農林生産学科 生産環境学講座 農業環境制御工 学研究室 原 道宏, Tel.: (019)621-6125, Fax.: (019)621-6125, E-mail: mrhara@iwate-u.ac.jp

はじめに

土壌水分拡散係数(以下、拡散係数)は土壌 の体積含水率の関数であり、乾燥時には湿潤時 の数千分の1になること、また、多くの土壌に ついて、この関数形が体積含水率の指数関数で 近似できる(Gardner 土壌)ことも知られている。

そこで、Gardner 土壌について、ある圧力のも とで平衡状態にある土壌にさらに一定の圧力を 印加したときに得られる流出水量を求める「ス テップ加圧法」に関する数値解を差分法により 求めた。さらに、数値解について見られた規則 性をもとに、解を閉じた形の数式として表した。

一方、園芸用床土土壌 "ソイルフレンド" (三 井東圧肥料(株)の商標名)を対象に、ステッ プ加圧法を実施し、従来法により拡散係数を求め、 それが指数関数に近いことが分かった。

ついで、上述の閉じた形の解をソイルフレンド の流出水量に当てはめたところ、水分域を限れば、 実測値と良く一致した。したがって、この「流出 水量を閉じた形の解により curve fitting する方法」 は、拡散係数の数値が広範囲にわたって変化する Gardner 土壌に対して適用しうる測定方法であると いえる。

拡散係数のさらに複雑な関数形に関する検討 等、今後に残された課題は多いが、流出水量を代 数式で表し得たこと、また、それを拡散係数の測 定に応用し得ることが分かった。

- 1 -

理論

水分拡散係数が体積含水率の指数関数であるときの直線 一次元流についての理論解を求める。

1. 支配方程式と初期条件、境界条件



2. 拡散の初期段階についての解

拡散開始直後は試料長が有限であることの影響は小さ く、試料長を無限大としたときの解で近似される。試料長 が無限大のときはボルツマン (Boltzmann) 変換 [5] により 支配方程式は常微分方程式 [6] になる。



式[7]のf(0)は、ここでは、指数関数である場合を扱う。



式 [6] の数値解を求める際、式 [8] の条件は直接には使え ず、代わりに式 [12] を仮定する。式 [12] のgをある値に設定 して常微分方程式を解いたとき、解が条件 [8] を満たすよう なgを探すわけである。そのようなgと式 [11] の $r = \Theta_i - \Theta_f$ との組を Table 1 に示す。また、解をFig.1に示す。



Table 1 $r = \Theta_i - \Theta_f$ に適合するg、 g_i の組み、および

$SD_i \geq 2 e^r SD_i$

| | ••••••••• | | | |
|---------|-----------------------|------------------------|-------------|---|
| r=⊖1-⊖[| log ₍₀ [g] | log ₁₀ [g1] | SD <u>i</u> | log ₁₀ (2 e ^r SD ₁) |
| | | | | |
| 1 | 0.137241 | 0.354389 | 0.415971 | 0.354388 |
| 2 | 0.535310 | 0.969604 | D.63093B | 0.969606 |
| 3 | 0.821061 | 1,472503 | 0.738910 | 1.472505 |
| 4 | 1.068049 | 1.935638 | 0.791465 | 1,936540 |
| 5 | 1.298582 | 2.384318 | 0.016231 | 2.384316 |
| 6 | 1.521709 | 2.824592 | 0.827547 | 2.824589 |
| 7 | 1.741485 | 3.261516 | 0.832574 | 3.261514 |
| â | 1.959764 | 3.696941 | Ó. 834754 | 1.696944 |
| 9 | 2.177393 | 4.131718 | 0.835679 | 4.131720 |
| 10 | 2.394742 | 4.566214 | 0.836066 | 4.566215 |
| 11 | 2.611972 | 5.000592 | 0.836225 | 5 (00592 |
| 12 | 2.829154 | 5.434921 | 0.836289 | 5.434920 |
| 13 | 3.046314 | 5,869228 | 0.836316 | 5.869229 |
| 14 | 3.263467 | 5.303528 | 0.836327 | 6.303529 |
| 15 | 3.480617 | 6.737825 | 0.836331 | 6.717825 |
| 16 | 3.697765 | 7.172120 | 0.836332 | 7.172120 |
| | | | | |



Fig.1 ボルツマン方程式の数値解 横軸は $y_i = x/(2/\sqrt{D[\Theta_i]t})$ 、縦軸は $\Theta - \Theta_{f}$ 。 曲線は、上から、r = 16, (-1), 1に対する解。

