

最適一般化予測制御系の設計

Design of Optimal Generalized Predictive Control System

小林恵理*, 長縄明大**, 愛田一雄*, 大日方五郎**

Eri Kobayashi*, Akihiro Naganawa**, Kazuo Aida*, Goro Obinata**

*新潟大学, **秋田大学

*Niigata University, **Akita University

キーワード: デジタル制御 (digital control), 一般化予測制御 (generalized predictive control),
最適目標値応答 (optimal response), フィードバック特性 (feedback property)

連絡先: 〒950-2181 新潟市五十嵐 2 の町 8050 番地 新潟大学大学院自然科学研究科 小林恵理

Tel .: (025) 262-7019 E-mail : t94m040b@tm.eng.niigata-u.ac.jp

1. はじめに

近年, プロセス制御の分野で一般化予測制御法が注目され, 多項式に基づく方法⁽¹⁾⁻⁽³⁾や状態空間法に基づく方法⁽⁴⁾⁽⁵⁾が提案されている. 一方, 制御対象に変動がなく, 外乱も存在しない場合, ステップ状の目標値に定常偏差なく追従するサーボ系は, 積分器なしで実現できる. 2 自由度最適 1 型サーボ系⁽⁶⁾⁽⁸⁾は, このような観点に立ち, 最適レギュレータ理論を応用して設計される. この制御系の特徴は, 以下の通りである. (1) 追従誤差と操作量偏差からなる評価関数を最小にする最適目標値応答

特性を実現する. (2) 最適目標値応答特性を保持したまま導入される積分器は, 制御対象の変動または外乱が存在する場合にのみ動作する. (3) 目標値応答とは独立に設定できるゲイン定数を有しており, これによりフィードバック特性を設定することができる.

しかし, これまで提案されてきた一般化予測制御法の中で, 上記の 2 自由度サーボ系の特徴を有する設計法は, 文献(5)のみで, ほとんど行われていない. そこで, 本稿では, 2 自由度最適 1 型サーボ系の特徴を有する最適一般化予測制御系の設

計法を提案する．本設計法はつぎのように行われる．(1)出力の予測値ベクトルと目標値ベクトルおよび操作量偏差ベクトルからなる評価関数を最小にする制御系を導出する．(2)この制御系の安定性に関する漸近特性について明らかにする．(3)この制御系は積分器を有していないため，目標値応答特性を保持したまま，積分器を導入する．これまで提案された多項式に基づく方法⁽¹⁾⁻⁽³⁾は実システムへの応用もなされているが，外乱除去特性などのフィードバック特性を任意に設定することは困難である．しかし，本手法では，積分ゲインに含まれるパラメータにより，これを容易に行うことができる．

2．制御系設計

<2.1> 最適一般化予測制御系の導出

制御対象 $P(z)$ は， $z=1$ に零点を持たないものとし，つぎの状態空間表現で与えられる 1 入出力離散時間線形系であるとする．

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t \quad (1)$$

$$y_t = Cx_t \quad (2)$$

ここで， y_t ， u_t ， x_t は，それぞれ，出力，操作量，観測可能な状態量を表し， (A, B) は可制御， (C, A) は可観測であるとする．本稿では，(1)，(2)式を用いて出力の予測値 \hat{y}_{t+j} ($d \leq j \leq N$) を求め，つぎの評価関数 J を最小にする制御則を導出する．

$$\begin{aligned} J &= \sum_{j=d}^N (\hat{y}_{t+j} - r_{t+j})^2 + \sum_{j=1}^{N-d+1} |u_{t+j-1} - \bar{u}_{t+j-1}|^2 \\ &= (\hat{Y}_{t+d} - R_{t+d})' (\hat{Y}_{t+d} - R_{t+d}) + |U_t - \bar{U}_t|' (U_t - \bar{U}_t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\hat{Y}_{t+d} = [\hat{y}_{t+d} \quad \Lambda \quad \hat{y}_{t+N}]' \quad (4)$$

