

## 片持送水管の能動制御系設計におけるセンサ・アクチュエータ配置と限界流速の関係

### On the relation between the critical flow velocity and sensor/actuator placement in active control of cantilevered pipes conveying fluid

土岐 仁\*, 平元和彦\*, 藤谷正樹\*\*, 齊藤 勇\*\*\*

Hitoshi Doki\*, Kazuhiko Hiramoto\*, Masaki Fujitani\*\* and Isamu Saito\*\*\*

\*秋田大学, \*\*鳥取西工高, \*\*\*秋田大学大学院

\*Akita University, \*\*Tottori Nishi Technical Highschool, \*\*\*Graduate school of Akita University

キーワード: 片持送水管 (cantilevered pipes conveying fluid), アクティブ制御(active control), センサ・アクチュエータ配置 (sensor and actuator placement)

連絡先: 〒010-8502 秋田市手形学園町1-1 秋田大学工学資源学部機械工学科  
平元和彦, Tel.: (018)889-2348, Fax.: (018)837-0405, E-mail: hira@ipc.akita-u.ac.jp

## 1. はじめに

弾性送水管内部を流体が流れると, ある流速以上でフラッタや, ダイバージェンスと呼ばれる不安定現象が生じる. 安定性を失う流速は限界流速と呼ばれ, ばねやダンパの付加が送水管の限界流速に及ぼす影響について検討されてきた<sup>1, 2, 3)</sup>.

著者らは,  $H_\infty$ 制御則<sup>4)</sup>やLQG制御則<sup>5)</sup>, ゲインスケジューリング<sup>6)</sup>などの能動制御手法が, 限界流速の向上に著しい効果があることを理論的, 実験的に示してきた. しかし, 能動制御系を構成するコントローラを設計する際, センサやアクチュエータの配置は, 必ずしも制御を行った際に限界流速が最大となるように決定されてはいなかった (文献7では, LQ制御における二次形式評価関数が最小となるようなアクチュエータ配置を求めて

いる).

前報<sup>8)</sup>では, LQG制御則を前提とし, 制御後の限界流速を最大とするセンサ・アクチュエータ配置を, 二次形式評価関数中の重みを一定にした条件の下で求めていた. しかし, この手法では, 制御のために投入するエネルギー量は, 配置候補それぞれで異なっており, 求められた最適配置の物理的な意味はあまり明確でなかった. 本報告では, すべての配置候補で投入エネルギー量を一定とするコントローラの設計法を用いて制御後の限界流速が最大になる配置を求める. コントローラをこのように設計することにより, 各配置候補の間の比較を公平に行うことが可能になる.

## 2. 送水管のモデル化

図1に片持送水管のモデルを示す．水平座標を  $x$ ，たわみを  $W$  とする．送水管は長さ  $L$ ，縦弾性係数  $E$ ，断面二次モーメント  $I$ ，内部減衰係数を  $E^*$  とし，単位長さあたりの質量  $m_b$  の一端固定他端自由の様なはりとして空間に水平になるように  $N_s$  本の糸によって等間隔でつるされている．管の内部には単位長さあたり質量  $m_f$  の流体が一定の速度  $V$  で流れているものとする．また固定端から  $x = L_s$  の位置に送水管のたわみを検出するセンサが取り付けられており， $x = L_a$  の位置にバネ定数  $K$  のバネが取り付けられている．送水管の材質をKelvin-Voigt型の粘弾性体とすると，片持送水管の運動方程式および境界条件は次式で表される．

$$L(w) \equiv w_{,\xi\xi\xi\xi} + \mu w_{,\xi\xi\xi\xi\tau} + 2\sqrt{\beta}vw_{,\xi\tau} + v^2w_{,\xi\xi} + w_{,\tau\tau} + k(w-u)\delta(\xi-\xi_a) + \tau_s \sum_{i=1}^{N_s} C_i w(\xi)\delta(\xi-\xi_i) = 0 \quad (1)$$

$$w(0,\tau) = w_{,\xi}(0,\tau) = w_{,\xi\xi}(1,\tau) + \mu w_{,\xi\xi\tau}(1,\tau) = w_{,\xi\xi\xi}(1,\tau) + \mu w_{,\xi\xi\xi\tau}(1,\tau) = 0 \quad (2)$$

ここでコンマ後の添字はそれらに関する偏微分を意味し， $\delta(\xi)$ はDiracの $\delta$ 関数， $C_i$ はClapayronの三連モーメントの定理より求まる定数である．式(1)，(2)においては，以下のような無次元量を導入している．

