

非線形拡散係数物質を媒体とする円筒吸源における 吸収速度の準定常仮定による推定について

Estimation of Absorption Rate of a Cylindrical Sink

From Surrounding Materials

Which Diffusivity is Nonlinear on the Assumption of the Quasi Steady Condition

○原 道宏*, 宮本和佳*

○Michihiro Hara*, Kazuyoshi Miyamoto*

*岩手大学

*Iwate University

キーワード: 円筒吸源 (cylindrical sink), 準定常 (quasi steady), 吸収速度 (absorption rate),
非線形拡散係数 (nonlinear diffusivity), 近似公式 (approximate formula),
数値計算 (numerical calculation)

連絡先: 〒020-8550 盛岡市上田 3-18-8 岩手大学農学部農林環境科学科リサイクル生物生産工
学講座環境制御工学研究室 原 道宏, Tel.&Fax: (019)621-6125, E-mail: mrhara@iwate-u.ac.jp

要約

植物根における吸水を促す要因として、植物に起因するものと土壤等植物根を取り巻く培地に起因するものの二つが考えられる。原ら (1994) は、前者を「植物の吸水態勢」、後者を「土壤の水分供給能力」と名付けた。ここで原ら (1994) は水分供給能力を、「根に隣接する培地の水ポテンシャルが一定の時間パターンで低下した時に供給される水分量」と定義した。本研究は土壤の水分供給能力を見積もるために、解析解を導きだし、その解析解によって土壤の水分供給能力を見積もることを目的とした。

解析解は $\partial \theta / \partial t$ が r によらず一定である条件下、本研究では「準定常状態」と呼びこの条件のもとに導き出される解析解を準定常法とした。

実験においては、この条件を実現できるよう流量調節計を用い、流量を一定に保った。

準定常状態での準定常法の有効性を評価するために、まず実験結果を数値解法による計算結果と比較し、数値解法の有効性を確認した上で、数値解法の計算結果と準定常法を比較し、解析解である準定常法の有効性を検討した。準定常法の精度はかなり良く、この条件下での水分分布を表すことができる式であるといえる。

準定常法は流量、素焼管の大きさ、土壤特性を示すパラメーターからなっており、この式の特徴を調べることで本研究の目的である土壤の水分供給能力を見積もることができた。

1. はじめに

植物根における水分の吸収は植物が生育するにあたって最も重要な生理活動の一つであり、光合成や蒸散に大きく影響するものである。植物は光合成に必要な二酸化炭素を大気から取り込むために気孔を開くが、そのとき蒸散により水分が失われこの水分量が根から取り込まれないと植物が水分欠乏に陥り気孔を閉じ同時に光合成も止まり植物の生育が停止してしまう。この水分が十分にまかなえなければ、葉は萎れ生育は停止する。植物は光合成によって使用される水及び細胞液中の水の総水分量の数百倍の水を蒸散によって大気中に放出しつつも体内の含水量の維持をはかっている。光合成によって有機物を合成する際、環境などによる違いはあるが、植物によっては蒸散による水分損失は1gの有機物を合成する時に500gにも及ぶと言われている(石田, 1984)。植物に水を供給する土壌としては保水性のよい土壌がよいと言われているが、水もちの良い土壌は植物に水をとられることにも抵抗する。従って植物根は土壌から水分を吸収するために多大の力を必要とし、この力の出せなくなった植物は土壌から水の吸収を続けられなくなり、萎れ、やがて枯れていく。

本研究は植物根の水分吸収に直接影響がある根近傍の水分量を考慮できる円筒一次元方向の水分移動を扱い、土壌の水分供給能力という概念に基づき植物への水分供給に関わる土壌要因について検討した。

特に、土壌の水分供給能力が土壌の保水性及び透水性、ないしは水分拡散性とどのように関係するのかを検討した。これは、土壌試験により得られる土壌の水利特性が植物根が土壌から吸水する際の難易度とどのような関係があるのかを明らかにしようという試みである。この試みを達成することにより、土壌水分特性と植物生育環境との関わりを具体的に論じることができるようになるであろうことを念じてのことである。

円筒の半径方向 1 次元水分流を対象に実験をおこない、対応する数値計算(差分法=Crank-Nicolson 法)解および代数的解析解(準定常解)を求め、相互比較により三者の一致を確認したうえ、代数解をもとに土壌の水分供給能力に対する「根の吸水態勢」及び「土壌の水利特性」の関わりを論じた。