$$R_{t+d} = [r_{t+d} \quad \Lambda \quad r_{t+N}]' \quad (5)$$

$$U_t = [u_t \quad \Lambda \quad u_{t+N-d}]' \quad (6)$$

$$\bar{U}_t = [\bar{u}_t \quad \Lambda \quad \bar{u}_{t+N-d}]' \quad (7)$$

ここで， r_{t+j} はステップ状に変化する設定値， \bar{u}_{t+j-1} は操作量 u_{t+j-1} の定常値を表し， $\bar{u}_t = \Lambda = \bar{u}_{t+N-d}$ である．また， \hat{Y}_{t+d} ， R_{t+d} ， U_t ， \bar{U}_t は，それぞれ，出力の予測値ベクトル，設定値ベクトル，操作量ベクトル，操作量の定常値ベクトルを表し， $|\cdot|$ はスカラーで評価関数の重みを表す．

出力の予測値ベクトル \hat{Y}_{t+d} は，(1)，(2)式を用いることによりつぎのように表される．

$$\hat{Y}_{t+d} = G_1 U_t + G_2 x_t \quad (8)$$

ここで，

$$G_1 = \begin{bmatrix} CA^{d-1}B & 0 \\ M & O \\ CA^{N-1}B & \Lambda & CA^{d-1}B \end{bmatrix}$$

(9)

$$G_2 = [(CA^d)' \quad \Lambda \quad (CA^N)']' \quad (10)$$

また，操作量の予測値ベクトル U_t は，つぎのように表されるものとする⁽⁴⁾．

$$U_t = E_t Q_t \quad (11)$$

ここで，

$$E_t = \begin{bmatrix} r_t & \Lambda & r_{t+N-d} \\ M & N & \\ r_{t+N-d} & & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

であり， $Q_t = [q_{t,0} \quad \Lambda \quad q_{t,N-d}]'$ は，つぎの時変型スーサの係数ベクトルを表す．

$$Q(z) = q_{t,0} + q_{t,1}z + \Lambda + q_{t,N-d}z^{N-d} \quad (13)$$

(11)式を用いることにより，操作量の定常値ベク

トル \bar{U}_t はつぎのように表すことができる .

$$\bar{U}_t = \bar{E}_t \bar{Q}_t \quad (14)$$

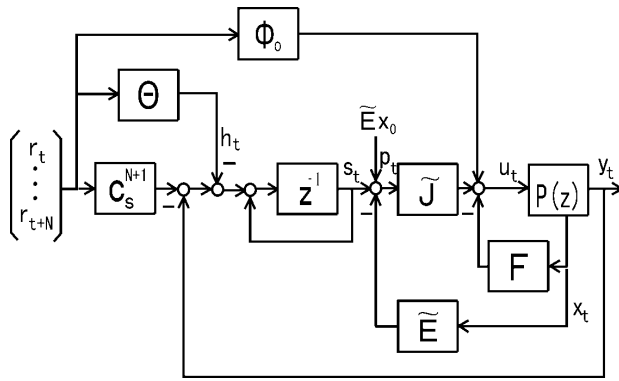
ここで, \bar{E}_t , \bar{Q}_t は, それぞれ, E_t , Q_t の定常値を表す . このとき, (3)式の評価関数を最小にする係数ベクトル Q_t は, つぎのように設定値ベクトル R_{t+d} および状態量 x_t の関数として求めることができる .

$$Q_t = (DE_t)^{-1} (G'_1 R_{t+d} + I \bar{E}_t \bar{Q}_t - G'_1 G_2 x_t) \quad (15)$$

