

微分方程式の陰的解法を応用したモデル予測制御

Application of Implicit Runge-Kutta Method to Model Predictive Control

鹿内良将, 能川幸二郎, 山下善之, 鈴木睦

Yoshinobu Shikanai, Koujiro Nogawa, Yoshiyuki Yamashita and Mutsumi Suzuki

東北大学大学院 工学研究科 化学工学専攻

Department of Chemical Engineering, Tohoku University

キーワード : モデル予測制御 (Model Predictive Control), パラメータロバストネス (parameter robustness), 安定性 (stability), 離散時間 (discrete time), プロセス制御 (process control), Runge-Kutta法 (Runge-Kutta Method)

連絡先 : 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉07 東北大学大学院 工学研究科 化学工学専攻 鈴木研究室
鹿内 良将, Tel.: (022)217-7266, Fax.: (022)217-7293, E-mail: shika@pse.che.tohoku.ac.jp

1. はじめに

化学プロセスにはその動的挙動が非線形なプロセスが多く存在するため線形システムを想定した制御系を設計しても十分に満足できる制御性能を達成できない場合が多い。また現在ではコンピュータを利用したデジタル制御が主流となっているが、コンピュータの演算速度の問題や計装機器の制約などにより十分に細かい間隔でのサンプリングが出来ない場合が多い。

前者の問題を解決する一つの方法としてプロセスの動的挙動を表現したモデルを利用する「モデル予測制御」が盛んに研究されている。一般に化学プロセスの動的挙動を表わすモデルは移動現象論に基づいた物理・化学モデルで記述されている。多くの場合物質収支、熱収支を用いて微分方程式として導出される。物理モデルは式やそのパラメータの物理的意味が明確でプロセスの現象を理解しやすい反面、多数のパラメータを含み、その同定

に多大な時間を要する。またパラメータが時間的に変動するプロセスにおいてはオンラインでの推定が必要となるが、これも容易ではない。また推定したモデルパラメータには必ず誤差が含まれているが、モデルが非線形な場合にはこの誤差が予測にどのような影響を及ぼすか不明である。つまり制御系にはパラメータ誤差に対するロバスト性が要求されることになる。

物理モデルを利用したモデル予測制御法として、テイラー展開を用いた方法が提案されているが、これは相対次数が1次の時、1次の展開を使うので打ち切り誤差が大きく、特にサンプリング間隔が大きい時に誤差が大きくなる。

以上の背景から、本研究ではパラメータ変化に対してロバストでかつ長いサンプリング間隔においても安定な制御則を考案した。

ところで物理モデルは微分方程式で与えられると述べたが、その微分方程式の数値解法は様々な

方法が知られている。中でも陰的解法は長い離散間隔に対して安定であるという特徴があるため、この特徴を長いサンプリング間隔での制御に利用できるなら効果的であると考えられる。

本報では1入力1出力で相対次数が1次の物理モデルで記述できるプロセスを対象とし、陰的Runge-Kutta法を利用したモデル予測制御を提案する。まず提案する制御則の導出法を示し、その後タンクの液レベル制御を例として実験とシミュレーションによる制御結果について述べ、本手法の有効性を検証する。

2. 制御則の導出

2.1 陰的Runge-Kutta法

Runge-Kutta法は微分方程式の数値解法として広く利用されている。段数 p の陰的Runge-Kutta法は、微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ が与えられた時、その初期値 y_i と1ステップ先の y_{i+1} との関係を次の式で計算する。

$$k_j = f(x_i + \alpha_j \Delta t, y_i + \beta_{j1} \Delta t k_1 + \dots + \beta_{jp} \Delta t k_p) \quad (j = 1, 2, \dots, p) \quad (1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t (\mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 + \dots + \mu_p k_p) \quad (2)$$

k_j を計算する(1)式の右辺にも k_j が含まれるので陰的解法となる。(2)式を書き改めると、

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{k} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^T \quad (4)$$

$$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_p)^T \quad (5)$$

となる。式中の α, β, μ は陰的Runge-Kutta法の公式として与えられる係数である。

この陰的Runge-Kutta法はA-安定であることが知られており、離散化の間隔を無限大まで大きくとっても安定性が保証されている。この性質をモデル予測制御に利用する。

