

圧電横効果振動子を用いた液体の粘度測定実験
Measurements of viscosity of liquid
using transversal effects of piezoceramic disk transducer

桃澤慎一[†] 島崎了輔[†] 今野和彦[†]

Shin'ichi Momozawa, Ryosuke Shimazaki, Kazuhiko Imano

[†]秋田大学 工学資源学部 電気電子工学科
Department of Electrical and Electronic Engineering,
Faculty of Engineering and Resource Science, Akita University

キーワード：粘度(viscosity), 円板形圧電振動子(piezoceramic disk transducer)
横効果(transversaleffect), 径方向振動(radial expansion mode)
共振抵抗(resonant resistance), 共振周波数(resonant frequency)

連絡先：〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1 秋田大学工学資源学部電気電子工学科
今野和彦, Tel.: (018)889-2490, Fax: (018)837-0406, E-mail: imano@ipc.akita-u.ac.jp

1. はじめに

石油樹脂工業, 塗料工業, 合成化学工業, 食品工業, 薬品工業などにおいて扱われる液体あるいは流体は, 加工, 精製, 管理および使用状態などの要求から動的な状態における粘度測定が必要とされている. 代表的な粘度計として細管粘度計や回転粘度計などがあるが, 定常流を用いて測定するために, 動的な状態における粘度の測定はできない¹⁾.

液体の動的粘度を測定する場合, 液体に振動を与えた時に, 粘性によって振動の状態が変化することから粘度を求める方法が用いられている. 近年, 水晶などの圧電材料を用いた振動体による粘度計が開発され, 数 kHz 以下や数 MHz の周波数における粘度測定が可能となった²⁾³⁾.

本研究は, 基本共振周波数が 113kHz 付近

にある円板形圧電振動子の横効果縦振動を新たに用いて, バイモルフや水晶振動体では測定できない数百 kHz 帯の周波数での液体の粘度測定の可能性を検討するものである.

圧電振動子を液体に接した状態では, 界面の液体は振動面に引きずられて振動する. この液体の振動は, 振動面に対して機械的な抵抗として作用し, 圧電振動子の見かけの共振特性を変化させる³⁾.

本報告では, 液体の粘度と密度の積と圧電振動子の共振抵抗, および共振周波数変化の関係に注目し, その理論的な検討, さらにそれに基づいた測定実験を行い, 基本共振とその高次共振における粘度測定の可能性について検討をおこなった.

2. 粘度測定原理

2.1 液体の粘度¹⁾

図1に示すように、液体中で振動板を振動させたときに速度勾配が生じたとすると、液体内部ではこの速度を一様化する摩擦力が生じ、振動面に近い液体はそれより遠い液体を引きずり、遠い液体はそれより近い液体を引き戻そうとする。液体のこのような性質が粘性であり、粘性による単位面積あたりの摩擦力をずり応力(せん断応力)と呼んでいる。

図1で、振動板を x 軸方向に動かしたとき、 z 軸方向にとった微小区間 z において液体の速度が v だけ変化したとする。ニュートン液体の場合、 z に働くずり応力 t は速度勾配(ずり速度)に比例し、

$$t = h \frac{\Delta v}{\Delta z} \quad (1)$$

となり、 $z \rightarrow 0$ の極限では、

$$t = h \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2)$$

と表される。(2)式はニュートンの粘性法則であり、比例定数 h が粘度である。

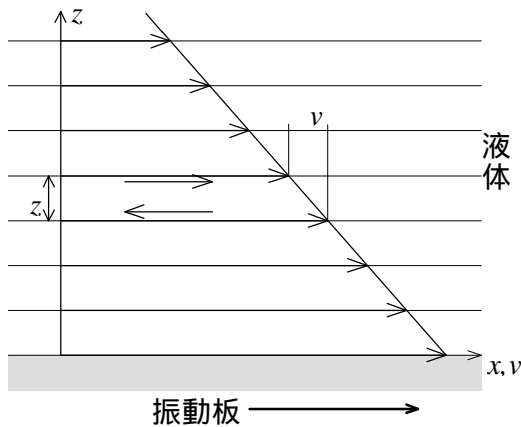


図1. 液体の流速変化

2.2 横効果縦振動を用いた粘度測定の原理

2.2.1 圧電振動子と液体に関する基本式³⁾⁴⁾⁵⁾

ここでは圧電振動子の片面が、無限の広さの粘性液体に接する場合を考える。図2で示す厚さ l の圧電振動子の下面を x - y 平面にとり、液体の範囲を $z > l$ とする。