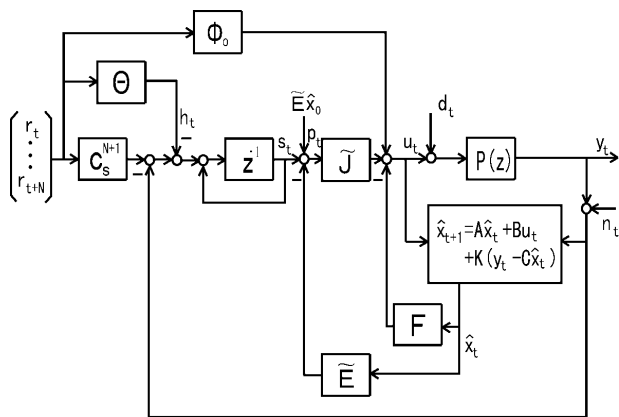
ただし,

$$D = G'_1 G_1 + I \quad (16)$$

であり, \bar{Q}_t は, (15)式を用いて Q_t の定常値を考えることにより, つぎのように求めることができる .



(a) State feedback case



(b) Output feedback case

図 1 積分器を有する最適一般化予測制御系

Fig. 1 Optimal generalized predictive control system with integrator

$$\bar{Q}_t = (G'_1 \bar{E}_t)^{-1} (\bar{R}_{t+d} - G_2 \bar{x}_t) \quad (17)$$

ただし, \bar{x}_t は, 制御対象 $P(z)$ の状態量 x_t の定常値を表す . 設定値の定常値を \bar{r}_t とし, さらに $\bar{x}_t = T_x \bar{r}_t$, $\bar{u}_t = T_u \bar{r}_t$ と表すと, T_x , T_u は, (1), (2)式より, つぎのように求めることができる .

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-I & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

このとき, つぎの補題が成り立つ .

[補題]

(3)式の評価関数を最小にする制御系の制御則は, つぎのようにフィードフォワード項 ΦR_{t+d} を伴うゲイン F の状態フィードバック系で与えられる .

$$u_t = \Phi R_{t+d} - F x_t \quad (19)$$

ただし,

$$\Phi = \begin{bmatrix} d & \Lambda & a_{N-1} & a & \sum_{i=1}^N i - g \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$[a_d \quad \Lambda \quad a_N] = C_s^{N-d+1} D^{-1} G'_1 \quad (21)$$

$$[b_d \quad \Lambda \quad b_N] = I C_s^{N-d+1} (G_1 D)^{-1} \quad (22)$$

$$g = [b_d \quad \Lambda \quad b_N] G_2 T_x \quad (23)$$

$$F = C_s^{N-d+1} D^{-1} G'_1 G_2 \quad (24)$$

であり, C_s^N はベクトル $[1 \ 0 \ \Lambda \ 0]$ で, 上付き N は次元を表す .

(証明)

制御則は, つぎのように表すことができる .

$$u_t = C_s^{N-d+1} U_t \quad (25)$$

この式に(11), (15), (17)式を代入して整理することにより, 次式を得る .

$$u_t = C_s^{N-d+1} D^{-1} (G'_1 R_{t+d} + I G_1^{-1} \bar{R}_{t+d} - I G_1^{-1} G_2 \bar{x}_t - G'_1 G_2 x_t) \quad (26)$$

一般化予測制御では, 有限区間の最適化問題を考

えているため、設定値の定常値を $\bar{r}_t = r_{t+N}$ とすると、(19)式が得られる。

(19)式は、(3)式の評価関数を最小にする最適な目標値応答特性を実現するため、本稿では、この制御系を最適一般化予測制御系と呼ぶ。

<2.2> 制御系の安定性

2.1 節の制御系は、 $\Pi = A - BF$ のすべての固有値が単位円内に存在すれば安定であり、これを満足するように(3)式の評価関数の重み l を決定する。