2.2 モデル予測制御への応用

モデル予測制御は観測値とシステムの動的挙動を表現したモデルに基づいて未来の挙動を予測し、予測した挙動と所望の挙動とが一致する様に操作変数を決定する制御法である。ここでは予測区間は1ステップとする。つまりステップ i において観測値 y_i が得られたとき、次のステップにおける目標値 y_{i+1} に到達するための操作変数 u_i をモデルから算出する。操作変数 u_i を算出するために、前述の陰的Runge-Kutta法の関係式(1)(3)と、システムのモデルである微分方程式を利用する。今回考える1入力1出力系で、相対次数が1次の場合の微分方程式の一般形は出力、入力、パラメータの関数として次式で与えられる。

$$\frac{dy}{dt} = f(y, u; \mathbf{p}) \quad (6)$$

ここで y は出力(被制御変数)、 u は入力(操作変数)、 \mathbf{p} はパラメータベクトルである。モデルパラメータ \mathbf{p} には必ず誤差が含まれており、パラメータの真値を知ることが出来ない。また時間の経過とともに変化していく場合もある。そこでパラメータの推定値ベクトルを $\hat{\mathbf{p}}$ とし、その誤差ベクトルを $\Delta \mathbf{p}$ とする。また y, u の各時間ステップ間での変化をそれぞれ $\Delta y, \Delta u$ と定義する。

$$\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}} \quad (7)$$

$$\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1} \quad (8)$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (9)$$

$$\Delta u_{i-1} = u_i - u_{i-1} \quad (10)$$

ステップ i において y_i が観測された時、ステップ $i-1$ から i 、ステップ i から $i+1$ の2区間について陰的Runge-Kutta法の関係式を適用する。まず、ステップ $i-1$ から i の間の関係式を考える。式(1)より、

$$\begin{aligned} k_j &= f(y_{i-1} + \beta_{j1} \Delta t k_1 + \dots + \beta_{jp} \Delta t k_p, u_{i-1}; \mathbf{p}) \\ &= f(y_i - \Delta y_{i-1} + \beta_{j1} \Delta t k_1 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\beta_{jp}\Delta tk_p, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p}) \\
& \approx f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) - f_y \Delta y_{i-1} \\
& + f_y \Delta t (\beta_{j1} k_1 + \dots + \beta_{jp} k_p) + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} \quad (11)
\end{aligned}$$

ここで f_y は f の y での偏微分、 \mathbf{f}_p は f の各パラメータでの偏微分を表すベクトルである。つまり、

$$f_y = \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{y_i, u_{i-1}, \hat{\mathbf{p}}} \quad (12)$$

$$\mathbf{f}_p^T = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial p_1}, \frac{\partial f}{\partial p_2}, \dots \right) \right|_{y_i, u_{i-1}, \hat{\mathbf{p}}} \quad (13)$$

である。

$k_j (j = 1, 2, \dots, p)$ に関する式(11)が p 本得られるのでこれらを行列を用いてまとめると、

$$\begin{bmatrix} 1 - f_y \Delta t \beta_{11} & -f_y \Delta t \beta_{12} & \dots & -f_y \Delta t \beta_{1p} \\ -f_y \Delta t \beta_{21} & 1 - f_y \Delta t \beta_{22} & \dots & -f_y \Delta t \beta_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_y \Delta t \beta_{p1} & -f_y \Delta t \beta_{p2} & \dots & 1 - f_y \Delta t \beta_{pp} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_p \end{bmatrix}$$

$$= \{f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} - f_y \Delta y_{i-1}\} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

となる。ここで $(p \times p)$ の単位行列を \mathbf{E} 、全成分が1の p 次元ベクトルを \mathbf{e} 、 β の行列を \mathbf{B} と置くと、式(14)は次式で表現でき、ベクトル \mathbf{k} について解くことが出来る。

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E} - f_y \Delta t \mathbf{B}) \mathbf{k} &= \\
\{f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} - f_y \Delta y_{i-1}\} \mathbf{e} & \quad (15)
\end{aligned}$$

故に、

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \{f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) \\
& + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} - f_y \Delta y_{i-1}\} (\mathbf{E} - f_y \Delta t \mathbf{B})^{-1} \mathbf{e} \quad (16)
\end{aligned}$$