まず、振動子について考える。この場合の振動は、 x 軸方向の単振動(ずり振動)のみとする。このずり振動により、振動方向に生じるずり応力を F_x/A (A : 振動子面積)とすれば、振動子内に生じる応力と張力の関係は次式で表される。

$$\frac{F_x(z,t)}{A} = m_T \frac{\partial u_x(z,t)}{\partial z} \quad (3)$$

ここで、 m_T は圧電振動子のずり弾性率、 u_x は x 方向の弾性変位である。

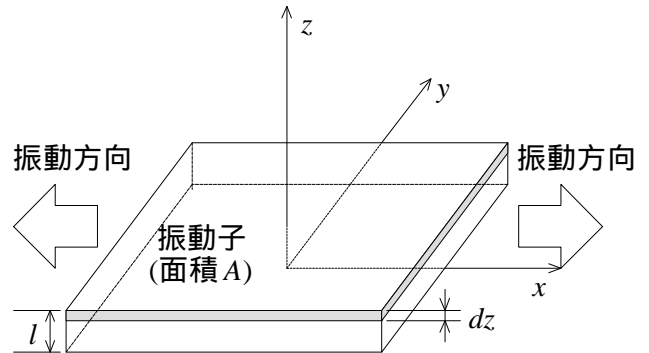


図2. 物理的振動モデル

また、振動面を厚さ dz の平板と考えると、これに力が作用することにより加速度が生じる。この関係は次の運動方程式で表される。

$$\left[\frac{\partial F_x(z,t)}{\partial z} \right] dz = r_T A dz \frac{\partial^2 u_x(z,t)}{\partial t^2} \quad (4)$$

ここで、 r_T は振動子の密度である。

したがって、(3)、(4)式より次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 u_x(z,t)}{\partial z^2} = \left(\frac{r_T}{m_T} \right) \frac{\partial^2 u_x(z,t)}{\partial t^2} \quad (5)$$

(5)式の解より、圧電振動子の振動変位は次のように表される。

$$u_x(z,t) = 2U_0 \cos(g_T z) \exp(j\omega t) \quad (6)$$

ここで U_0 は振動振幅、 g_T は伝搬定数である。

$$g_T = \omega \left(\frac{r_T}{m_T} \right)^{1/2} \quad (7)$$

次に液体について考える。液体の応力関係式は、(2)式のニュートンの粘性法則より、次式となる。

$$\frac{F_x(z,t)}{A} = h_L \frac{\partial v_x(z,t)}{\partial z} \quad (8)$$

ここで、 h_L は液体の粘度、 v_x は x 方向の液体速度である。また、このときの液体の運動方程式は次式で表される。

$$\left[\frac{\partial F_x(z,t)}{\partial z} \right] dz = r_L A dz \frac{\partial v_x(z,t)}{\partial t} \quad (9)$$

ここで、 r_L は液体の密度である。したがって、(8)、(9)式より、液体速度についての偏微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 v_x(z,t)}{\partial z^2} = \left(\frac{r_L}{h_L} \right) \frac{\partial v_x(z,t)}{\partial t} \quad (10)$$