Π の固有値は、以下の漸近特性を有する。 $l = 0$ のとき、

$$(\Pi)_{l=0} = A - B(CA^{d-1}B)^{-1}CA^d \quad (27)$$

となり、この固有値は制御対象 $P(z)$ の $n-1$ 個の零点と d 個の零値を表す⁹⁾。また、 $l \rightarrow \infty$ のとき、

$$(\Pi)_{l \rightarrow \infty} = A \quad (28)$$

となる。いま、制御対象 $P(z)$ の極の数を $n+d-1$ 個、零点の数を $n-1$ 個とする。このとき重み l を零から徐々に大きくしていくと、 Π の固有値は、 $n-1$ 個の零点と d 個の原点から、 $n+d-1$ 個の極の位置に移動していくことになる。このため、不安定極や不安定零点を持つ制御対象 $P(z)$ に対しては、制御系を安定化する重み c の上限や下限が存在すると考えられる。この解析は、予測区間の長さ N を固定し、重み l についての Π の固有値の変化を数値的に求めることにより行うことができる。

<2.3> 積分器の導入

2.1 節の最適一般化予測制御系は 積分器を有し

ていないため、モデル化誤差または外乱が存在する場合には、定常偏差が残る。このため、制御系の目標値応答特性を保持したまま、積分器を導入する方法について検討する。本稿では、2 自由度 1 型サーボ系⁽⁶⁾⁽⁷⁾と同様に、モデル化誤差または外乱が存在する場合のみ積分補償の効果が現れるような制御系を導出する。

(1)、(19)式を用いることにより、次式が成り立つ。

$$x_t = (I - A + BF)^{-1} \quad (29)$$

このとき、誤差 $e_t = r_t - y_t$ は、

$$e_t = \tilde{E}(x_{t+1} - x_t) + \Theta \begin{bmatrix} r_t \\ M \\ r_{t+N} \end{bmatrix} \quad (30)$$

ただし、

$$\tilde{E} = C(I - A + BF)^{-1} \quad (31)$$

であり、 Θ は、 $d=1$ のとき、

$$\Theta = [1 \quad -\tilde{E}B\Phi] \quad (32)$$

$d \geq 2$ のとき、

$$\Theta = [1 \quad 0^{1 \times (d-1)} \quad -\tilde{E}B\Phi] \quad (33)$$

であり、上付き $1 \times (d-1)$ は、零ベクトルの次元を表す。以上より、積分器の出力は、積分器の初期値を零とすると、

$$s_t = \tilde{E}(x_t - x_0) + \frac{1}{z-1} \Theta \begin{bmatrix} r_t \\ M \\ r_{t+N} \end{bmatrix} \quad (34)$$

となる。この積分器の出力を打ち消すような信号を付加した制御系は、図 1(a)のように構成され、モデル化誤差または外乱が存在しない場合には、信号 P_t は零となり、積分補償の効果は現れない。ここで、 $\Phi_0 = [0^{1 \times d} \quad \Phi]$ であり、積分ゲイン \bar{J} は、

フィードバック特性を設定するために用いることができる⁽⁶⁾⁽⁸⁾。また，図中の h_t は，

$$h_t = r_t - \tilde{E}B \left[a_d r_{t+d} + \Lambda + a_{N-1} r_{t+N-1} + \left(a_N + \sum_{i=d}^N b_i - g \right) r_{t+N} \right] \quad (35)$$

と表される。ここで，設定値が定常値であるとすると， $r_t = r_{t+d} = \Lambda = r_{t+N}$ が成り立つため，

$$h_t = \left\{ 1 - \tilde{E}B \left(\sum_{i=d}^N (a_i + b_i) - g \right) \right\} r_t \quad (36)$$

この式の r_t の係数（ Θ の係数和）は零となるため， $h_t = 0$ となる。一方，設定値が変化する過渡期は，(36)式は成り立たないので， h_t は零でない値をもつ。