この \mathbf{k} と式(3)から y_{i-1} と y_i との間に以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta t} &= \{f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) \\
& + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} - f_y \Delta y_{i-1}\} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{E} - f_y \Delta t \mathbf{B})^{-1} \mathbf{e} \quad (17)
\end{aligned}$$

次にステップ i から $i+1$ の間についても同様にして関係式を求める。ただしこのステップでは前のステップとは異なり、 Δy_{i-1} が現われない代わりに Δu_{i-1} が現われる。

$$\begin{aligned}
k_j &= f(y_i + \beta_{j1} \Delta t k_1 + \dots + \beta_{jp} \Delta t k_p, u_i; \mathbf{p}) \\
&= f(y_i + \beta_{j1} \Delta t k_1 + \dots \\
& \quad + \beta_{jp} \Delta t k_p, u_{i-1} + \Delta u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}} + \Delta \mathbf{p}) \\
&\approx f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) + f_y \Delta t (\beta_{j1} k_1 + \dots + \beta_{jp} k_p) \\
& \quad + f_u \Delta u_{i-1} + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} \quad (18)
\end{aligned}$$

ここで f_u は f の u での偏微分である。

$$f_u = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{y_i, u_{i-1}, \hat{\mathbf{p}}} \quad (19)$$

前述の方法と同様に $k_j (j = 1, 2, \dots, p)$ を行列でまとめると、ベクトル \mathbf{k} は以下の式で表される。

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \{f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) \\
& + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} + f_u \Delta u_{i-1}\} (\mathbf{E} - f_y \Delta t \mathbf{B})^{-1} \mathbf{e} \quad (20)
\end{aligned}$$

この \mathbf{k} と(3)式から y_i と y_{i+1} との間に以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta t} &= \{f(y_i, u_{i-1}; \hat{\mathbf{p}}) \\
& + \mathbf{f}_p^T \Delta \mathbf{p} + f_u \Delta u_{i-1}\} \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{E} - f_y \Delta t \mathbf{B})^{-1} \mathbf{e} \quad (21)
\end{aligned}$$

ここで、式(21)から式(17)を引いて Δu_{i-1} について解くと、

$$\begin{aligned}
\Delta u_{i-1} &= \\
& \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{f_u \Delta t \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{E} - f_y \Delta t \mathbf{B})^{-1} \mathbf{e}} - \frac{f_y}{f_u} (y_i - y_{i-1}) \quad (22)
\end{aligned}$$

が得られる。これが今回提案する制御則である。この式では式(17)(21)に含まれるパラメータの誤

差項 $f_p^T \Delta p$ が消去されているため、パラメータ誤差に対するロバスト性が保証されることになる。つまり陰的Runge-Kutta法の離散時間間隔に対する安定性と、パラメータ誤差に対するロバスト性が同時に満足されると考えられる。以下の液レベル制御実験でこれを検証する。

3. 液レベル制御実験

3.1 実験装置

本手法の有効性および実装可能性を検証するために、タンクの液レベル制御を例として実験およびシミュレーションによる検証を行った。装置概略図をFig.1に示す。直径19cmのタンク上部より水を流入させ、タンク底部のコントロールバルブにより抜き取る。このときのバルブ開度を調整しタンク内液レベルを設定値に保つ制御を行う。計測、制御、および外乱の設定は全てPCを利用して行った。計測する変数は、流入流量、流出流量、および液レベルである。これらの値はA/D変換ボードを介してPCで読み取る。これらの測定した変数のうち制御に利用する変数は液レベルのみとし流入流量は外乱の設定に利用した。流出流量はオフラインでのモデルパラメータの同定に利用した。ハードウェアの制御はPCからD/A変換ボードを介して行う。バルブで液レベルを制御し、流入流量に対する外乱としてポンプ出力に所定の変動を与えた。