尚、当初は論文題目にもあるとおり、土壌の土壌の水分供給能力と土壌の水利特性(論題では水分特性とややゆるめの表現になっている)の関係を求める方針であったが論を進めていくにしたがい植物根における吸水を扱うには根の吸水態勢による因子が含まれざるを得ないことが明らかになってきた。しかし、本論文の解析を見れば明らかに植物根における吸水速度には根の吸水態勢による因子と土壌の水利特性による因子とが渾然とではなく、きれいに分離した形で影響していることがわかった。これは本論文で扱った根の形態が円筒という単純なものであったことによるものだが複雑に分布した根においても局所的にはそのようになっていることが予想され、その点が将来において明らかにされることを願うものである。

2. 目的と研究手順

研究の目的は、土壌から根に水分を供給する際、その流量は、植物根の形態、土壌の水利特性及び水分状態、植物根の吸引圧にどのように関わっているのかを明確にすることである。そのため、まず流量一定の条件で実験を行い、その実験データを首尾よく説明する理論式を導く。実験では植物根の代わりに素焼管を用い、形状を単純化することで計算に要する条件を単純かつ明確にする。使用した素焼管の圧力変化を調べるために差圧計を用い、一定流量に調節するために流量調節計を使用し、流量対圧力の関係を測定する。理論

展開として数値解及び解析解を導き出す。数値解及び解析解を導くにあたって土壌水分特性を表現する式について検討し、それをもとに準定常状態における解を導き出す。得られた解の特徴を調べることにより、土壌水分供給能力の特徴を知る。

3. 材料及び実験方法

図2に示す測定装置を組み立て、円筒($d=169$, $L=418$ mm) 容器の中に土壌試料「ソイルフ

レンド」を充填し、中心線に合わせて素焼き円管($d=20.3$ mm)を入れる。素焼き管にチューブをつなげ、圧力釜の壁を貫いて外に出し、流量調節計を経て電子天秤に導き、印加圧力により排出される水分量を自動計測する。試料を最初に水で飽和し、圧力を印加し、流量調節計により流量を一定値に設定する。このときの圧力降下を差圧計で読み取る。排水により土壌中の水分が少なくなるにつれ土壌の透水性が悪くなり、通水抵抗が上がり、圧力降下は大きくなる。

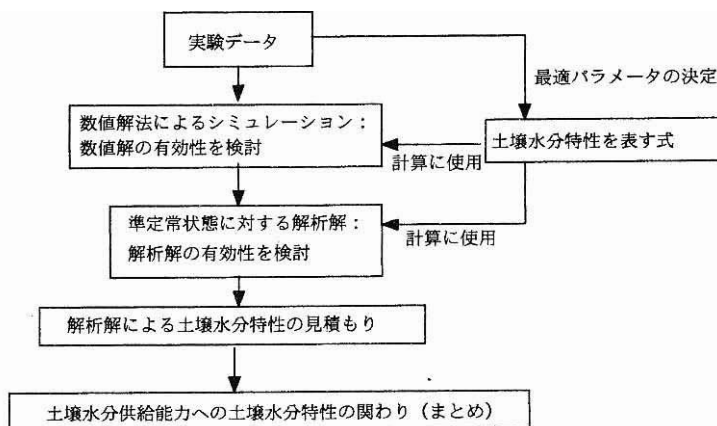


図1 研究手順

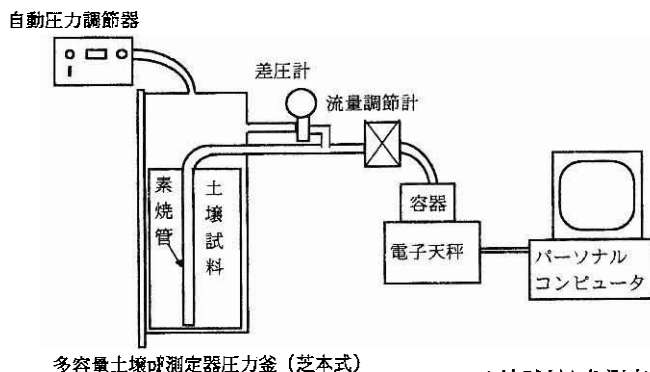


図2 土壌試料と各測定器

4. 理論解析

4.1 土壌水分特性を表す式の関数形について

van Genuchtenの導きだした式は幅広い h に対応することができ、特に θ が θ_s に近いところまで表すことができるが、数式がやや複雑であり、有限精度の計算では h の大きい、すなわち θ が θ_r に近づくにつれて桁落ちによる誤差が大きくなり、精度の良い数値を得るうえでは実用的ではないといえる。