また，状態 x_t が観測できない場合には，図1(b)に示すように，つぎのカルマンフィルタにより状態 x_t の推定を行えばよい。

$$\hat{x}_{t+1} = A\hat{x}_t + Bu_t + K(y_t - C\hat{x}_t) \quad (37)$$

この場合，初期状態が定常でモデル化誤差や外乱が存在しない場合には，完全な状態推定を行うことができるため，最適な目標値応答特性は保持される。

3. 検証

ここでは，本手法の有効性を示すため，Clarkeらによって提案された方法⁽¹⁾⁽³⁾（以下では 従来法）と結果を比較する。

<3.1> 従来法

Clarke らの方法では，制御対象をつぎの CARIMA (Controlled Auto-Regressive and Integral Moving-Average) モデルで表す。

$$\hat{A}(z)y_t = \hat{B}(z)u_{t-1} + \hat{C}(z)\frac{z^{-d}}{\Delta(z)} \quad (38)$$

$$\Delta(z) = 1 - z^{-1} \quad (39)$$

ここで， $\hat{A}(z)$ ， $\hat{B}(z)$ ， $\hat{C}(z)$ は多項式を表し， z^{-d} は平均値零の雑音とする。さらに，つぎの Diophantine 方程式を考える。

$$\hat{C}(z) = \hat{E}_j(z)\hat{A}(z)\Delta(z) + z^{-j}\hat{F}_j(z) \quad (40)$$

ここで， $\hat{E}_j(z)$ ， $\hat{F}_j(z)$ は多項式を表す。この設計法では，(38)，(40)式を用いて出力の予測値 \hat{y}_{t+j} ($d \leq j \leq N$) を求め，つぎの評価関数を最小にする操作量を決定する。

$$J = \sum_{j=d}^N (\hat{y}_{t+j} - r_{t+j})^2 + \sum_{j=1}^{N-d+1} |c| \{ \Delta(z)u_{t+j-1} \}^2 \quad (41)$$

ここで， $|c|$ はスカラーで評価関数の重みを表す。

<3.2> 設計例

制御対象は，図2に示す2段にカスケード結合されたタンクシステムとする。タンクの断面積は，下のタンクが144[cm²]，上のタンクが85[cm²]である。図中の $u_{r,t}$ は，流量制御部への指令信号，

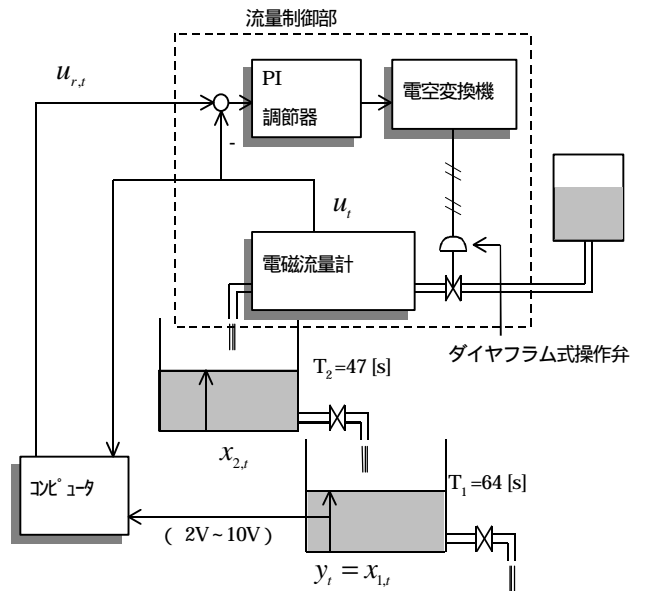


図2 実験装置の構成

Fig. 2 The schematic of the experimental system

操作量 u_t は電磁流量計で計測される水の量， $x_{1,t} = y_t$ は下のタンクの水位， $x_{2,t}$ は上のタンクの水位を表す．本実験装置では，水位 $x_{1,t}$ ， $x_{2,t}$ は差圧計によって測定され，1[V]が3[cm]である．流量制御部は，PI 調節器，電空変換器，ダイヤフラム式操作弁，電磁流量計で構成されており，指令信号 $u_{r,t}$ に応じて操作弁を開閉し操作量 u_t を調整する．

はじめに，ノミナルプラント $P(z)$ を決定するため，各タンクの時定数を測定した．その結果，下のタンクが 64[s]，上のタンクが 47[s]であった．流量制御部のダイナミクスを無視すると，この制御対象は次式で表される．