2.2 排水量

実際問題として、0<yi<Yにおける土壌水分の減少量が総 排水量の f 倍 (f <1) になるYの値がいかほどになるかはボ ルツマン解の適用範囲を知る上で重要である。式 [13a]によ る計算結果をFig.2 に示す。総排水量は式 [14] による計算結 果をFig.3 に示されるが、r が大きくなると一定値に近づく のが分かる。単位断面積当たりの実排水量は式 [16] により 求められる。







Fig.3 式[14]により求められる排水量 点は数値計算、曲線は式[15]によるあてはめ。

2.3 排水量と排水端における水分勾配

排水量と排水端における水分勾配にはゼロ次モーメント (式 [17])の制約からくる関係(式 [18a] ~[18c])がある。 式 [18b]の関係は、Table 1 の数値解により確認される。



2.4 初期段階における水分分布の代数表現

式 [20] の $\phi[\Theta]$ を ($\phi \sim 1$) / ($e^{r} - 1$) の形に規格化する と、 Fig.4(a) のように16本のグラフがおおむね重なり合 う。そこで、 $\phi[\Theta]$ を式 [20] の形に表現することを試みた。 べきpと端点y_Lは、ゼロ次モーメントの制約を満たすべく、 数値解のg₁とsD₁と一致するようにした。このとき、pと y_Lの値は式 [22]、[23] の解として得られる。式 [22] の ₂F₁ は超幾何関数である(Abramowitz and Stegun, p556-566)。この ようにして得られたpとy_Lは、それぞれ、 Fig.4(b) および (c) の点として示される。曲線は、式 [23], [24] によるあて はめである。Fig.4 (b) および(c) から、7 ≤ r ≤ 16,の範囲にお いてはおおよそ p=4.0 および y_L=2.4 であることが分かる。





(c)

r

Fig.4 規格化された ¢と指数p および端点y_L (a) 規格化された ¢、(b) 指数p、(c) 端点y_L

3. 中期段階以降についての解

3.1 差分法による求解方法

中期以降の解は、式 [19] で導入した拡散係数比 ϕ を従属変 数とする式 [25] を条件 [26] ~ [28] のもとに求めた。初期値 には、X=1、T = T₀ において 10⁻⁶のオーダー以上の誤差 を出さないよう、y_i =6 に対するボルツマン解を用いた。求 解はクランク-ニコルソンの陰解法(差分法)で、時間刻み は $\Delta T = 10 (\Delta X)^2 / \phi_L$ とし、解の誤差は 10⁻⁸ ϕ_L 以下と した。解の収束を速めるため、T, T- Δ T, T-2 Δ T, T-3 Δ Tにお ける解からT+ Δ Tにおける解を予測した。これにより計算時 間は約 1/10 になった。得られた ϕ [X,T] から式 [30] により平 均含水率を求め、M=V(Θ_i - Θ)/B により排水量を求めた。



3.2 差分法による数値解

3.2 (1) 排水量 M

Fig.5 は排水量を規格化して示したものである。点が数値

解、実線は解の代数表現(後述)である。



3.2(2) 拡散係数比 φの分布(数値解)

Fig.6 中の点は拡散係数比 ϕ の分布を示す。実線は、式 [31] によるあてはめである。べき p は、つぎの3とおりの 方法で定めてみた。p(1) 平均含水率が合致する、 p(2) 排水 端における勾配が合致する、 p(3) 二乗誤差が最小になる。 このようにして定められたべき p の値を **Fig.7** に示したが、 p(1) と p(3) は類似しており、平均含水率の合致するものは 同時に、二乗誤差もほぼ最小になる。 $\theta - \theta_{f}$ の5以上の範 囲では、 いずれの p も 2.0 にきわめて近い。5以下の $\theta - \theta_{f}$ に対しては、p(1) は式 [32] で近似され、**Fig.6** 中の実 線により示されている。

 $1 + (\phi_L - 1) (1 - (1 - X)^p),$ $p[\hat{\bullet} - \Phi_f] = a - b + Exp[-c (\hat{\bullet} - \Phi_f)]$ a = 2.00083, b = 0.248539, c = 0.818661



Fig.6 拡散係数比 ø の分布

点が数値解、実線は式 [31] によるあてはめ。 べきp は平均含水率が合致するよう定めた。



Fig.7 式[31]におけるべきpの値 上から、p(3),p(1),p(2)の順。 実線は式[32]による p(1)のはてはめ。

3.2 (3) OL と の 差

 $\Theta - \Theta_{f}$ に対する表現が式 [33] のように得られ、この積分 は式 [34 a] となり、特に p=2 の時は式 [34 b] になる。 Θ と Θ_{L} の関係は**Fig.8** に示されるように、差 $\delta = \Theta_{L} - \Theta$ はほぼ 一定で、 0.613 である。ちなみに、 $e^{0.613} = 1.846$ は、 Muazu (1990) の公式に現れる係数 $e^{2}/4$ の値に等しい。