θ が θ_r に近い時、すなわち

$$\theta - \theta_r$$

$$\theta_s - \theta_r$$

θ : 体積含水率 (cm^3/cm^3)

θ_s : 飽和時体積含水率 (cm^3/cm^3), θ_r : 残余の体積含水率 (cm^3/cm^3)

が0(ゼロ)に近いときに精度のよい式を得るために、van Genuchten(1980)が導き出した次式(1)の $D[\theta e]$ を級数展開する。

$$D[\theta e] = \frac{K_s (1-m)}{\alpha (\theta_s - \theta_r)} (\theta e^{\frac{1}{2} - \frac{1}{m}}) \left(\left(1 - \theta e^{\frac{1}{m}}\right)^{-m} + \left(1 - \theta e^{\frac{1}{m}}\right)^m - 2 \right) \quad (1)$$

$$m = 1 - \frac{1}{n}$$

α, n : 定数, D : 水分拡散係数 (cm^2/min), K_s : 飽和透水係数 (cm/min)

$\theta e=0$ の付近で、 θe に関し、式(1)は次の様に展開される。

$$D[\theta e] = \frac{K_s (1-m) m}{\alpha (\theta_s - \theta_r)} \left[\theta e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m}} + \theta e^{\frac{1}{2} + \frac{2}{m}} + \frac{11+m^2}{12} \theta e^{\frac{1}{2} + \frac{3}{m}} + \frac{5+m^2}{6} \theta e^{\frac{1}{2} + \frac{4}{m}} + \dots \right]$$

この初項のみをとれば、

$$D[\theta e] = \frac{K_s (1-m) m}{\alpha (\theta_s - \theta_r)} \theta e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m}} \quad (2)$$

van Genuchten(1980)は θe を h の関数として次式で表した。

$$\theta e[h] = \frac{1}{(1 + (\alpha |h|)^n)^m}$$

h: 圧力水頭(cmH₂O)

圧力水頭hは水分張力Tと次の関係がある。

$$h = -T$$

h: 圧力水頭 (cmH₂O), T: 水分張力 (cmH₂O)

もともと、これは、Brooks&Corey(1964)の提案した形の式

$$\theta_e[h] = \frac{1}{((\alpha |h|)^n)^m} = (\alpha |h|)^{-\frac{n}{1-m}} \quad (3)$$

を、h=0(飽和)に近い水分領域についても成り立つように改良したものであった。式(3)をhについて解くと、

$$|h[\theta_e]| = \frac{1}{\alpha \theta_e^{\frac{1}{n-1}}} = \frac{1}{\alpha} \theta_e^{1-\frac{1}{n}}$$

となる。式(2)と式(3)を使った場合のマトリックスポテンシャルについて考える。マトリックスポテンシャルは次式で表される。

$$\phi = \int_0^{\theta_e} D \, d\theta \quad (4)$$

ϕ : マトリックスポテンシャル(cm²/min)

式(2)の拡散係数D(θ_e)を式(4)に代入すると、

$$\begin{aligned} \phi &= \int_0^{\theta_e} D(\theta_e) \frac{d\theta}{d\theta_e} \, d\theta_e = (\theta_s - \theta_r) \int_0^{\theta_e} D(\theta_e) \, d\theta_e \\ &= (\theta_s - \theta_r) \frac{K_s (1-m) m}{\alpha (\theta_s - \theta_r)} \int_0^{\theta_e} \theta_e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{m}} \, d\theta_e \\ &= (\theta_s - \theta_r) \frac{K_s (1-m) m}{\alpha (\theta_s - \theta_r)} \theta_e^{\frac{3}{2} + \frac{1}{m}} \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{m} \right] \end{aligned}$$