3.2 制御系の設計

このプロセスのモデルは収支式より以下の微分方程式で記述出来る。

$$\frac{dh}{dt} = f(h, u; \mathbf{p}) = \frac{1}{A} (q_{in} - q_{out}) \quad (23)$$

$$q_{out} = -cg(u)\sqrt{h} \quad (24)$$

ここで $g(u)$ はバルブ特性で、イコールパーセントバルブの場合は次式で表わされる。

$$g(u) = a_0 \left(\frac{1}{a_0} \right)^u \quad (25)$$

この式における入力 u はバルブ開度、出力 h は液レベルであり、それぞれについて非線形である。この微分方程式をそれぞれ h と u で偏微分して以下の式を得る。

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial h} = \frac{-ca_0^{1-u}}{2A\sqrt{h}} \quad (26)$$

$$f_u = \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{c}{A} a_0^{1-u} \ln(a_0) \sqrt{h} \quad (27)$$

またRunge-Kutta法として段数2の陰的Runge-Kutta法である、Butcherの公式を利用した。この公式から係数は、

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (28)$$

$$\mu^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \quad (29)$$

とした。また1ステップ先の目標値は次式より決定した。

$$y_{i+1} = (1 - \alpha)y^* + \alpha y_i \quad (30)$$

y^* は最終的な目標値、つまり設定値である。この様に設定値と現在の値との間に重み α をかけて足したものを1ステップ先の目標値と置くことで制御を安定に行うことが出来る。ただし α を大きくし

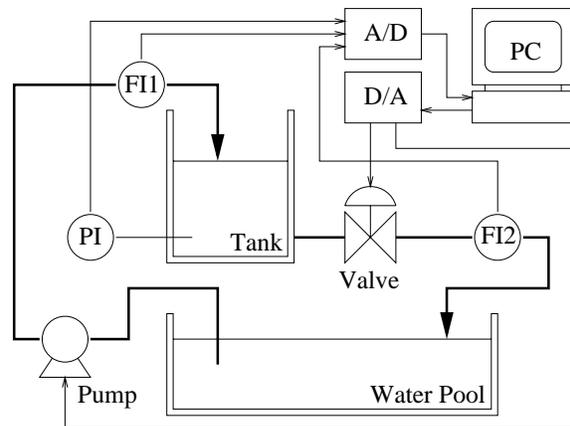


Fig. 1 Experimental setup

すぎると設定値への収束が遅くなるので、制御性能と安定性との兼ね合いで慎重に決定する必要がある。

また、モデルパラメータであるバルブ定数 c および漏洩定数 a_0 は予備実験によりそれぞれ0.00328、0.116とした。モデルパラメータをTable 1にまとめた。

3.3 実験結果

タンクの液レベル制御における設定値変更の実験を行った。比較としてPID制御による実験、およびシミュレーションも行った。液レベルの設定値は15分おきに0.3、0.4、0.5、0.4、0.3[m]と変更した。

はじめに制御周期を短め($\Delta t=0.5[\text{min}]$)に設定して実験を行った。その結果をFig.2に示す。また同様の条件でのシミュレーション結果をFig.3に示す。PID制御による実験結果をFig.4、シミュレーション結果をFig.5に示す。本手法による制御もPIDによる制御も良好な結果が得られたと言える。特に本手法による制御はオーバーシュートや振動もなく、速やかに設定値に収束している。

次に、制御周期を長く($\Delta t=2[\text{min}]$)設定した際の実験結果とシミュレーション結果、およびPIDによる実験結果とシミュレーション結果をそれぞれFig.6、Fig.7、Fig.8、Fig.9に示す。

本手法を用いた制御では、実験、シミュレーションともに良好な制御を行うことが出来た。しかしPID制御では制御周期が長いと大きなオーバーシュートを示している。制御周期が短い時はPIDでも良好な制御が出来るが、このような長い制御周

期では、時間の離散化のため制御性能が悪くなってしまう。またPIDのパラメータ調整も非常に困難なものとなる。

制御性能の評価基準として設定値からの偏差の平均値(MAE)を以下の式で定義し、評価を行った。

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |h_i^* - h_i| \quad (31)$$

各実験におけるMAEをTable 2にまとめた。これを見てもわかる様に、短い制御周期では本手法もPID制御も大きな差は無いが、制御周期を長くした場合には顕著な差が現れている。以上の結果より、本制御法は、長い制御周期にも適用可能な制御法であることが検証された。