流体速度は(10)式の解として次式で表される。

$$v_x(z,t) = V_0 \exp[-g_L(z-l) + j\{w - g_L(z-l)\}] \quad (11)$$

ここで、 V_0 は振動子と流体の境界における液体の速度、 g_L は液体の伝搬定数であり、

$$g_L = \left(\frac{wr_L}{2h_L} \right)^{1/2} \quad (12)$$

である。

振動子と流体の境界($z=l$)では、振動速度と流体速度が等しいことから、(6)、(11)式より

$$V_0 = 2jwU_0 \cos(g_L l) \quad (13)$$

となり、これを(11)式に代入することで、流体の速度を表す式が得られる。

$$v_x(z,t) = 2jwU_0 \cos(g_L l) \exp[-g_L(z-l) + j\{w - g_L(z-l)\}] \quad (14)$$

2.2.2 粘性流体による共振抵抗の変化³⁾

共振状態において振動と粘度の関係を考えるとき、振動面に作用する力 F は振動速度 v と機械抵抗 r の積で表すことができる。これより、(14)式を(8)式に代入し、さらに境界条件($z=l$)を与えると、次式を得る。

$$F_x(l,t) = -A(wr_L h_L)^{1/2} V_0 \cos\left(w + \frac{1}{4}p\right) \quad (15)$$

(15)式より、機械抵抗 r は $r = A(wr_L h_L)^{1/2}$ で

あり、これは、2.3 節で述べる振動子の共振抵抗 R_r に対応する。これより、共振抵抗 R_r は電気 - 機械の対応関係より次式で表される。

$$R_r = \frac{r}{k^2} = \frac{A(wr_L h_L)^{1/2}}{k^2} \quad (16)$$

(k : 振動子の電気機械結合係数)

(16)式より、共振抵抗は、流体の密度と粘度の積の $1/2$ 乗に比例すると推定される。

2.2.3 粘性流体による共振周波数の変化⁴⁾

まず、振動面上に液体が存在しない場合の共振を考える。このとき、 $z=l$ でのずり応力はゼロであり、(3)式の右辺は次式となる。

$$\left. \frac{\partial u_x(z,t)}{\partial z} \right|_{z=l} = 0 \quad (17)$$

ここで、(6)式において(17)式を満足するには $g_L l = n\pi$ なる条件が必要となり、共振角周波数は次式で表される。

$$w_0 = 2\pi f_0 = \left(\frac{m_T}{r_T} \right)^{1/2} \left(\frac{p}{l} \right) \quad (18)$$

振動子が粘性液体に接している場合は、振動面はずり応力を受ける。また、振動面とそれに接する液体に生じたずり応力は、大きさは等しく向きは逆である。ここで、(3)式に(6)式を、また(8)式に(14)式を代入すれば、次式が得られる。

$$\tan w \left(\frac{r_T}{m_T} \right)^{1/2} = - \left(\frac{wr_L h_L}{2r_T m_T} \right)^{1/2} \quad (19)$$

ここで $w = w_0 + \Delta w$ とし、さらに、(18)式を(19)式に代入することで次式が得られる。

$$\tan\left(\frac{\Delta w}{w_0}\right) p = - \left\{ \frac{r_L h_L}{2r_T m_T} (w_0 + \Delta w) \right\}^{1/2} \quad (20)$$

流体において $\Delta w/w_0 \ll 1$ であるため、共振周波数の変化は次式で表される。

$$\Delta f = -f_0^{3/2} \left(\frac{r_L h_L}{pr_T m_T} \right)^{1/2} \quad (21)$$

(21)式より，共振周波数の変化 Δf も，粘性流体の粘度と密度の積の 1/2 乗に比例することが推定できる．

2.3 共振抵抗および共振周波数の算出方法

圧電振動子の共振時における電気的な等価回路は図 3 のように表される³⁾．

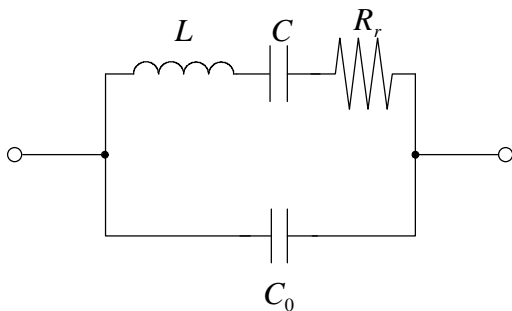
ここで，この回路のアドミタンス Y は次式で表される．

$$Y = \frac{1}{R_r + j\omega L + 1/j\omega C} + j\omega C_0 \quad (22)$$

ここで， C_0 は静電容量， R_r, L, C は機械的な振動と電気的な振動の対応したもので， R_r は機械抵抗 r ， L は重量 m ， C はコンプライアンス(バネ定数) C_m にそれぞれ対応している．