よって ϕ は、

$$\phi[\theta_e] = \frac{K_s (1-m) m}{\alpha} \theta_e^{\frac{3}{2} + \frac{1}{m}} \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{m} \right] \quad (5)$$

尚、van GenuchtenのDの関数式(1)の ϕ を定義式(4)に従って求めると

$$\phi[\theta e] = \frac{Ks(1-m)}{\alpha m} \frac{\theta e^{\frac{3}{2} + \frac{1}{m}}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{m}} \left({}_2F_1\left[\frac{3m}{2} - 1, m, \frac{3m}{2}, \theta e^{\frac{1}{m}}\right] + {}_2F_1\left[\frac{3m}{2} - 1, -m, \frac{3m}{2}, \theta e^{\frac{1}{m}}\right] - 2 \right)$$

となる。これを $\theta e=0$ の周りに級数展開すると、

$$\phi[\theta e] = \frac{Ks(1-m)m}{\alpha} \left[\frac{\theta e^{\frac{3}{2} + \frac{1}{m}}}{\frac{3}{2} + \frac{1}{m}} + \frac{\theta e^{\frac{3}{2} + \frac{2}{m}}}{\frac{3}{2} + \frac{2}{m}} - \frac{11+m^2}{12} \frac{\theta e^{\frac{3}{2} + \frac{3}{m}}}{\frac{3}{2} + \frac{3}{m}} + \frac{5+m^2}{6} \frac{\theta e^{\frac{3}{2} + \frac{4}{m}}}{\frac{3}{2} + \frac{4}{m}} + \dots \right]$$

となる。ここで、この $\phi[\theta e]$ は、 $D[\theta e]$ の級数展開式を項別に θ で積分したものと等しくなっている。また、この初項のみをとったものは、式(5)に等しい。

式(5)に式(3)を代入すると ϕ を h の関数として表す式を得る。

$$\phi[h] = \frac{Ks(1-m)m}{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m}\right) \alpha^{\frac{m+4}{2(1-m)}}} \frac{1}{|h|^{\frac{3m+2}{2(1-m)}}} \quad (6)$$

式(5)の逆関数は、

$$\theta e[\phi] = \frac{\alpha \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m}\right) \phi^{-1} \left(\frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{m}}\right)}{Ks(1-m)m} \quad (7)$$

同様に式(6)の逆関数は、

$$|h[\phi]| = \left(\frac{Ks(1-m)m}{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m}\right) \alpha^{\frac{m+4}{2(1-m)}}} \frac{1}{\phi} \right)^{\frac{2(1-m)}{3m+2}} \quad (8)$$

次に、

$$K = C \times D, \quad C = \frac{d\theta}{dh}$$

から、水分容量 $C((\text{cm}^3/\text{cm}^3)/\text{cm})$ 及び、透水係数 $K(\text{cm}/\text{min})$ を求めることができる。

$$C[\theta e] = \frac{\alpha (\theta s - \theta r) m}{1 - m} \theta e^{\frac{1}{m}} \quad (9)$$

$$K[\theta e] = D[\theta e] \left(\frac{d\theta}{dh} \right) = K s m^2 \theta e^{\frac{1}{2} + \frac{2}{m}} \quad (10)$$

本研究においては、式(1)から導き出した式(2)、そしてBrooks&Coreyの式(3)から各水分特性を表す関数形の式(5)～(10)を導き出した。これらの式は、形が比較的単純で使いやすく、水分の少ない範囲における数値の精度がよく、今回の研究のように、土壌の水分供給能力が問題となる低水分領域について論ずるには適していると言える。

以上の様に得られた級数近似式をvan Genuchtenの式と比較すると $\theta \approx 0.55$ 以下の水分範囲において両者の差が小さいことがわかる。このように級数展開の初項のみを採用した近似式は簡潔で代数的見通しが良く、全域にわたり病的症状がなく、かつ、水分飽和に近いごく多水分領域を除いては数値の精度も高いことから、土壌の水分供給能力が問題となるような少水分域について論ずるには好適といえる。

4.2 準定常状態における解とその導き方

円筒半径方向一次元の土壌中における水分移動の方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (11)$$

θ : 体積含水率(cm^3/cm^3), t : 時間(minutes)

r : 中心軸からの距離(cm), $D(\theta)$: 土壌の水分拡散係数(cm^2/min)