次に極端な例として制御周期をさらに長くし、 $\Delta t=10[\text{min}]$ とした際の設定値変更、およびステップ外乱に対する制御実験を行った。実験開始から40分後に設定値を0.3[m]から0.5[m]に変更した時の実験結果をFig.10に示す。制御周期が短い場合に比べると当然制御性能は悪くなるが、この場合でも発散することなくきれいに設定値に収束している。開始40分後にステップ外乱として、流入流量を0.0012[m³/min]から0.0016[m³/min]に変更した時の実験結果をFig.11に示す。サンプリング間隔が長いので、大きく乱されるが、やはり安定して設定値へと収束しているのが分かる。

パラメータ誤差に対するロバスト性の検証として、制御に利用するモデルパラメータを故意に変更して設定値変更の制御実験を行った。予備実験で同定したモデルパラメータは漏洩定数が0.116、バルブ定数が0.0328であったが、これをそれぞれ

Table 1 Parameters

parameter	value	
c	0.00328	[-]
a_0	0.116	[-]
A	0.0284	[m ²]
q_{in}	0.0012	[m ³ /min]

Table 2 Mean of the absolute error(MAE)

	MPC	PID
実験($\Delta t = 0.5$)	0.01379	0.01457
Simulation($\Delta t = 0.5$)	0.01120	0.01172
実験($\Delta t = 2$)	0.02668	0.02848
Simulation($\Delta t = 2$)	0.01960	0.02413

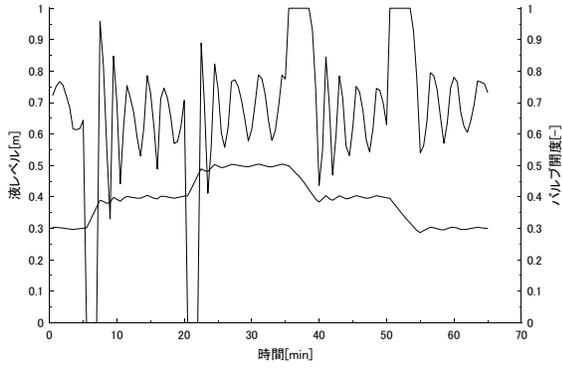


Fig. 2 MPCによる実験結果($\Delta t = 0.5$)

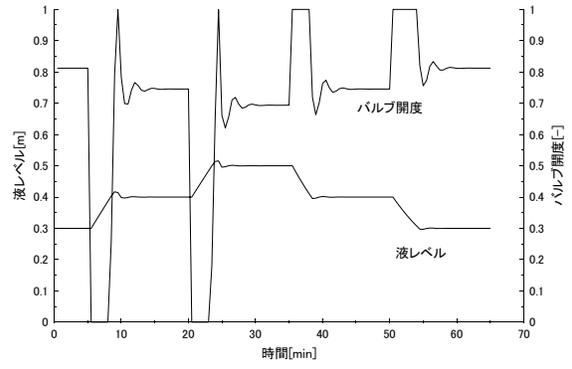


Fig. 5 PIDによるsimulation結果($\Delta t = 0.5$)

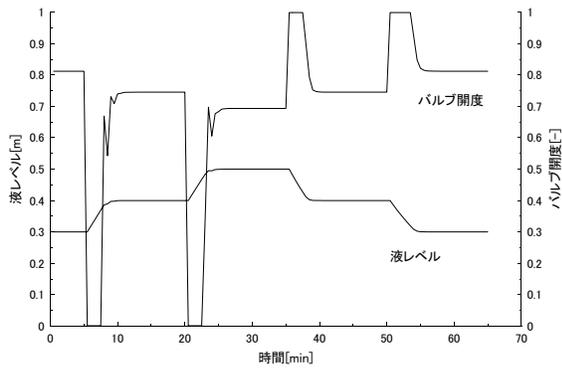


Fig. 3 MPCによるsimulation結果($\Delta t = 0.5$)

