

## 最適制御理論を用いた不確定要素を含む同定モデル評価法

Evaluation of uncertain models via optimal control theory

井前 讓, ○鉄谷 知行\*  
Joe Imae, ○Tomoyuki Tetsuya\*

\*岩手大学工学部, \*\*岩手大学大学院

\*Faculty of Engineering Iwate University, \*\*Graduate school of Engineering Iwate University

キーワード : 最適制御 (optimal control), モデル評価 (model validation), 同定 (identification)  
不確定要素 (uncertainties), ロバスト制御 (robust control)連絡先 : 〒020-8551 盛岡市上田4-3-5, 岩手大学工学部福祉システム工学科  
井前 讓 Tel : 019(621)4601, E-mail : jima@iwate-u.ac.jp

## 1. 緒言

ロバスト制御では、不確かな変動（不確定要素という）を確定的に含むモデルを摂動モデルと呼び、このモデルを構築する作業をシステム同定と呼ぶ。そして同定した摂動モデルに対して、実際のシステムを正確に表しているか否かを、実際入出力データを通して判断することを「モデルの評価」と呼んでいる。本研究では、構造的な摂動の中でも取り扱いが特に困難といわれる物理パラメータの摂動に焦点を当てる。そして、最適制御理論を用いた新たな摂動モデル評価手法を提案する。また本手法が時変・時不変両方の不確定要素に対して適用が可能なことを明らかにする。

## 2. モデル評価

モデル評価の定義を具体的に次のように与える。

《定義 (モデル評価)》

摂動モデル  $M(\Delta, w) = P_w w + (P_g \Delta P_r + P_y)$ ,  
 $(\Delta = \text{diag}\{\Delta_1, \dots, \Delta_l\})$  と  $\|\Delta_i\|_\infty \leq \sqrt{\beta_i} (i=1, \dots, l)$ ,  
 $\|w\|_2 \leq \sqrt{\gamma}$  なるパラメータ  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  が与えられたとする。このとき、システムの入力信号  $u(t) \in L_2^*[0, T]$  に対し、観測出力信号  $y(t) \in L_2^*[0, T]$  が得られたとして、次の2条件が成立するとき、この摂動モデルは「無効ではない」という。

- $y = M(\Delta, w)u$  を満足する不確定要素  $\Delta$ , 外乱  $w$  が少なくとも1つ存在する。
- $\|\Delta_i\|_\infty \leq \sqrt{\beta_i} (i=1, \dots, l)$ ,  $\|w\|_2 \leq \sqrt{\gamma}$  である  
 ここに、 $P_g, P_r$  を  $\Delta$  の重み関数,  $P_w$  を  $w$  の重み関数,  $P_y$  をノミナルモデルとする。

最適制御の立場から次の定理を得る。ただし  $\Delta$  は物理パラメータの摂動とし、時変・時不変の場合を含む。

《定理 (モデル評価)》

摂動モデル  $M(\Delta, w)$  と  $\|\Delta_i\|_\infty \leq \sqrt{\beta_i} (i=1, \dots, l)$ ,

$\|w\|_2 \leq \sqrt{\gamma}$ なるパラメータ  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  が与えられたとする。このとき、システムの入力信号  $u(t)$  に対し、観測出力信号  $y(t)$  が得られたとする。次の拘束条件付最適制御問題

$$J = \int_0^T (y - Mu)^T (y - Mu) dt \quad (2.1)$$

ただし

$$\|\Delta_i\|_\infty \leq \sqrt{\beta}, (i=1, \dots, l), \quad \|w\|_2 \leq \sqrt{\gamma} \quad (2.2)$$

において、 $J=0$ とする最適解  $\Delta$ ,  $w$  が存在するならば、この摂動モデルは無効ではない。

(証明) 定義より明らか。

### 3. アルゴリズム

$\Delta$ ,  $w$  が時変の場合、通常最適制御アルゴリズムが適用可能である。しかし、 $\Delta$  が時不変のときは、より複雑なアルゴリズムが必要とされる。ここではある種の工夫を凝らすだけで、 $\Delta$  が時不変の場合でも通常アルゴリズムが適用可能であることを示す。すなわち、 $\alpha$  が時不変な最適制御問題

システム方程式：

$$\dot{x} = f(t, x, \alpha), \quad x(0) = x_0 \in R^n, \alpha \in R^p \quad (3.1)$$