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{x}{L}, \xi_a = \frac{L_a}{L}, \xi_s = \frac{L_s}{L}, w = \frac{W}{L}, \\ \beta &= \frac{m_f}{(m_f + m_b)}, k = \frac{KL^3}{EI}, \tau = \frac{t}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_b}}, \\ u &= \frac{U}{L}, \mu = \frac{E^*}{E} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_f + m_b}}, \\ \tau_s &= \frac{(m_f + m_b)gL^4}{lN_s EI}, \xi_i = \frac{x_i}{L} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

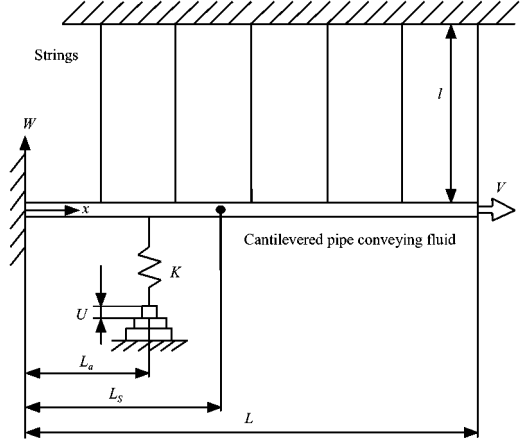


Fig. 1 Analytical model of the cantilevered pipe conveying fluid

$t$ は時間である．境界条件式(2)を考慮してたわみ  $w$ を次のように仮定する．

$$w(\xi,\tau) = \sum_{m=1}^N a_m(\tau)\phi_m(\xi) \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_m(\xi) &= \cosh \alpha_m \xi - \cos \alpha_m \xi \\ &\quad - \sigma_m (\sinh \alpha_m \xi - \sin \alpha_m \xi) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\sigma = \frac{\sinh \alpha_m - \sin \alpha_m}{\cosh \alpha_m + \cos \alpha_m}$$

上式において  $a_m(\tau)$  は  $\tau$  に関する未知関数， $\phi_m(\xi)$  は片持はりの正規化された固有関数， $\alpha_m$  は振動数方程式  $1 + \cosh \alpha_m \cos \alpha_m = 0$  の解である．

式(4)を用いて式(1)にGalerkin法を適用すると，送水管の状態空間表示は式(6)のようになる．

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\tau) + \mathbf{B}u(\tau) \\ w(\xi_s,\tau) = \mathbf{C}\mathbf{x}(\tau) \end{cases} \quad (6)$$

$$\mathbf{x}(\tau) = [a_1(\tau), \dots, a_N(\tau), \dot{a}_1(\tau), \dots, \dot{a}_N(\tau)]^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F} & -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{E} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^{-1}\mathbf{G} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \phi_1(\xi_s) & \dots & \phi_N(\xi_s) & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

### 3. 最適配置問題の定式化

本報告では片持送水管の安定化制御を行う制御則として、操作量 $u(\tau)$ の分散値に拘束条件を持つコントローラを用いる。このようなコントローラは、LQG制御則の重み行列を適切に設定して設計する。以下のような二次形式評価関数を考える。

$$J = \int_0^\infty \left\{ \int_0^L w(\xi, \tau)^2 d\xi + ru^2(\tau) \right\} d\tau, r > 0 \quad (7)$$

LQGコントローラの状態空間表示は以下のようになる。

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(\tau) = \mathbf{A}_K \hat{\mathbf{x}}(\tau) + \mathbf{B}_K w(\xi_s, \tau) \\ u(\tau) = \mathbf{C}_K \hat{\mathbf{x}}(\tau) \end{cases} \quad (8)$$

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_r - \mathbf{K}_e \mathbf{C}, \mathbf{B}_K = \mathbf{K}_e, \mathbf{C}_K = -\mathbf{K}_r$$

ここで、 $\mathbf{K}_r = r^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{K}_e = \mathbf{S}\mathbf{C}^T$ であり、行列 $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{S}$ は、次式の代数Ricatti方程式の正定対称解となる。

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - r^{-1}\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q}_w = \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\mathbf{Q}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A}^T - \mathbf{S}\mathbf{C}^T\mathbf{C}\mathbf{S} + q\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}, q > 0 \quad (10)$$

$\mathbf{x}_c(\tau) = [\mathbf{x}^T(\tau), \hat{\mathbf{x}}^T(\tau)]^T$ とし、式(6)、(8)より閉ループ系を構成する。前報<sup>8)</sup>では、式(6)、(8)からなる閉ループ系において、コントローラを固定し、制御対象の流速のみを変化させ、閉ループ系が不安定になる流速を最大化するようなセンサ・アクチュエータ配置を求めていた。この手法では、各センサ・アクチュエータの配置に対して制御のために投入可能なエネルギー量が異なっていたため、得られた最適配置の物理的な意味は必ずしも明確でなかった。