初期条件及び境界条件は

$$t = 0, a \leq r \leq b, \theta = \theta_i \quad (12)$$

$$t > 0, r = a, 2\pi r D \frac{\partial \theta}{\partial r} = q \quad (13)$$

$$t > 0, r = b, \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad (14)$$

a : 吸水体(根や素焼管)の半径(cm), b : カラムの半径(cm)

θ_i : 初期の体積含水率(cm^3/cm^3)

q : フラックス、すなわち単位長さ当たりの流量($(\text{cm}^3/\text{min})/\text{cm}$)

準定常法とは、ここでは、 $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ が r によらず一定であることを指す。ただし、 $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ の値は時間によって変わっても良い。

準定常の場合、式(11)の左辺は次式の様になる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -f(t) \quad (15)$$

$f(t)$: 時間のみの関数

式(11)、式(15)より

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = -r f(t) \quad (16)$$

式(16)を $r=a$ から $r=b$ まで積分すると

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) dr = \int_a^b -r f(t) dr \quad (17)$$

式(17)の左辺は、

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) dr = \left(r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=b} - \left(r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=a}$$

式(14)の境界条件より

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) dr = - \left(r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)_{r=a} = - \frac{q}{2\pi} \quad (18)$$

式(17)の右辺は

$$\int_a^b -r f(t) dr = -f(t) \frac{b^2 - a^2}{2} \quad (19)$$

従って式(17)は

$$- \frac{q}{2\pi} = -f(t) \frac{b^2 - a^2}{2}$$

よって、

$$f(t) = \frac{q}{\pi (b^2 - a^2)} = \frac{Q}{\pi L (b^2 - a^2)} \quad (20)$$

q : 単位長当たりの流量 (cm^2/min), Q : 全流量 ($=qL$) (cm^3/min)

式(16)を $r=r$ から $r=b$ まで積分する。左辺は、

$$\int_r^b \frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) dr = \left[r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_r^b$$

式(14)の境界条件により

$$\left[r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_r^b = - \left[r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \right]_r = - r D \frac{\partial \theta}{\partial r} \quad (21)$$

右辺は、

$$\int_r^b -r f(t) dr = - \left[\frac{r^2}{2} \right]_r^b f(t) = -f(t) \frac{b^2 - r^2}{2} \quad (22)$$

よって式(23)が得られる。

$$\begin{aligned} -r D \frac{\partial \theta}{\partial r} &= -f(t) \frac{b^2 - r^2}{2} \\ D \frac{\partial \theta}{\partial r} &= \frac{f(t)}{2} \left(\frac{b^2}{r} - r \right) \end{aligned} \quad (23)$$

式(23)の両辺を $r=a$ から $r=r$ まで積分する。左辺は、

$$\int_a^r D \frac{\partial \theta}{\partial r} dr = \int_{\theta_a}^{\theta} D d\theta \quad (24)$$

右辺は

$$\begin{aligned} \int_a^r \frac{f(t)}{2} \left(\frac{b^2}{r} - r \right) dr &= \left[b^2 \ln(r) - \frac{r^2}{2} \right]_a^r \frac{f(t)}{2} \\ &= 2\pi L (b^2 - a^2) \left(b^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{r^2 - a^2}{2} \right) \end{aligned}$$

拡散係数の θ に関する積分は、マトリックスフラックスポテンシャルと呼ばれる。

$$\int_{\theta_a}^{\theta} D d\theta = \phi(\theta) \quad (26)$$

これを使うと式(24)は、

$$\int_{\theta_a}^{\theta} D d\theta = \phi(\theta) - \phi(\theta_a) \quad (27)$$

式(25)、式(27)から

$$\phi(\theta) - \phi(\theta_a) = 2\pi L (b^2 - a^2) \left(b^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{r^2 - a^2}{2} \right) \quad (28)$$

尚、 $\phi(\theta)$ の値には全体に定数を付加する不定性が許されるので、例えば $\theta_e=0$ における $\phi(\theta)$ の値を0にとるなど計算の都合に合わせることが可能である。

この式は以下のパラメーターを条件として指定すると、各 r に対するその時の $\phi(\theta)-\phi(\theta_a)$ の値を知ることができる。

Q: 流量(cm^3/min), L: 試料長(cm), a: 吸水体の半径(cm), b: カラム半径(cm)