評価関数：

$$J = G(x(T)) + \int_0^T L(t, x, \alpha) dt \quad (3.2)$$

に対して、仮想時間  $[-T, 0]$  を導入することにより新たな最適制御問題

システム方程式；

○制御区間  $[-T, 0]$  のとき

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, x(-T) = x_0 \\ \dot{\alpha} = \sigma, \alpha(-T) = 0, \sigma \in R^p \end{cases} \quad (3.3)$$

○制御区間  $[0, T]$  のとき

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, \alpha) \\ \dot{\alpha} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

評価関数：式 (3.2) を設定すれば十分である。

## 4. 数値実験 I

本章では、物理パラメータが時不変な場合について、本手法の有効性を検証する。対象システムとして、質量・バネ系を取り上げる。すなわちシステム方程式、出力方程式は、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u \quad (4.1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

### 4. 1 観測入出力データ収集

いま、システムのパラメータの真値が  $m=1$ ,  $k=1.5$ ,  $c=1.5$  として、そのときの観測出力信号を  $y(t)$  とする。入力  $u(t)$  はシステム特性を十分励起するものとして M 系列信号を選んだ (Fig.2)。ただし、 $T=10$ 。

### 4. 2 無効ではないモデル

対象システムに対して、摂動モデル (4.3), (4.4) が与えられているとする。明らかに、対象システムに対して、無効ではないモデルを設定したことになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(1+\Delta_1) & -(1+\Delta_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.3)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\|\Delta_1\|_\infty \leq 1, \quad \|\Delta_2\|_\infty \leq 1 \quad (4.5)$$

ここで本評価法を適用する。  $w(t)=0$  であり、 $\Delta_1, \Delta_2$  を 3 章の  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]^T \in R^2$  に対応させる。また  $\Delta_1, \Delta_2$  のノルム条件は、内点ペナルティ法により評価関数の中に組み込んだ。すなわち、

$$J = \int_0^T ((y(t) - y_i(t))^T (y(t) - y_i(t)) + \sum_{i=1}^2 \frac{R_i}{1 - \alpha_i^2}) dt \quad (4.6)$$

ここに  $R_i$  はペナルティパラメータ,  $y_i(t)$  は摂動モデルの出力である.

微分・積分計算を4次のルンゲクッタ法で行い, 刻み数を500とした. その結果, 繰り返し回数965回ののちに, 評価関数  $J$  が22.00から  $2.683 \times 10^{-4}$  へと収束した. そのときペナルティパラメータ  $R_i$  はともに1から  $10^{-5}$  へと変化させた. Fig.3 に  $y(t)$ , および  $y_i(t)$  を, Fig.4 に不確定要素  $\Delta_1, \Delta_2$  を示す. 観測出力信号と摂動モデルの出力がほぼ一致していることから, 摂動モデル (4.3), (4.4) は「無効ではない」モデルと判断できる. しかも,  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0.5$  が真値を与えていることを考えると, パラメータの不確定要素を正確に算出しているといえる.

#### 4.3 無効なモデル

ここでは故意に誤ったモデルを与える. その場合, モデルが「無効である」と判断することが可能かどうか検証する. 本節では誤った摂動モデルとして

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -(1+\Delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (4.7)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \quad (4.9)$$

を与える. 前述同様, 本手法を適用した. ただし,  $\Delta$  を  $\alpha \in R^1$  に対応させた. 繰り返し回数71回ののちに, 評価関数  $J$  が, 11.26から0.205へと収束した. そのときペナルティパラメータ  $R_i$  は1から  $10^{-5}$  へと変化させた. Fig.5 に  $y(t)$ , および  $y_i(t)$  を示す. 不確定要素は与えられた範囲内に収まっているが,  $y_i(t)$  と  $y(t)$  との間に大きな不一致が見られた (Fig.5). このことは定理が成立しないことを意味し, 摂動モデル (4.7), (4.8) は, 「無効なモデル」であると判断できる. ただ

し最適制御問題において大域的最適解が算出されたとする.