本報告では、式(7)中の重み $r$ を調整して、すべての配置候補に対して、以下の等式拘束条件を満足するようなコントローラを設計する。

$$\mathcal{E}(u(\tau)^2) = \lambda \quad (11)$$

$\mathcal{E}$ は期待値演算子であり、 $\lambda > 0$ は、設計者が定める $u(\tau)$ の分散の上限値である。流速を制御を行わない場合の限界流速から徐々に上げながら、式(11)を満足するようなコントローラを設計していくと、ある流速 $V_{cr}^c$ で、安定化のために必要なエネルギーが $\lambda$ よりも大きくなり、式(11)を満足するコントローラが設計できなくなってしまう。本報告では、この流速 $V_{cr}^c$ を閉ループ限界流速と定義し、 $V_{cr}^c$ を最大にするようなセンサ・アクチュエータ配置 $(\xi_a^*, \xi_s^*)$ を求める。このようにして最適配置を求めると、すべての配置候補で、投入エネルギー量が $\lambda$ となっているため、配置候補間で閉ループ限界流速を比較する物理的意味は明確である。

式(11)を満足するコントローラは、式(7)中の重み $r$ を以下に示すアルゴリズムで調整することにより求められる。

**Step 1:** 式(11)の $\lambda > 0$ を定める。繰返し回数を $k=1$ とし、重み $r(k) > 0$ を定める。Riccati方程式(10)を解いて、カルマンフィルタゲイン $\mathbf{K}_e$ を定める。

**Step 2:**  $r(k)$ に対するRiccati方程式(9)を解いて、LQGコントローラ(式(8))を求める。

**Step 3:** 次式の閉ループ系を定義する。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_T \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_T n(\tau) \\ u(\tau) = \mathbf{C}_T \mathbf{x}_c(\tau) \end{cases} \quad (12)$$

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{C}\mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{bmatrix}, \mathbf{B}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_K \end{bmatrix}$$

ここで、 $n(\tau)$ は、平均ゼロで、 $n(\tau_1)n(\tau_2) = q\delta(\tau_1 - \tau_2)$  ( $q > 0, \forall \tau_1, \tau_2 > 0$ )を満足する白色ノイズである。以下の量を計算する。

$$E_u^k = \mathbf{C}_T \mathbf{X}_T \mathbf{C}_T^T \quad (13)$$

ここで、行列 $\mathbf{X}_T$ は、Lyapunov方程式

$$\mathbf{A}_T \mathbf{X}_T + \mathbf{X}_T \mathbf{A}_T^T + q\mathbf{B}_T \mathbf{B}_T^T = \mathbf{0} \quad (14)$$

の解である。

**Step 4:**  $|E_u^k - \lambda| < \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ )ならば、設計終了。そ

うでない場合は,  $r(k+1) \leftarrow r(k)(E_u^k/\lambda)^\alpha$  ( $\alpha > 0$ ),  
 $k \leftarrow k+1$ として, Step 2に戻る.

## 4. 結果

### 4.1 投入エネルギー量と閉ループ系限界流速の関係

センサ・アクチュエータ配置をそれぞれ  $0 \leq \xi_s \leq 1$ ,  $0.3 \leq \xi_a \leq 0.6$ の間で0.02刻みで変化させ, 前章の  $V_{cr}^c$ を計算した. 投入エネルギー量  $\lambda$ を  $\lambda = 40, 400, 4000$ それぞれの場合における  $\xi_s, \xi_a$  に対する  $V_{cr}^c$ の3Dプロットを図2, 3, 4に示し, それぞれの場合に対する閉ループ系限界流速  $V_{cr}^c$ と最適なセンサ・アクチュエータ配置  $\xi_s^*, \xi_a^*$ を表1に示す. これらの結果より, 以下の事項が読み取れる.

