計測自動制御学会東北支部 第197回研究集会(2001.10.13)
資料番号 197-14

LMIを使ったアクティブ・サスペンションのロバスト制御

Robust Control of an Active-Suspension Using LMI

○高橋 拓生*, 渡部 慶二*, 羅 志偉**, 遠藤 茂*

○Takuma Takahashi*, Keiji Watanabe*, Zhi-wei Luo**, Shigeru Endo*

山形大学 大学院 理工学研究科*,理化学研究所**
Ymagata University*,Riken**

キーワード：LMI H^∞制御 ゲインスケジューリング LPVシステム アフィンモデル
連絡先：〒992 米沢市城南4－3－16 山形大学 工学部 応用生命システム工学科 渡部研究室
高橋 拓生, TEL：(0238)26-3178, E-mail：takuma@ewata.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

サスペンションに要求される機能は、環境面や運転者の急激なステアリング、ブレーキ操作により生じる外乱が車両に加わった際に、乗り心地、一定の車体姿勢を保ったままでの操縦のしやすさの向上、タイヤの接地性の維持がある。アクティブサスペンションに求められる制御目的は従来のパッシブサスペンションに比べてサスペンションに要求されている機能が改善されていることである。

現在までアクティブサスペンションの研究にH^∞制御理論が主流である。H^∞制御理論は、設計自由度が高く応用範囲が非常に広い。また、多くの制御系設計仕様を周波数帯域において特性を解析的に改善できる。このような利点から、体感周波数帯での加速度を抑えるためにH^∞制御理論が用いられてきた。

しかし、乗員の変動に対する考慮が不十分である。これに対して、ゲインスケジューリングが有効と考えられている。制御対象をLPVのアフィンモデルで表し、LMIで解く方法がある。本研究ではゲインスケジュールドH^∞制御問題をLMIに帰着させ、数値計算により解く方法を提案し、乗車人数の変動にかかわらないアクティブサスペンションの乗り心地の改善を行なう。

2. 制御対象

図1にサスペンションの模擬実験用のモデルを図示する。それぞれの変数を以下のように設定する。

M ：車体、乗客の質量
K ：バネ定数
D ：減衰定数
x_0, x_1 ：路面、車体の変位
$\dot{x}_1$ ：車体速度

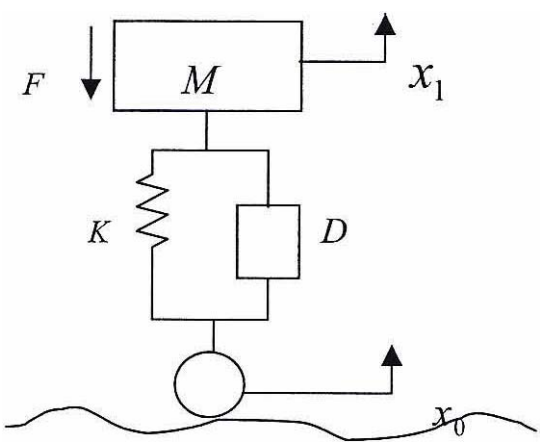

図1. 制御対象

$\ddot{x}_1$ ：車体加速度
F ：車体加速度を制振する力
x_p ：状態変数
$\overline{u}$ ：操作量
$\overline{y}$ ：観測量
$\overline{w}$ ：システム外乱
$\overline{z}$ ：制御量

ちなみに、F は振動を抑えるために働く力のことである。
図１の制御対象の運動方程式を次式に示す。

$$M\ddot{x}_1 = K(x_0 - x_1) - D\dot{x}_1 - F \quad (1)$$

この運動方程式より、状態空間モデルが得られるが、ゲインスケジューリングにおいて入力に掛かる行列に非線形要素がこないようにする必要があるため以下のフィルタをかけた。

$$W_{afp} = \frac{Ms + (M+1)\times 10^5}{s + 10^5} \quad (2)$$

その結果、状態空間モデルは以下のようになった。

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_{1p}\overline{w} + B_{2p}\overline{u} \\ x_p &= [x_1 \ \dot{x}_1 \ x_f]^T \in R^3 \\ \overline{w} &= x_0 \in R^1 \\ \overline{u} &= F \in R^1 \end{aligned} \quad (3)$$