## 5. 数値実験II

本章では時間的変動を含む場合を考える. 対象システムとして, 垂直飛行可能なヘリコプタの摂動モデル<sup>[1]</sup>をとりあげる.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -0.0366 & 0.0271 & 0.0188 & -0.4555 \\ 0.0482 & -1.01 & 0.0024 & -4.0208 \\ 0.1002 & 0.2855+r_1(t) & -0.707 & 1.3229+r_2(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.4422 \\ 3.0047 \\ -5.52 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (5.1)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x \quad (5.2)$$

$$|r_i(t)| \leq 2, \quad i=1,2 \quad (5.3)$$

ここに  $r_1(t), r_2(t)$  は時変な不確定要素を表している.

### 5.1 観測入出力データ収集

いま, 物理パラメータの不確定要素  $r_1(t), r_2(t)$  の真値がそれぞれ  $\sin t$  の時間的変動をすると考える. このとき, 観測出力信号を  $y(t)$  とし, 入力は数値実験I同様, システムの特徴を十分励起するM系列信号を選んだ. ただし,  $T=10$ .

### 5.2 無効ではないモデル

(5.1), (5.2) 式の摂動モデルに対し, 本評価法を試みる. この摂動モデルが「無効ではない」といえることを確かめる. 繰り返し回数18回ののちに評価関数  $J$  が50.83から  $5.143 \times 10^{-3}$  に収束した. ペナルティパラメータ  $R_i$  はともに1から  $10^{-3}$  へと変化させた. このときの観測出力信号  $y(t)$  および摂動モデルの出力  $y_{11}(t)$  を Fig.6 に, 不確定要素

$r_1(t), r_2(t)$ を Fig. 7 に示す.  $r_1(t), r_2(t)$ はノルム条件 (5.3) を満たしており, かつ  $y(t)$  と  $y_i(t)$  が一致していることから定理が成立する. よってこの摂動モデルは無効ではないと判断できる.

## 6. 結言

本研究において, 最適制御理論に基づき, 時変・時不変両方のパラメータ変動に関するモデル評価法を提案した. モデル評価に関して, 本評価法は比較的簡便なものとなっている.

## 参考文献

- [1] Faryar Jabbari, "Output Feedback Controllers for Systems with Structured Uncertainty", Proceedings of the 35<sup>th</sup> CDC, 1996.
- [2] Schmitendorf, W. E. , "A Design Methodology for Robust Stabilizing Controllers", AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 10, No. 2, 1987.
- [3] 木村英紀, 藤井隆雄, 森武宏, ロバスト制御, コロナ社, 1994.

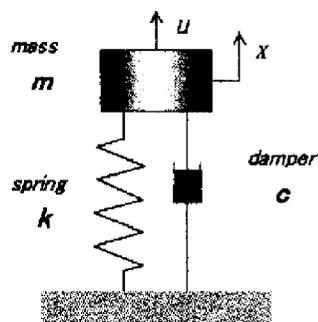


Fig.1 Mass-spring model

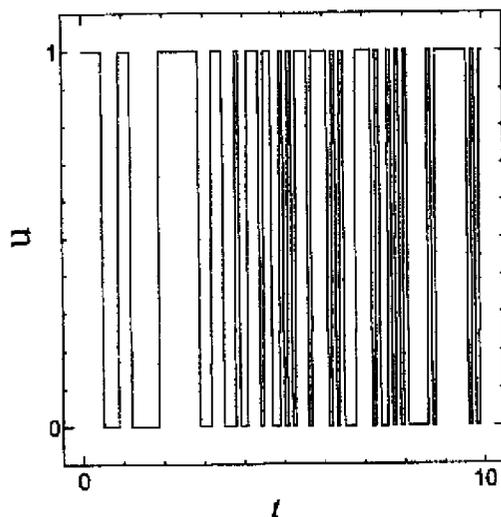


Fig.2 Input  $u$

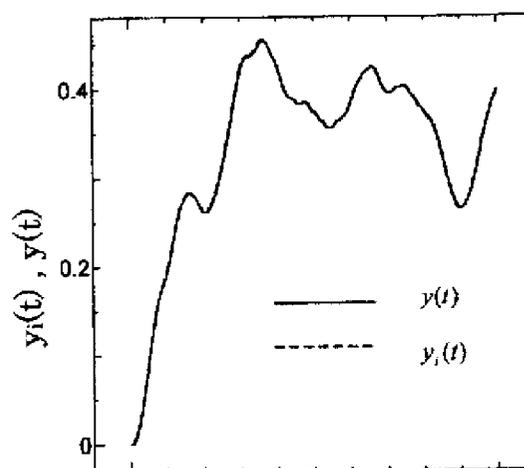


Fig.3 Outputs  $y(t)$  and  $^{10}y_i(t)$   
(Example 4.2)