Table 1 Optimal sensor and actuator placement

$\lambda$	$\max(V_{cr}^c)$ [m/s]	$\xi_a^*$	$\xi_s^*$
40	10.43	0.46	0.6
400	10.67	0.46	0.6
4000	12.30	0.40	0.44

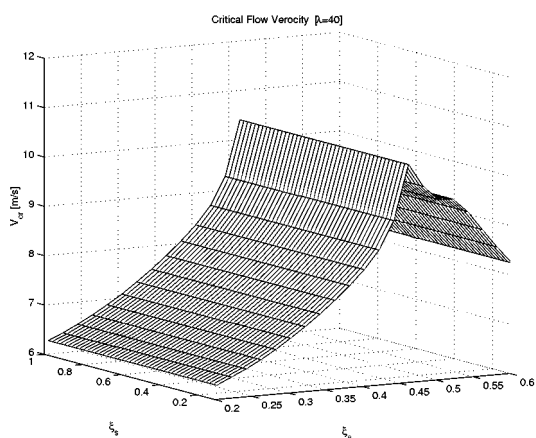


Fig. 2 3D plot of  $V_{cr}^c$  for  $\xi_a$  and  $\xi_s$  ( $\lambda = 40$ )

- 投入エネルギー量  $\lambda$ の増加に伴い, 閉ループ系限界流速  $V_{cr}^c$ の最大値は大きくなる.
- $\lambda$ が小さい場合(図2)は,  $V_{cr}^c$ は主にアクチュ

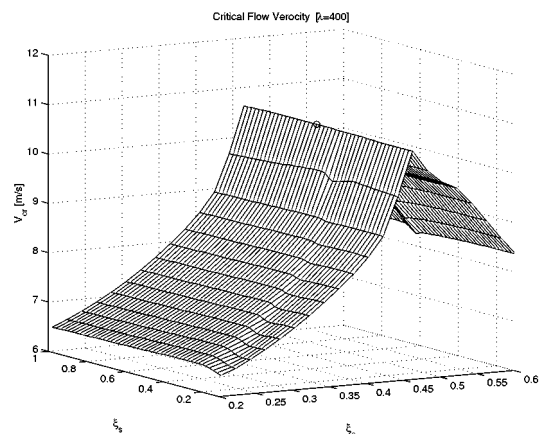


Fig. 3 3D plot of  $V_{cr}^c$  for  $\xi_a$  and  $\xi_s$  ( $\lambda = 400$ )

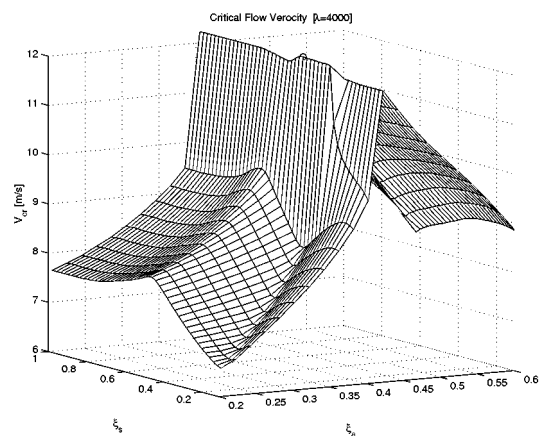


Fig. 4 3D plot of  $V_{cr}^c$  for  $\xi_a$  and  $\xi_s$  ( $\lambda = 4000$ )

エータ配置  $\xi_a$ に強く依存しており, センサ配置  $\xi_s$ にはほとんど依存していない.

- $\lambda$ が大きくなるに従い,  $V_{cr}^c$ は  $\xi_a$ だけでなく,  $\xi_s$ にも依存するようになる.
- $\lambda$ の大小に関わらず, 最適なアクチュエータ配置の付近では,  $V_{cr}^c$ はあまり  $\xi_s$ には依存していない.

### 4.2 実験による検証

前節の結果を実験により検証する. 実験装置を図5に示す. 実験装置は, 送水管のたわみを検出するレーザ式変位センサ, デジタルコントローラと

して使用するパーソナルコンピュータおよび、制御力を発生するDCサーボモータとボールねじからなるアクチュエータから構成されている。スライダと送水管は無次元ばね定数 $k = 1939$ のピアノ線により接続されており、スライダの移動に伴い管に制御力を与える。サーボモータ・スライダ系に対しては、動特性を向上させるため、角度フィードバックによるP制御を行っている。管の諸元を表2にまとめる。

図5の実験装置では、前節で得られた最適配置に対応する閉ループ限界流速 $V_{cr}^c$ を発生することはできなかった。そこで、本実験では、発生可能な流速の範囲内で、センサ・アクチュエータ配置 $(\xi_s, \xi_a)$ を変更し、 $V_{cr}^c$ を求めることにする。図6に、 $\lambda = 400$ とし、センサを最適な配置に固定し $(\xi_s = \xi_s^* = 0.6)$ 、 $\xi_a$ を変化させた場合に対する $V_{cr}^c$ の変化を示す。この図より、 $V_{cr}^c$ の理論値(図3の曲面の一部)と実験値はよく一致していることがわかる。このような結果は最適配置の付近でも成立していることが推察され、本実験の結果は前節で得られた結果の妥当性を間接的に示唆しているといえる。