(22)式を実数成分(G)と虚数成分(B)に分けると次式のように変形できる．

$$\left(G - \frac{1}{2R_r}\right)^2 + (B - \omega C_0)^2 = \left(\frac{1}{2R_r}\right)^2 \quad (23)$$



$$R_r = r / k^2 \quad L = m / k^2 \quad C = C_m / k^2$$

図 3. 電気的等価回路

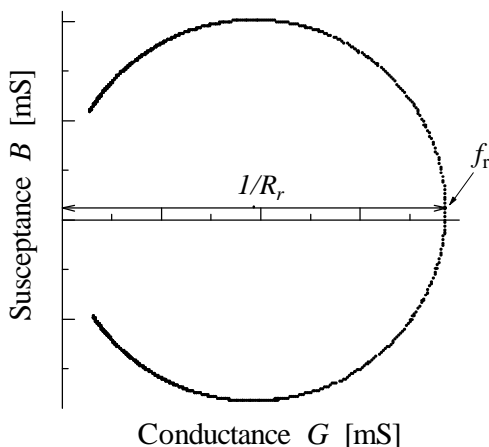


図 4. アドミタンス円線図

(23)式は，図 4 に示すように中心が $(1/2R_r, \omega C_0)$ であり，直径が $1/R_r$ の円を表している．したがって，(16)式で示した共振抵抗 R_r は，図 4 においてアドミタンス円の直径の逆数から得ることができる．つまり，粘度の違う液体では，アドミタンス円の直径が変化することが考えられる．また，コンダクタンス G が最大となるときの周波数から共振周波数 f_r の情報も得ることができる．

3 粘度測定実験

3.1 粘度測定系

粘度測定のための測定系を図 5 に示す．円板形圧電振動子を粘度の異なる試料液体に浸し，HP4395A(HEWLETT PACKARD 社製)のインピーダンスアナライザ機能を用いることで，圧電振動子の電気的共振特性であるアドミタンスの周波数特性を測定した．試料液体を入れる容器には，容積が 180[ml]のプラスチックの容器を使用した．

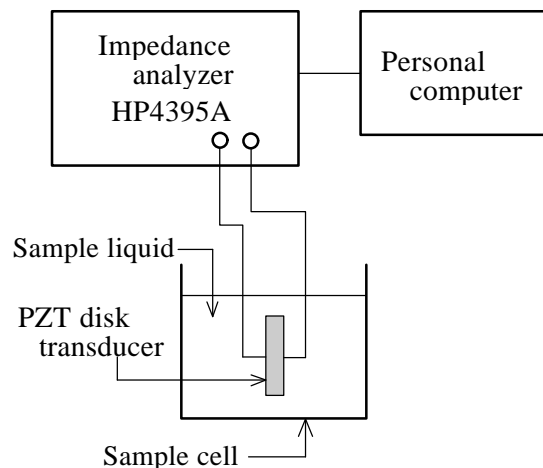


図 5. 粘度測定系

実験に使用した圧電振動子は，PZT の円板形圧電振動子であり，直径 20.0[mm]，厚さ 0.314[mm]である．この振動子をリード線により試料液体中につり下げた．振動子およびリード線の電極部分には絶縁処理を施した．