これから、半径 a(cm)、長さL(cm)の植物根が、半径b(cm)、高さL(cm)のカラムの中央にあるとき、流量Q(cm^3/min)で植物根が吸水を行う時の各半径位置r(cm)における ϕ の値が分かる。

この式を実際に使うためには $\phi(\theta)$ の関数が必要である。 $\phi(\theta)$ の具体的な関数は式(5)で示した、

$$\phi[\theta_e] = \frac{Ks(1-m)m}{\alpha} \theta_e^{\frac{3}{2} + \frac{1}{m}} \quad (5)$$

により、 θ_e の値から算出できる。また、 ϕ から θ への換算は、式(7)から算出できる。

$$\theta_e[\phi] = \left(\frac{\alpha \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m} \right) \phi}{Ks(1-m)m} \right)^{\left(\frac{1}{\frac{3}{2} + \frac{1}{m}} \right)} \quad (7)$$

式(5)、式(7)によって式(28)を、 θ を表す式に書き換える。

まず式(28)を $\phi(\theta)=$ の形にする。

$$\phi(\theta) = \left(\theta_a \right) + 2\pi L(b^2 - a^2) \left[b^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{r^2 - a^2}{2} \right] \quad (29)$$

式(29)を式(7)に代入すると

$$\theta_e[\phi(\theta)] = \left(\theta_a \right) + 2\pi L(b^2 - a^2) \left[b^2 \ln \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{r^2 - a^2}{2} \right] \quad (30)$$

となる。式(30)では、 θ_a とQが分れば、そのときの位置rにおける θ_e を算出する形になっている。

4.3 土壌水分供給能力への土壌水分特性の関わり

準定常法の解析結果をもとに、土壌水分供給能力への土壌水分特性の関わりを考察する。

式(6)より、マトリックフラックスポテンシャル ϕ は圧力水頭hの関数である。

$$\phi[h] = \frac{Ks(1-m)m}{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m}\right) \alpha^{\frac{m+4}{2(1-m)}}} \frac{1}{|h| \frac{3m+2}{2(1-m)}} \quad (31)$$

準定常状態におけるマトリックスポテンシャル ϕ は r の関数として、式(28)から次のように書ける。

$$\phi(r) - \phi(a) = \frac{Q}{2\pi L(b^2 - a^2)} \left(b^2 \text{Ln} \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{r^2 - a^2}{2} \right) \quad (32)$$

$$\phi(b) - \phi(a) = \frac{Q}{2\pi L(b^2 - a^2)} \left(b^2 \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{b^2 - a^2}{2} \right) \quad (33)$$

$|h| \rightarrow \infty$ のときに $\phi[h] \rightarrow 0$ となるので、 $\phi(b)$ の値が一定のとき、 Q は $\phi(a) \rightarrow 0$ において最大値 $Q_{\max}$ に近づく。

$$\phi(b) = \frac{Q_{\max}}{2\pi L(b^2 - a^2)} \left(b^2 \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{b^2 - a^2}{2} \right) \quad (34)$$

$$\therefore Q_{\max} = \frac{2\pi L \phi(b)}{\frac{b^2}{b^2 - a^2} \text{Ln} \left(\frac{b}{a} \right) - \frac{1}{2}} \quad (35)$$

式(6-3)を式(6-4)の辺々で除せば、

$$1 - \frac{\phi(a)}{\phi(b)} = \frac{Q}{Q_{\max}} \quad (36)$$

$$\frac{\phi(a)}{\phi(b)} = 1 - \frac{Q}{Q_{\max}} \quad (37)$$

$r=a$ 、 $r=b$ における水頭ポテンシャルをそれぞれ $h(a)$ 、 $h(b)$ と書けば $Q_{\max}$ と $\frac{Q}{Q_{\max}}$ は式(31)を適用すれば次のようになる。

$$Q_{\max} = \frac{2\pi L Ks(1-m)m}{\frac{p^2}{p^2-1} \text{Ln } p - \frac{1}{2}} \frac{1}{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m}\right) \alpha^{\frac{m+4}{2(1-m)}} |h(b)| \frac{3m+2}{2(1-m)}} \quad (38)$$

ただし、 $p = \frac{b}{a}$ とおいた。

この関数は図4に示される。ちなみに、 p^2 は、

$$p^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{\pi b^2 L}{\pi a^2 L}$$