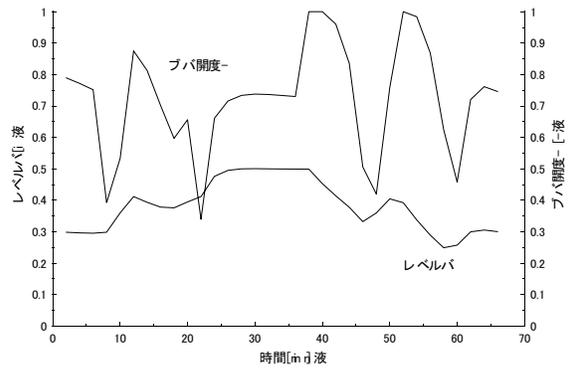


Fig. 6 MPCによる実験結果($\Delta t = 2$)

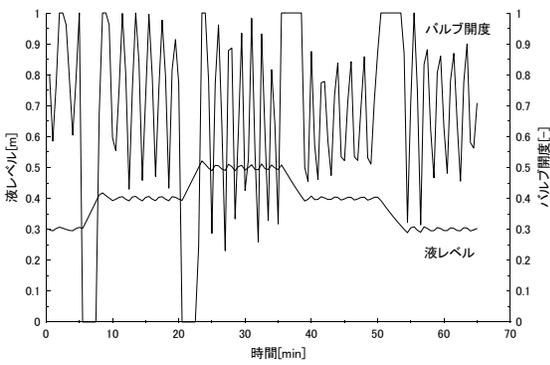


Fig. 4 PIDによる実験結果($\Delta t = 0.5$)

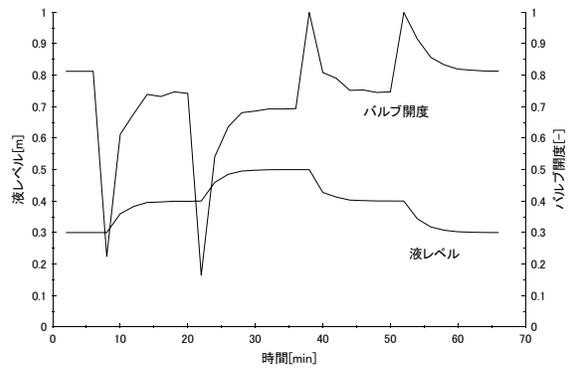


Fig. 7 MPCによるsimulation結果($\Delta t = 2$)

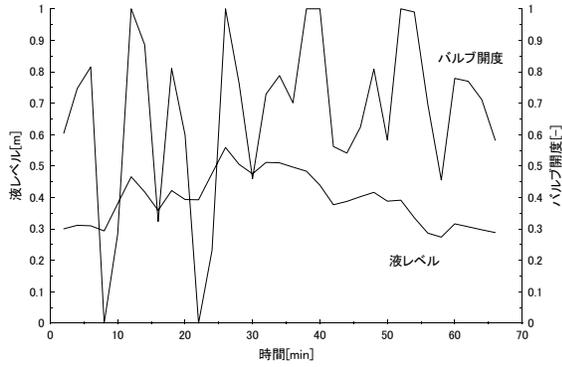


Fig. 8 PIDによる実験結果($\Delta t = 2$)

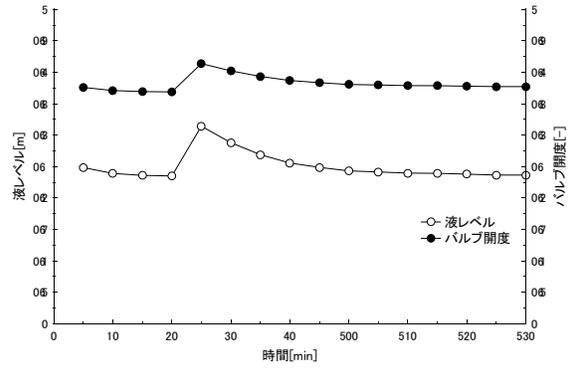


Fig. 11 ステップ外乱($\Delta t = 10$)

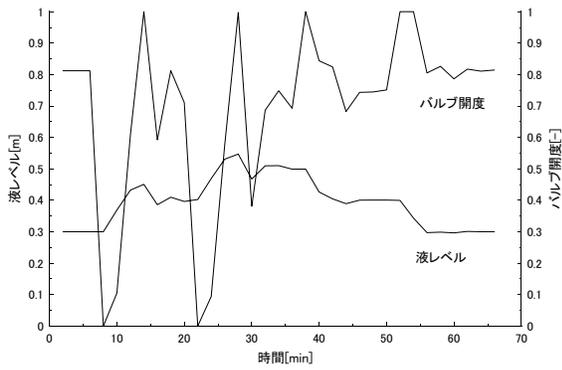


Fig. 9 PIDによるsimulation結果($\Delta t = 2$)