粘度測定においては，試料液体中でずり振動を行うような横効果縦振動，つまり径方向振動を用いる．図 6 に，空気中における振動

子の径方向振動のアドミタンス特性を示す。

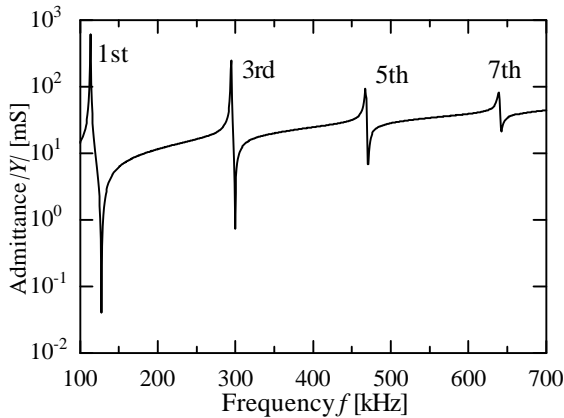


図 6. 径方向振動のアドミタンス特性 (空气中)

径方向振動は、空气中において 113.50[kHz] で基本共振し、この時の電気機械結合係数 k は 0.52、共振の鋭さ Q が 1020 であった。今回の測定では、この振動子の 3 次、5 次、7 次の高次共振も用いて、粘度測定をおこなった。高次の共振周波数は 3 次共振 295.00[kHz]、5 次共振 467.50[kHz]、7 次共振 639.25[kHz] である。

試料液体には、純水とグリセリンを用いた。グリセリン水溶液は、重量濃度を変化させることにより希望の粘度に変えることができ、MHz 帯の振動を加えた状態においてもニュートン液体としての特性を持つことが知られている³⁾。今回の測定では、粘度 η_L が 1.005[cP] である純水と、粘度の異なる 7 種類のグリセリン水溶液(99%で 1200[cP])を用いた。液体の温度は 20 ± 1 []とした状態で測定をおこなった。

3.2 基本共振における粘度測定結果

図 5 に示す測定系において、まず振動子を基本共振で振動させて測定をおこなった。

図 7 に、粘性液体に振動子を浸したときに得られたアドミタンス軌跡を示す。ここでは 4 種類の水溶液での測定結果を示す。図 7 のアドミタンス軌跡も含め、データ点はいずれの実験でも 801 点とした。図 7 の結果から、液体の濃度(重量比)が増加するほど、アドミタ

ンス軌跡が描く円の直径は極端に小さくなり、共振抵抗が大きく変化していることが考えられる。

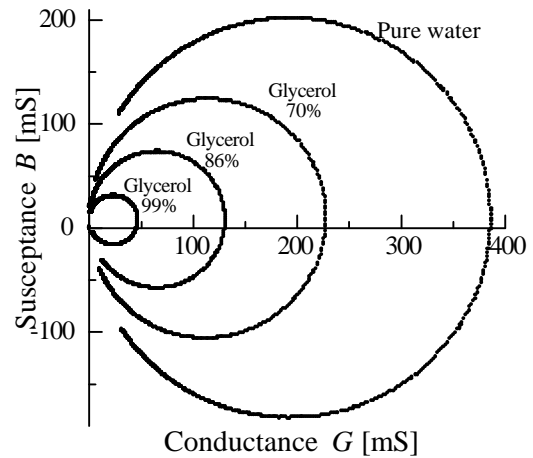


図 7. 試料液体のアドミタンス軌跡 (粘度：1200, 130, 23, 1[cp])

3.2.1 共振抵抗の粘度特性

図 7 で示したように、液体の粘度が大きくなれば、アドミタンス軌跡の描く円の直径が小さくなる結果が得られた。つまり、共振抵抗が増加していることになる。ここで、(16) 式で示したように、液体の粘度と密度の積の $1/2$ 乗の値に対する共振抵抗の変化を求めた。図 8 にこの結果を示す。