Fig.8 ⊕と ⊕_L の関係 点が差分解、実線が式 [34b]。

3.2 (4) 拡散係数比 φ の分布 (代数表現)

 $\Theta - \Theta_f$ の5以上の範囲ではべき p が 2.0 にきわめて近い ことから、ゼロ次モーメントの制約 [35] 、それから導かれ る [36] を満たす形で、拡散係数比 ϕ の代数表現が得られ る。即ち、これに式[31] の表現を代入すれば、式 [37] が得 られる。ここで、T の関数なのは ϕ_L だけであるので、左辺 を微分し、式 [38]、[39] が得られる。これをT について積 分し、式[40]、[41]を得る。





p=2の時、式 [38] の $\varphi[\phi_L]$ 、h $[\phi_L]$ は式 [42]、[43] になる。 Fig.9 に初期段階以降における h $[\phi_L]$ と T の関係を示す が、ごく初期を除き式 [40] の関係が成り立っていることが 分かる。また、式 [43] に示される h $\{\phi_L\}$ は、 ϕ_L の大きい 範囲では、ほぼ、 $1 / (\phi_L - 1)$ にきわめて近い。式 [40] から T と ϕ_L の関係が求まるので、順次、排水量 M が求められ る。そのようにして求めたものが Fig.5 の規格化された排水 量 B M / Vの実線として示されている。ごく初期段階を除 き、T の全域で数値解とよく合致している。





Fig.9 初期段階以降における $h[\phi_L]$ とTの関係

4. 流出水量の測定と拡散係数の計算

4.1 実験装置及び測定結果

ステップ法の実験装置を Fig.10 に示す。はじめ、圧力 50 cmH2O に調整した。圧力を100, 200, 400, 800, 1600 cmH2O に加圧したときの流出水量を Fig.11 中の点により示す。

4.2 今回の方法による拡散係数の計算結果

今回得られた理論式 [44] によりあてはめたものをFig.11 中の実線により示す。はてはめは最小二乗法によった。得 られたパラメータの値を Fig.12 に示す。得られた拡散係数 の関数値を Fig.13 と 14 中の直線により示す。



4.3 従来法による拡散係数の計算結果

Muazuら(1990)の計算式 [45] により求められた拡散係数

の値をFig.13と14の折れ線として示す。



5.従来法と今回の方法との比較

Muazuら(1990)の計算方法により求められた拡散係数は 今回の方法による値とおおよそにおいて一致しているが、 低圧域(h=100,200 cmH2O)の低水分域において合いが良 くない。また、中圧域(h=400,800 cmH2O)においてもや はり、低水分域において合いがやや良くない。高圧域 (h=1600 cmH2O)においては、平均的には合致ているが、 Muazuら(1990)の方法による計算結果にはノイズが多い。 これは、測定系における電子天秤の影響かもしれない。

結論

今回、数値計算の結果を整理する形で、ステップ加圧法 における流出水量(排水量)を代数式により精度良く表す ことが出来た。適用は、拡散係数が体積含水率の指数関数 である場合に限られる。今回供試したソイルフレンドは、 200 cmH2O 以上の高圧域でこの性質を備えていると見ら れ、範囲を限れば、今回の結果が適用できる。指数の係数 が水分域の違いによって異なる等、さらに複雑な拡散係数 の場合については、なお検討を要する。

参考文献

- Abramowitz, M., Stegun, I. A. 1972. Handbook of Mathematical Functions. Dover, New York, pp1046.
- Crank, J. 1975. The Mathematics of Diffusion. 2nd ed. Oxford Univ. Press, London, pp414.
- Doering, E. J. 1965. Soil water diffusivity by the one-step method. Soil Sci. 99 : 322-326.
- 4) Gardner, W. R. 1956. Calculation of capillary conductivity from pressure plate outflow data. Soil Sci.Soc. Am. Proc.
 20: 317-320.
- 5) Muazu, S., Skopp, J., Swarzendruber, D. 1990. Soil water diffusivity determination by a modified one-step outflow
 method. Soil Sci. Soc. Am. J. 54 : 1184-1186.
- 6) Passioura, J. B. 1976. Determining soil water diffusivity from one-step outflow experiments. Aust. J. Soil Res. 15 : 1-8.
- Reichardt, K., Nielsen, D.R., Biggar, J.W. 1972. Scaling of horizontal infiltration into homogeneous soils. Soil Sci. Soc. Am. Proc. 38: 241-245.



Fig.10 ステップ加圧法に用いた測定装置



•



Fig.12 圧力hと各パラメーターの関係





Fig.14 400cmH2O~1600cmH2OにおけるMuazuの解析と原の解析の比較