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0156 & 0.0128 \\ 0 & -0.0213 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0531 \end{bmatrix} u \quad (42)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

この制御対象をサンプリング時間 2[s]で離散化したものをノミナルプラント $P(z)$ とした．従来法は，出力フィードバック系であるので，本手法では図 1(b)に基づいて実験を行うものとする．シミュレーションにより，予測区間の長さを $N = 30$ と決定し，本手法と従来法的目標値応答の立ち上がり時間が同じになるように，(3)，(41)式の評価関数の重みを決定した．その結果，本手法が $\lambda = 0.1$ ，従来法が $\lambda_c = 25$ であった．なお，従来法の外乱モデルは $\hat{C}(z) = 1$ とした．さらに，本手法のカルマンフィルタは外乱の共分散行列を BB' ，観測雑音の分散を 10^{-3} で設計し，積分ゲイン \tilde{J} は次式のように決定した⁽⁸⁾．

$$\tilde{J} = (1-x)[C(I-A+BF)^{-1}B]^{-1} \quad (44)$$

ここで， x は設計者が任意に選ぶことができるパラメータで，感度特性と観測雑音 n_t が操作量 u_t に与える影響のトレードオフを図ることができる．本稿では， x が制御系の代表根とならないように $0 \leq x \leq 0.9$ とした．

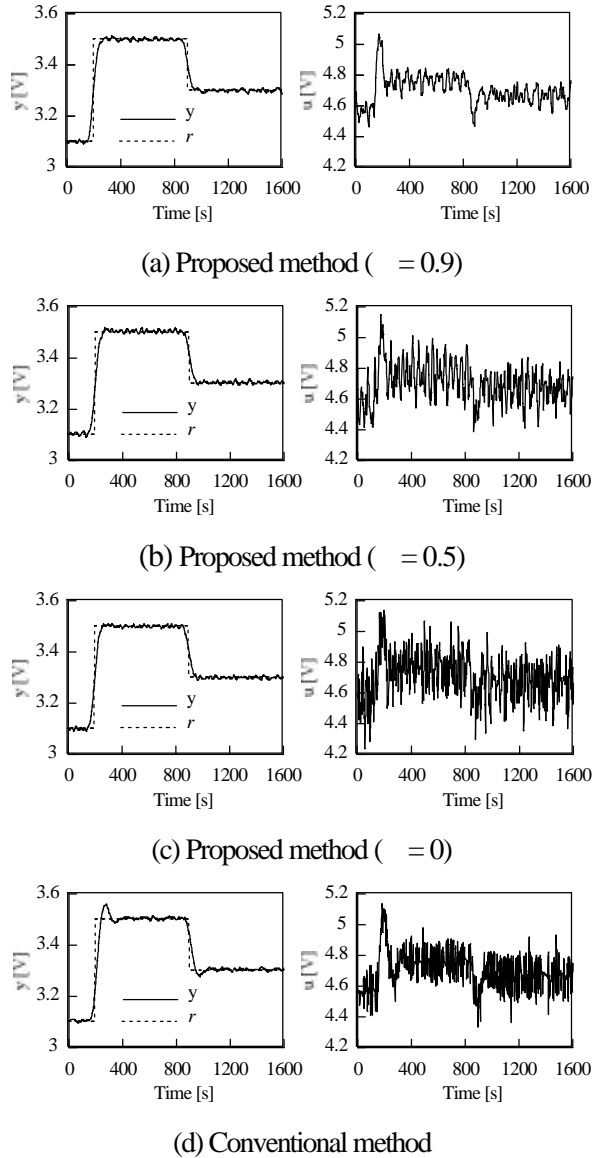


図 3 目標応答の実験結果

Fig. 3 Experiment results of disturbance rejection

図3は、目標値応答の実験結果を示し、左側が出力 y_t 、右側が操作量 u_t を表す。(a)~(c)はパラメータ x を変えた場合の本手法の実験結果、(d)は従来法に基づく実験結果を示す。(a)~(c)を比較すると、出力 y_t は、パラメータ x を変えて