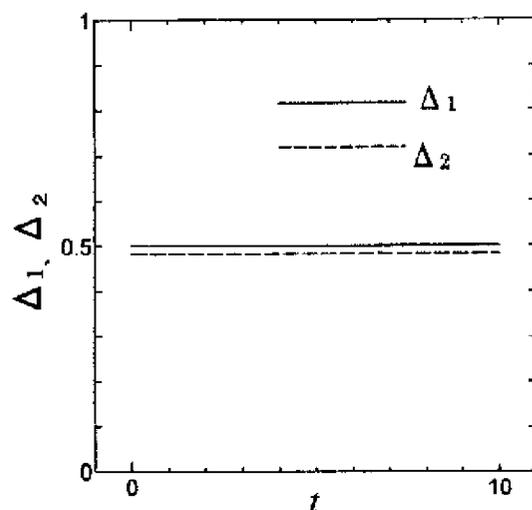


Fig.4 Uncertainties  $\Delta_1, \Delta_2$   
(Example 4.2)

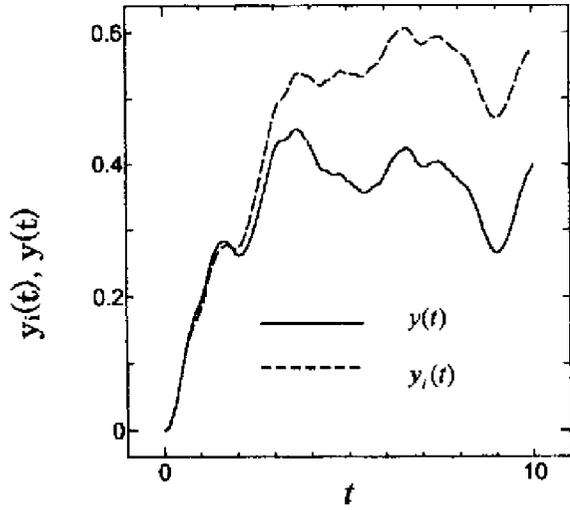


Fig.5 Outputs  $y(t)$  and  $y_i(t)$   
(Example4.3)

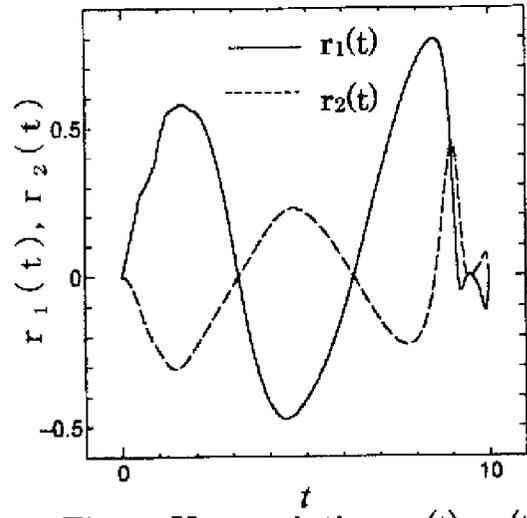


Fig.7 Uncertainties  $r_1(t), r_2(t)$   
(Example5.2)

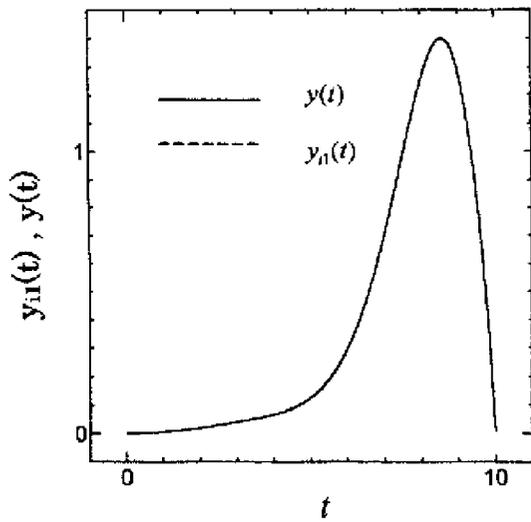


Fig.6 Outputs  $y(t)$  and  $y_n(t)$   
(Example5.2)