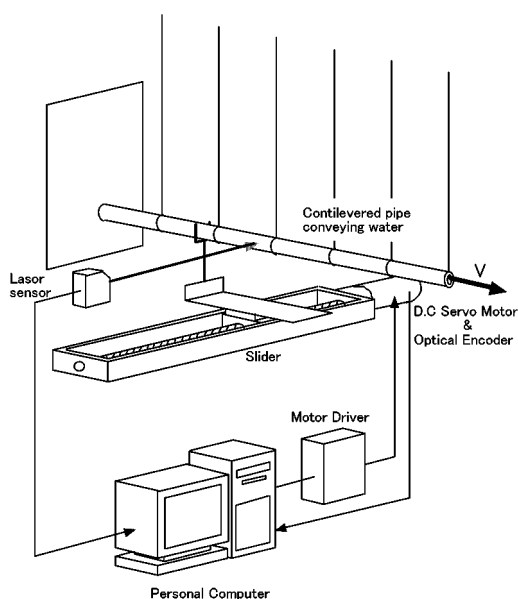


Fig. 5 Experimental setup

Table 2 Physical properties of pipe system

Parameter	Value
Inner diameter $d$ [mm]	4.38
Outer diameter $D$ [mm]	12.23
Length $L$ [m]	0.602
Mass per unit length of pipe $m_b$ [kg/m]	0.122
Mass per unit length of fluid $m_f$ [kg/m]	$1.52 \times 10^{-2}$
Young's modulus $E$ [Pa]	$6.06 \times 10^6$

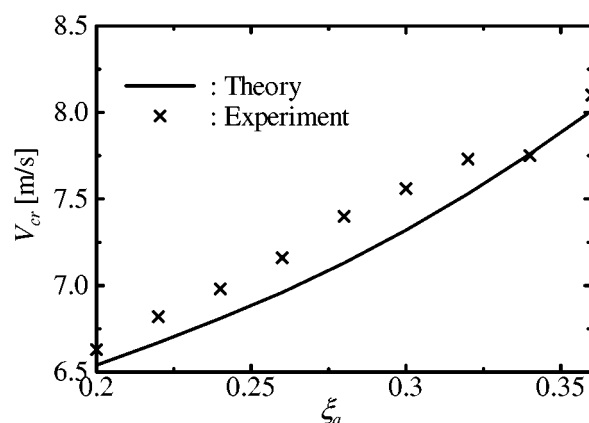


Fig. 6 Plots of  $V_{cr}^c$  for  $\xi_a$  ( $\lambda = 400, \xi_s = \xi_s^* = 0.60$ )

## 5. おわりに

本報告では、片持送水管の能動制御設計におけるセンサ・アクチュエータ配置と限界流速の関係について検討した。得られた結果を以下にまとめる。

- 1) 能動制御のために要するエネルギー量をすべてのセンサ・アクチュエータ配置候補に対して一定とし、閉ループ限界流速を最大化する配置を求めた。
- 2) 投入エネルギー量の変化に伴い、閉ループ限界流速とセンサ・アクチュエータ配置の関係や、最適な配置自身が変わることがわかった。この結果は、片持送水管の能動制御系設計の際の重要な指針となりうる。

3) 得られた結果の一部を実験により検証し（実験可能な範囲内では）理論と実験で良好な一致をみた。

今後は、最適な配置付近に対応する閉ループ限界流速を発生できるように実験装置を改良し、得られた最適配置の妥当性を実験的に検証する。

## 参考文献

- 1) 杉山ほか，日本機械学会論文集（A編），**51**-463, (1985), 905-911.
- 2) 杉山ほか，日本機械学会論文集（C編），**51**-467, (1985), 1506-1514.
- 3) 杉山ほか，日本機械学会論文集（C編），**54**-498, (1985), 353-356.
- 4) 土岐ほか，日本機械学会論文集（C編），**62**-601, (1996), 3394-3399.
- 5) Doki, H. et. al, J. Fluids and Structures, **12**, (1998), 615-637.
- 6) 土岐ほか，日本機械学会論文集（C編），**65**-632, (1999), 1448-1453.
- 7) 土岐・谷，日本機械学会論文集（C編），**54**-498, (1988), 357-362.
- 8) 土岐ほか，日本機械学会1999年度年次大会講演論文集(I), (1999), 453-454.