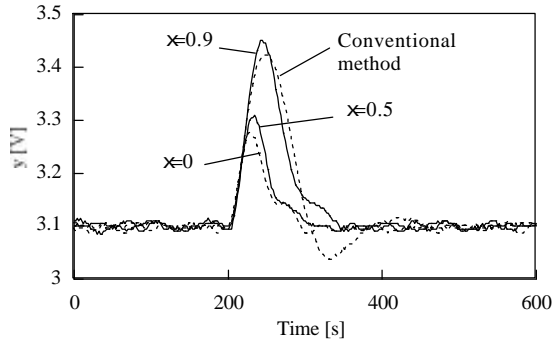
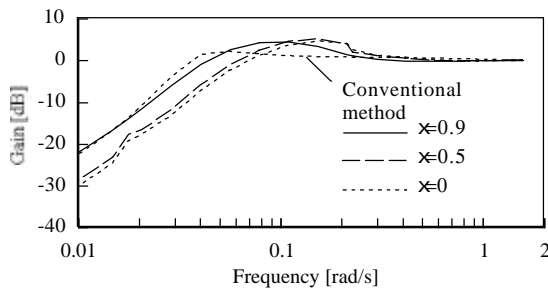
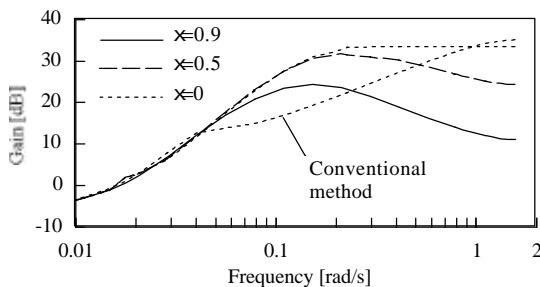


図4 外乱除去特性の実験結果

Fig. 4 Experiment results of disturbance rejection



(a) Sensitivity function



(b) Transfer function from observation noise to control input

図5 制御系のゲイン特性

Fig. 5 Gain plots of control system

もほとんど変わらないものの、操作量 u_t は x を小さくすると振動的になっているのがわかる。また、(d)の従来法では、本手法よりオーバーシュートが大きく、操作量 u_t も振動的である。図5は制御対象入力側に1.5[V]のステップ外乱 d_t が混入した場合の外乱除去特性を示す。なお、ステップ外乱 d_t は指令信号 $u_{r,t}$ に混入して与えた。本手法では、パラメータ x を小さくすると外乱 d_t が効果的に除去されているのがわかる。また、従来法では、逆応答をするものの、出力 y_t に現れる外乱 d_t の影響は、本手法の $x = 0.9$ の場合とほぼ同じであるといえる。

図3, 4の実験結果を周波数領域で解析する。図5(a)は制御対象入力側の感度関数、(b)は観測雑音 n_t から操作量 u_t までの伝達関数のゲイン特性を示している。本手法では、パラメータ x を小さくしていくと、(a)の感度関数の低周波領域のゲイン特性が低くなるため、図4に示すように制御対象入力側に混入する外乱 d_t の影響を効果的に除去することができる。しかし、この場合、(b)の観測雑音 n_t から操作量 u_t までの伝達関数の高周波領域でのゲイン特性が大きくなるため、観測雑音 n_t の影響が操作量 u_t に大きく現れ、操作量 u_t の振動の原因となっている。また、従来法では、目標値応答の出力 y_t および外乱除去特性は、本手法の $x = 0.9$ の場合とほぼ同じ特性を持つが、図3(a)と(d)の操作量 u_t を比較すると、従来法の方が、高周波で大きく振動している。これは、図5(b)の観測雑音 n_t から操作量 u_t までの伝達関数の高周波領域でのゲイン特性の違いによるものである。なお、従来法では、(38)式の外乱モデル