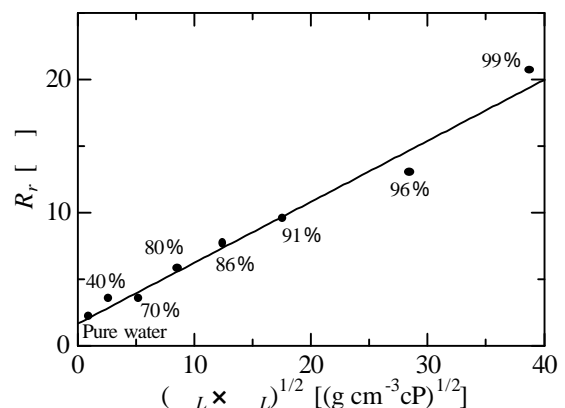


図 8. 共振抵抗の粘度特性 (基本共振)

図 8 を含め、以後に示す図中の直線は、1 次の最小二乗法によるものである。またプロット点に添えてある数字は、グリセリン水溶液の濃度を示す。この結果、図 8 に示すように、共振抵抗 R_r は(16)式での推定のように、 $(\rho_L \times \eta_L)^{1/2}$ に対して比例する結果となった。また、

実験の範囲では、共振抵抗は約 10 倍ほど増加する結果となった。

3.2.2 共振周波数の粘度特性

図 9 に、 $(r_L \times h_L)^{1/2}$ に対する共振周波数変化 Δf の測定結果を示す。この Δf は、純水での共振周波数に対する変化量である。これより、 Δf も(21)式で推定したように $(r_L \times h_L)^{1/2}$ に対して比例した結果が得られた。 Δf の全体の变化量は、約 2[kHz]程度であった。

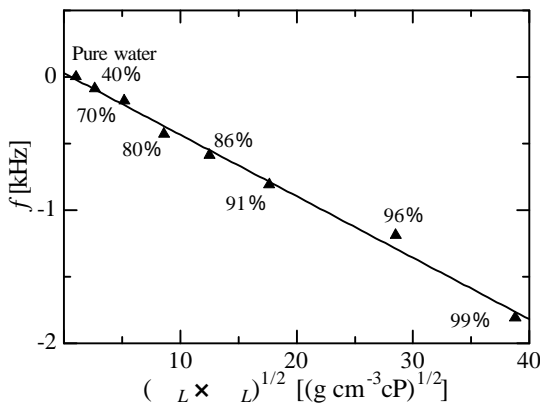


図 9. 共振周波数変化の粘度特性
(基本共振)

3.3 高次共振における粘度測定結果

基本共振を用いた測定と同様の方法で、3、5、7 次の高次共振でも測定をおこなった。

図 10 に、 $(r_L \times h_L)^{1/2}$ に対する R_r の変化の測定結果を示す。これより、共振抵抗 R_r は高次共振においても $(r_L \times h_L)^{1/2}$ に対して比例する結果となり、粘度測定も可能であると考えられる。また、共振の次数が高くなるほど共振抵抗の値が大きくなっており、 R_r の周波数依存性を示唆していると考えられる。

図 11 には、 $(r_L \times h_L)^{1/2}$ に対する共振周波数変化 Δf の特性を示す。図 11 は、 Δf の変化分のみを示している。これより、高次共振においても $(r_L \times h_L)^{1/2}$ と Δf は比例関係を示したが、共振が高次になるにしたがって、プロット点にばらつきが見られた。

今回の測定では、粘性に対する Δf の変化分は共振の次数に関係なくほぼ一定で、その値は 2[kHz]程度であった。

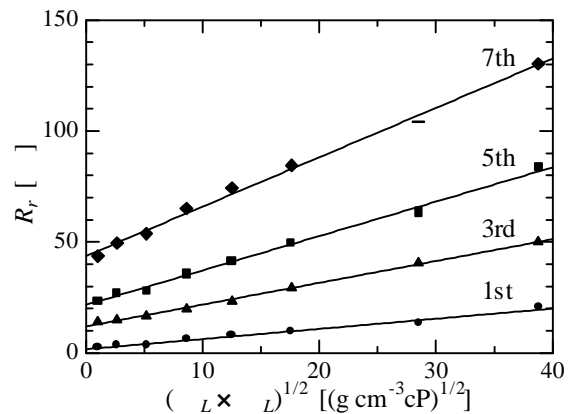


図 10. 共振抵抗の粘度特性
(基本～7次共振)