また、 v を $v = \frac{1}{p^2}$ とおけば

$$v = \frac{1}{p^2} = \frac{\pi a^2 L}{\pi b^2 L}$$

となり、 v は土壌根系全体における根の体積比であり、 $0 < v < 1$ である。この v を用いれば

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{p^2 - 1} \ln p - \frac{1}{2} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{p^2}} \frac{\ln p^2}{2} - \frac{1}{2} = \\ \frac{1}{1 - v} \frac{-\ln v}{2} - \frac{1}{2} &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\ln v}{1 - v} \right) > 0 \quad (0 < v < 1) \end{aligned} \quad (40)$$

$$Q_{\max} = 2 \pi L f(v) g(K_s, m, \alpha) |h(b)|^{\frac{3m+2}{2(1-m)}} \quad (41)$$

$$v = \frac{a^2}{b^2},$$

$$f(v) = \frac{1}{2}$$

$$g(K_s, m, \alpha) = \frac{K_s (1 - m) m}{\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{m} \right) \alpha^{\frac{m+4}{2(1-m)}}}$$

このように $h(b)$ が一定のとき根への水分供給流量には最大値 $Q_{\max}$ が存在し、式(41)のように表される。これは根長 L に比例し、根の体積比 v の関数 $f(v)$ に比例し、土壌の水分特性から定まる関数 $g(K_s, m, \alpha)$ に比例し、 $|h(b)|^{\frac{3m+2}{2(1-m)}}$ に反比例する。根の吸水態勢はここでは L と v により表される。

ただし、 $Q = Q_{\max}$ とすることはできず、現実には $m = 0.3947$ のソイルフレンドでは上述のように

$Q = 0.5Q_{\max}$ を得るには $h(a) = 1.3h(b)$

$Q = 0.6Q_{\max}$ を得るには $h(a) = 1.4h(b)$

$Q = 0.8Q_{\max}$ を得るには $h(a) = 1.8h(b)$

$Q = 0.95Q_{\max}$ を得るには $h(a) = 3.1h(b)$

と、QをQmaxに近付けるためにはh(a)を極めて大きくしなければならない。

逆に考えれば根の必要とするQを得たければ、例えばQmax=2Qとなるようなh(b)を算出し、(式(41))、土壌水分をそのように調節してやるのがよいといえる。そうすれば、h(a)=1.3h(b)程度の比較的穏やかな水分張力増加により吸水量を供給できる。

数値計算における経験から $r=c=\frac{a+b}{2}$ における土壌の含水率は土壌の平均含水率に極めて近いことから $r=c$ における圧力水頭h(c)との関係を求めてみる。

式(6-5)において $r=b$ の代わりに、 $r=c=\frac{a+b}{2}$ とおくと、

$$Q_{\max} = \frac{b^2 - a^2}{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - a^2} \phi(r)$$

ここで、 $Q_{\max}=f_2(v) \phi(r)$ とし、 $v = \frac{a^2}{b^2}$ を用いると、 $f_2(v)$ は以下の様に書ける。

$$1 - v \cdot \ln \left(\frac{1 + \sqrt{v}}{2\sqrt{v}} \right) - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sqrt{v} + 1}{2} \right)^2 - v \right\}$$

となるので、

$$Q_{\max} = 2 \pi L f_2(v) g(K_s, m, \alpha) \left| h[c] \right| \frac{3m+2}{2(1-m)}$$

この関数は図5に示される。また、 $f(v)$ と、 $f_2(v)$ の比は、

$$v=0 \text{ では } \frac{f_2(v)}{f(v)} = 1$$

$$v=1 \text{ では } \frac{f_2(v)}{f(v)} = \frac{4}{3}$$

$$0 < v < 1 \text{ では } 1 < \frac{f_2(v)}{f(v)} < \frac{4}{3}$$

である。

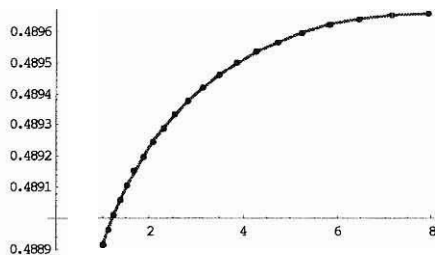


図3 $P_0=300\text{cmH}_2\text{O}$ 、 $Q=0.384\text{a/min}$ における600分経過後での数値解（Crank-Nicolson法）及び準定常解の水分分布の計算結果（横軸： r (cm)、縦軸： $\theta(a/a)$ ）
 点：数値解（Crank-Nicolson法）
 線：準定常解