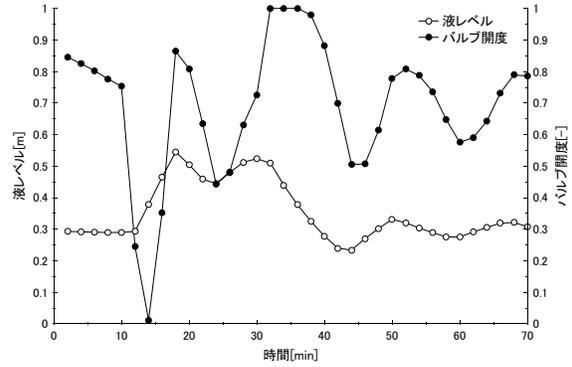


Fig. 12 パラメータ誤差があるときの実験結果($\Delta t = 2$)

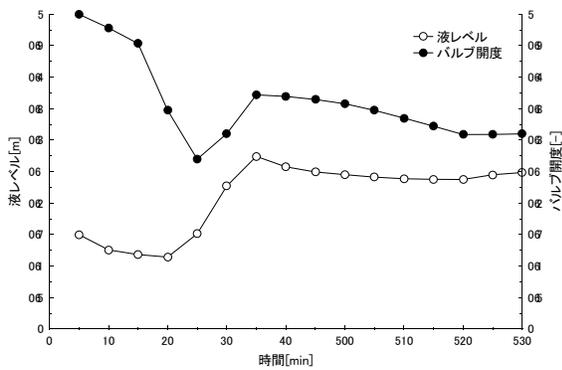


Fig. 10 設定値変更($\Delta t = 10$)

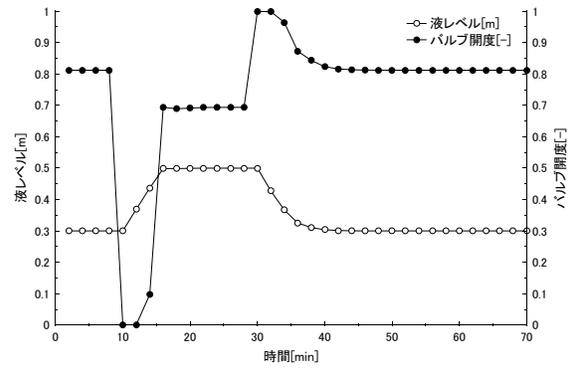


Fig. 13 パラメータ誤差があるときのsimulation結果($\Delta t = 2$)

約2倍の0.2、0.06とした、制御周期 Δt を2分として実験およびシミュレーションを行った。結果をそれぞれFig.12、Fig.13に示す。モデルパラメータに誤差が含まれているにも関わらず、良好な制御結果が得られた。このことから本手法はモデルパラメータ誤差に対するロバスト性を持っていることが分かる。

以上の実験およびシミュレーションから、この制御法は長い制御周期においても安定な制御法であり、さらにモデルパラメータ誤差に対するロバスト性を備えていることが確認出来た。

4. 結論

長い離散間隔に対して安定な陰的Runge-Kutta法を利用したモデル予測制御の一手法を提案をし、その制御法がパラメータ誤差に対するロバスト性も備えている事を示した。タンクの液レベル制御系に対して本手法を適用し、実験およびシミュレーションを行い、この方法がPID制御より優れた制御性能であることを示した。特に制御周期を長くとした場合にも本手法が適用可能であることを確認した。

記号

q_{in}	流入流量	$[\text{m}^3/\text{min}]$
q_{out}	流出流量	$[\text{m}^3/\text{min}]$
h	液レベル	$[\text{m}]$
u	バルブ開度	$[-]$
$g(u)$	バルブ特性	$[-]$
A	タンク断面積	$[\text{m}^2]$
a_0	漏洩定数	$[-]$
t	時間	$[\text{min}]$
Δt	制御周期	$[\text{min}]$
α	目標値決定パラメータ	$[-]$