計測自動制御学会東北支部 第182回研究集会 (1999.6.25)
資料番号 182-9

行列式の群論的考察

Group-theoretic Consideration of Determinant

○五十嵐 三武郎*

○Saburo Igarashi*

*いわき明星大学

*Iwaki Meisei University

キーワード： 行列式(determinant)，群論(group theory)，巡回群(cyclic group)，置換(permutation), 互換(transposition)

連絡先： 〒970-8551 いわき市中央台飯野5–5–1 いわき明星大学 理工学部 機械工学科
五十嵐 三武郎, Tel.: (0246)29-7182，Fax.: (0246)29-0577，E-mail: igarashi@iwakimu.ac.jp

1. はじめに

関孝和がライプニッツに先駆けて世界で最初に用いたとされる行列式は２次や３次の場合はサラス(Sarrus)の方法で定義されている. ４次以上になるとこの方法は適用できず, 次のように定義される.

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

$$= \sum_{(p_1, p_1, \ldots, p_n)} \mathrm{sgn}\ (\sigma)\ a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \tag{2}$$

ここに$(p_1, p_2, \cdots, p_n)$は$(1, 2, \cdots, n)$の異なるどれかであり, σは置換で次のように定義される.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \equiv (p_1, p_2, \cdots, p_n) \tag{3}$$

[右辺の表現でカンマの区切りに注意.] これは1がp_1に,2がp_2にnがp_n に対応して置換されることを意味している. また$\sum$の記号の中のsgnは符号関数で偶置換のとき1,奇置換のとき-1を与える.

従来のテキスト[1)〜4)]においては一般的に互換,偶置換や奇置換の概念について若干述べているだけで具体例な応用面についての記述に乏しい. このためテキスト[5)]では４次以上の行列式の定義としてより低次の行列式の余因子展開を用いて説明している.

そこで本研究では行列式の定義式における偶置換と奇置換について群論を用いて直感的に説明し,従来の説明に対して見通しのよい説明法を与えようとするものである.

2. 置換群,巡回群および互換[6)〜7)]

恒等置換Iは$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$で,いわゆる単位元である. ２つの置換$\sigma_1, \sigma_2$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の積$\sigma_1\sigma_2$は次のように定義される.

$$\sigma_1\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

σ_1の逆元σ'とは$\sigma_1\sigma' = I$となるσ' のことで,上の例では

$$\sigma' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である.

さてσがi_1をi_2に,i_2をi_3に,$\cdots$, i_{n-1}をi_nに,i_nをi_1に対応させ他の文字は動かない置換であるとき

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{n-1} & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_n & i_1 \end{pmatrix} \equiv (i_1 i_2 \cdots i_n) \tag{4}$$

と記す.このような置換を巡回置換といい,nをその長さという. [式(3)とは異なってカンマのない点に注意.] 上の例では$\sigma_1 = (123)$,$\sigma_2 = (231)$, $\sigma_1\sigma_2 = (132)$で長さはすべて3である. 任意の置換τは互いに文字を共有しないいくつかの巡回置換の積となる. 長さ2の巡回置換を特に互換という. 任意のτはまたいくつかの互換の積としても表される[6]：

$$\tau = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_l \ (\sigma_i \text{は互換}) \tag{5}$$

このように互換の積として任意の置換τを書く方法は幾通りもあるが, そのとき現れる互換の数lは必ず偶数であるかまたは常に奇数である.(4)式の場合には$(n-1)$個の互換$\sigma_1 = (i_1 i_2), \sigma_2 = (i_1 i_3), \cdots, \sigma_{n-1} = (i_1 i_n)$ができる.

3. 行列式への応用

2,3,4次の行列式の場合を具体的に考えよう. $n = 2$では(1,2)と(2,1)で(1,2)は恒等置換,(2,1)は(12)の巡回置換からなっている. $n = 3$では (1,2,3)は恒等置換;(2,3,1)と(3,1,2)はそれぞれ(123), (132) の巡回置換; (1,3,2),(3,2,1),(2,1,3)は(23),(13),(12)の巡回置換からなっている. そのうち3項の巡回置換は(123)=(12)(13),(132)=(13)(12)と2つの互換の積で表される.すなわち偶置換となる.$n = 4$では

(1,2,3,4),(2,3,4,1),(3,4,1,2),(4,1,2,3)

(1,3,4,2),(2,4,1,3),(3,1,2,4),(4,2,3,1)

(1,4,2,3),(2,1,3,4),(3,2,1,4),(4,3,1,2)

(1,2,4,3),(2,3,1,4),(3,4,2,1),(4,1,3,2)

(1,4,3,2),(2,1,4,3),(3,2,4,1),(4,3,2,1)

(1,3,2,4),(2,4,3,1),(3,1,4,2),(4,2,1,3)

と24個の係数があり,恒等置換,巡回置換の他に巡回置換でないものが現れる. 例えば$(3,4,1,2)$や$(4,1,2,3)$は巡回置換の積で表される. 具体的には上式に対応する巡回置換の表現は次のようになる.

I,(1234),(13)(24),(1432)	:	偶奇偶奇
(234),(1243),(132),(14)	:	偶奇偶奇
(243),(12),(13),(1423)	:	偶奇奇奇
(34),(123),(1324),(142)	:	奇偶奇偶
(24),(12)(34),(134),(14)(23)	:	奇偶偶偶
(23),(124),(1342),(143)	:	奇偶奇偶

ここに4項からなる巡回置換は奇置換, たとえば$(1234) = (12)(13)(14)$, $(1432) = (14)(13)(12)$, 3項からなる巡回置換は例えば$(234) = (23)(24)$, $(143) = (14)(13)$, したがって偶置換である. 全部で偶置換が12個,奇置換が12個となる.最終的には偶置換に1を,奇置換には-1を与えれば行列式の±1が定まる.

演習問題に出てくる例を示そう.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}\ (2{,}4{,}1{,}3)\ a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} =$$

$$\mathrm{sgn}\ (1243)\ a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} = -a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} = -abcd$$

[注]この場合は各行にゼロでない項が1項ずつしかないので定義式の$\sum$は上に示した項のみである.そのときの巡回群は(1243)となり３項の互換の積であらわされるので奇置換となる.

参考文献

1) 阪井 章: 理工系の線形代数入門, 共立出版 (1998)
2) 茂木 勇, 横手 一郎: 線形代数の基礎, 裳華房 (1996)
3) 石原 繁, 浅野 重初: 理工系の基礎 線形代数, 裳華房 (1995)
4) 宇喜多 義昌, 小野 英夫: 線形代数, 明星大学出版 (1991)
5) 阿部 寛治: 図解による線形代数とベクトル解析, 培風館 (1992)
6) 稲葉 栄次: 群論入門, 培風館 (1957)
7) アレキサンドロフ(宮本敏雄訳): 群論入門, 東京図書 (1960)