の多項式 $\hat{C}(z)$ を用いて設計することにより、観測雑音 n_t の影響は低減することができるが、この場合、入力側の外乱除去特性が劣化することが知られている³⁾。さらに外乱モデルの多項式 $\hat{C}(z)$ を正確に同定することが困難であることから、従来法では効果的な外乱除去ができないとも述べられている²⁾。一方、本手法では、 $x = 0.9$ の場合より操作量 u_t に現れる観測雑音 n_t の影響を許容できるとするならば、入力側の外乱除去特性を向上させることができ、このようなフィードバック特性の設定は、積分ゲイン \tilde{J} に含まれるパラメータ x で容易に行うことができる。

4. む す び

本稿では、最適一般化予測制御系の設計法を提案した。本制御系の特徴は、評価関数を最小にする最適な目標値応答を実現し、この目標値応答特性を保持したまま、フィードバック特性を任意に設定することができる点にある。

本手法の有効性を検証するため、タンクシステムへの応用例により、Clarke らの方法では効果的な外乱除去ができないが、本手法では、積分ゲインに含まれるパラメータで、感度特性と観測雑音に操作量に与える影響のトレードオフを考慮した設計が可能であることを示した(3.2 節)。Clarke らの方法では、フィードバック特性の設定は外乱モデルの同定から行わなければならない、設定を変更するには、制御系設計を初めから行わなければならない。しかし、本手法では積分ゲインの変更のみでフィードバック特性を設定することができるため、Clarke らの方法より実システムへ適

用しやすいといえる。

今後は、この設計法を多入出力系に拡張し、操作量に制約がある場合の設計法について検討したい。

参考文献

- (1) D. W. Clarke , C. Mohtadi and P. S. Tuffs :
"Generalized Predictive Control; Part 1. The Basic Algorithm" , Automatica , 23 , 137 148 (1987)
- (2) D. W. Clarke , C. Mohtadi and P. S. Tuffs :
"Generalized Predictive Control; Part 2. Extensions and Interpretations" , Automatica , 23 , 149 160 (1987)
- (3) D. W. Clarke and C. Mohtadi : "Properties of Generalized Predictive Control" , Automatica , 25 , 859 875 (1989)
- (4) 長縄明大 , 愛田一雄 , 大日方五郎 : 「2 自由度積分型コントローラのパラメトリゼーションに基づく一般化予測制御系の設計」, 電気学会論文誌 C , 457 464 (1998)
- (5) 矢納陽 , 増田士朗 , 井上昭 , 平嶋洋一 : 「状態空間法による一般化予測制御系の2 自由度構成法」, システム制御情報学会論文誌 , 12 , 106 114 (1999)
- (6) 藤崎泰正 , 池田雅夫 : 「2 自由度積分型サーボ系の構成」, 計測自動制御学会論文集 , 27 , 907 914 (1991)
- (7) 萩原朋道 , 一木将人 , 金星光晴 , 福光研一 , 荒木光彦 : 「デジタル型2 自由度 LQI サーボ系 ; 設計法とその空気圧シリンダの位置決め制御への応用」, システム制御情報学会論文誌 , 11 , 51 60 (1998)
- (8) 長縄明大 , 平沼雅裕 , 愛田一雄 , 大日方五郎 : 「2 自由度最適 1 型サーボ系のタンクシステムへの応用と周波数領域での解析 ; 観測雑音の影響と外乱抑制のトレードオフおよびロバスト安定性に関する考察」, システム制御情報学会論文誌 , 12 , 1 10 (1999)
- (9) 美多勉 : 「制御系における零点 ; [V] 零点と制御系構成」, 計測と制御 , 29 , 741 747 (1990)
- (10) 愛田一雄 , 杉本真正 , 梅内晴成 : 「感度と安定余裕のトレードオフを考慮した最適予見 1 型サーボ系の設計」, 計測自動制御学会論文集 , 30 , 993 995 (1994)
- (11) 土谷武士 , 江上正 : 「デジタル予見制御」, 産業図書 (1992)