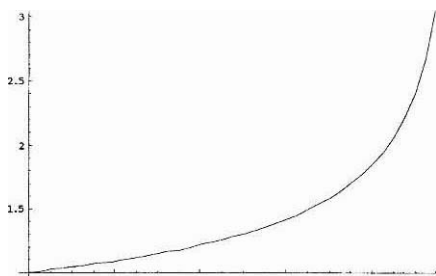


図4 Q/Q_{max} と $h(a)/h(b)$ の関係（横軸： Q/Q_{max} 、縦軸： $h(a)/h(b)$ ）（ $m=0.3947$ の場合）

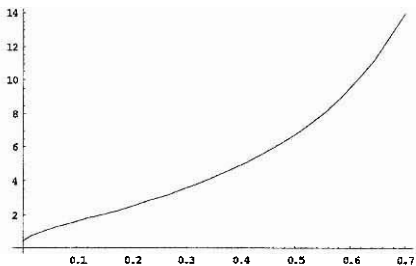


図5 関数 $f_2[v]=a$ のグラフ（横軸： a 、縦軸： $f_2(v)$ ）

5. 結果と考察

準定常仮定を基にして得られた解と数値計算解を比較したものが図3である。このように解析解と数値計算解はよく一致しており、この解析解が有用なことが示された。

得られた最終式(42)は、円筒吸源からの吸水速度には最大値があり、それは円筒吸源の形態(長さおよび、土壌に対する体積比)に関する因子、土壌の性質を表す因子、および現在の平均的土壌水分状態(平均土壌水分張力)に起因する因子の積に分離された。これは土壌から根系が吸水する速度を明快に表すものである。

また、円筒吸源からの吸水速度は、円筒表面における水分張力が平均水分張力にくらべて小さくなると最初は直線的に吸水速度が増すが、最大吸水速度に近づくにつれ必要とする水分張力が急激に大きくなり、最大値は無限大の吸引力によってのみ得られる。

6. まとめ

準定常仮定を基にして得られた解は数値計算結果とほぼ一致し、有用であった。

円筒吸源からの吸水速度を表す式が得られ、植物根の形態に関する因子、土壌の性質を表す因子、および現在の平均的土壌水分状態(土壌水分張力)に起因する因子、および吸源におけるマトリックフラックスポテンシャルと平均マトリックフラックスポテンシャルの差の積として表されることが分かった。

引用・参考文献

- 1) 石田朋靖(1985) 土壌—植物系における水分移動に関する研究 山形大学紀要(農学) 第9巻 第4号 135p.
- 2) 土の試験実習書(第二改訂版) 編集委員会編(1991) 土の試験実習書(第二改訂版) 社団法人地盤工学会 東京 261p.
- 3) 中野政詩(1991) 土の物質移動学 東京大学出版会 東京 189p.
- 4) 中野政詩ら(1995) 土壌物理環境測定法 東京大学出版会 東京 236p.
- 5) 原道宏・ルバ ラニ サハ(1994) 農気生環境講要 pp.156-157.
- 6) 森田茂紀ら編(1998) 根の研究の最前線 1 根研究会 183p.
- 7) G.D.スミス(1970) 偏微分方程式の解法 サイエンス社 東京 188p.
- 8) J.M.マコーミック・M.G.サルバトリ(1964) FORTRAN による数値計算プログラム サイエンス社 東京 284p.
- 9) M.Kutilek and Nielsen,D.R. (1994) Soil Hydrology. CATENA VERLAG, CREMLINGEN-Destedt. 370p.
- 10) M.van Genuchten (1980) A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Science Society of America Journal. 44:892-897.
- 11) S.Muazu,Skopp, J. and Swartzendruber,D. (1990) Soil water diffusivity determination by modified one-step outflow method. Soil Science Society of America Journal. 54:1184-1186.
- 12) W.R.Gardner (1960) Dynamic aspects of water availability to plants. Soil Science. 89:63-73.