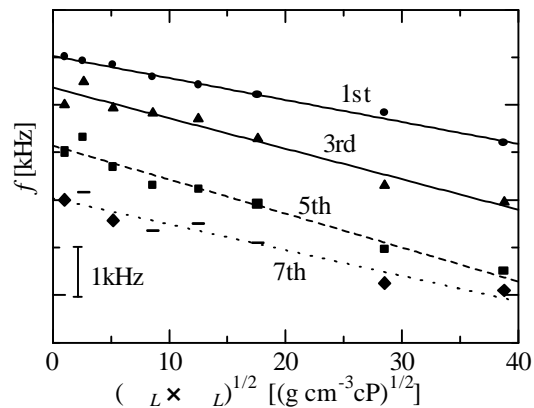


図 11. 共振周波数の粘度特性
(基本～7次共振)

4. 検討

振動子の共振抵抗は、液体の粘性と比例する結果が得られた。図 8 より、液体の粘性の変化は、圧電振動子の共振抵抗に影響し、粘度が 1[cP]の純水と 1200[cP]のグリセリン 99% の水溶液では、共振抵抗値に約 10 倍ほどの変化が現れた。図 10 に示す高次共振での測定結果においても、共振抵抗値は 3 倍以上の変化を示している。このことから、振動子の共振抵抗は、液体の粘性の変化に対する感度が高く、粘度測定に用いることが可能なパラメータであると考えられる。

共振周波数の変化も、液体の粘性に対して比例する結果が得られた。しかし、その変化量は共振の次数に関係なくほぼ一定であり、実験の範囲では 2[kHz]程度であった。これは、純水での基本共振周波数に対して 2%程度であり、高次共振になるほど相対的に変化が小

さくなる結果となった。

図3で示した圧電振動子の電氣的等価回路より、共振周波数そのものは

$$f_r = \frac{1}{2p\sqrt{LC}} \quad (24)$$

と表され、 L と C はそれぞれ振動子表面への液体の付加重量とコンプライアンスに対応している³⁾。このことから、共振周波数 f_r は液体の粘度よりも密度や粘弾性的性質に依存すると考えられる。

5. まとめ

円板形圧電振動子の横効果縦振動を用いた、数百kHzの周波数における液体の粘度測定の可能性について検討をおこなった。測定法は、粘度の異なる試料液体に円板形圧電振動子を浸して共振させたときの、振動子の共振抵抗と共振周波数の変化を求めるものである。

これより、共振抵抗は液体の密度と粘度の積の1/2乗に比例する結果が得られ、この関係を用いることで粘度測定が可能であると考えられる。また、圧電振動子の基本共振だけでなく、3次、5次、7次といった高次共振を用いることで同様の結果を得ることができ、数百kHz帯の粘度測定を行うことができると考えられる。

共振周波数の変化も粘性に対して比例の関係を示したが、共振周波数は粘度以外のパラメータによっても変化すると考えられるため、更に検討が必要である。

今後は、振動子と試料液体を分布定数線路として考えることにより粘度測定をシミュレーションによって解析することや、同粘度で密度の異なる液体についての測定などを行う予定である。

参考文献

- 1)川田裕郎：粘度計とその取り扱いの実際，オーム社(1962)
- 2)佐藤秀樹，田井秀一，小林 力：三角形バイモルフ振動子を用いたニードルタイプの振動形粘度計，第14回超音波エレクトロニクス研究会資料，14-5(1997)
- 3)H.Muramatsu,E.Tamiya,I,karube：Computation of Equivalent Circuit Parameter,Anal.Chem.,**60**, 2142/2146(1988)
- 4)K.Kanazawa,J.G.Gordon：The oscillation frequency of a quartz resonator in contact with a liquid,Anal.Chim.Acta.,175,99/105(1985)
- 5)L.D.Landau,E.M.Lifshitz：Fluid Mechanics, Pergamon,Oxford,England,88/90(1959)