また、A_p, B_{1p}, B_{2p} は次のようになった。

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2/M & -26.46/M & -10^5/M \\ 0 & 0 & -10^5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 26.46/ \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \ddot{x}_1 \in R^1 \\ &= C_{1p}x_p + D_{11p}\overline{w} + D_{12p}\overline{u} \\ \overline{y} &= \dot{x}_1 \in R^1 \\ &= C_{2p}x_p \end{aligned} \quad (5)$$

$$C_{1p} = \begin{bmatrix} -2/M & -26.46/M & -10^5/M \end{bmatrix}$$

$$D_{11p} = 26.46/M, \quad D_{12p} = 3000/M$$

$$C_{2p} = [0 \ \ 1 \ \ 0], \ D_{21p} = D_{22p} = 0$$

乗り心地の向上は、結局システム外乱である路面変位から制御量の車体加速度までの閉ループ伝達関数ゲインをできるだけ小さくする外乱抑制問題となる。車体加速度を抑えるために、乗り心地に対する周波数重みの伝達関数 W_{per} を以下のように設定する。

$$W_{per} = \frac{}{s^2 + 0.3s + 9} \quad (6)$$

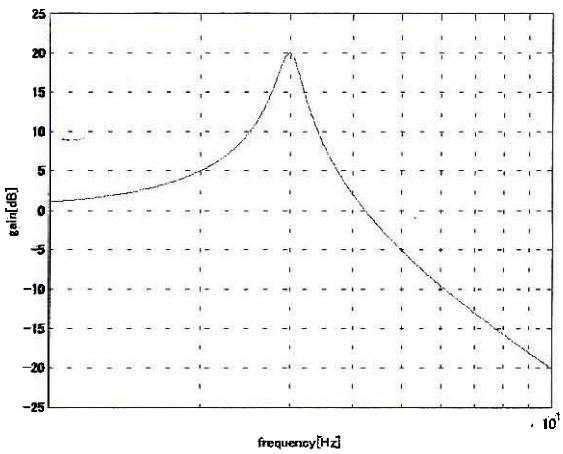

図２　乗り心地に対する周波数重みの伝達関数

3. 制御系設計１

本研究の制御目的は

- 乗り心地の向上
- ロバスト安定性

である。本研究では、乗り心地の向上とは体感周波数帯域において車体加速度を抑えることとする。また、ロバスト安定性においては、車固有の特性のばらつきなどにより、制御対象の特性が多少変動しても性能が著しく劣化しない頑健な性質を確保することである。

3．1　乗り心地に関する設計仕様

制御目的に関する制御量として車体加速度を、観測量として車体速度を選んだ。

3．2　ロバスト安定性関する設計仕様

もう一つの制御目的、ロバスト安定性を考えて制御入力に不確かさを加えた。ここで、不確かさを包括するようなゲイン特性をもつロバスト安定性に対する周波数重みの伝達関数 W_{rob} を以下のように設定した。

$$W_{rob} = \frac{1.25\times 10^2 s^2 + 3.25\times 10^3 s + 5.0\times 10^4}{s^2 + 6.0\times 10^2 s + 5.0\times 10^2} \quad (7)$$

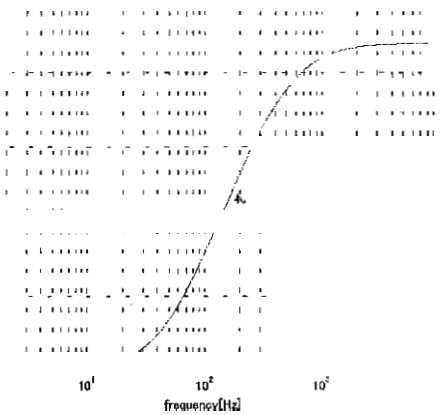

図３　ロバスト安定性に対する周波数重みの伝達関数

３．３　一般化プラント

これまでの設定により、図４のようなブロック線図を構成でき、中でも点線の部分が一般化プラントとなる。図４中で、G_pは制御対象で、以下のように表すことができる。

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A_p & B_{1p} & B_{2p} \\ \hline C_{1p} & D_{11p} & D_{12p} \\ \hline C_{2p} & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad (8)$$

また、$\tilde{z}$は周波数重みにより重み付けられた制御量であり、q, pは不確かさへの入出力を表す。外乱w、操作量u、制御量z、観測量yは以下のようになる。

$$\begin{aligned} w &= [\bar{w}\ n\ p]^T = [x_0\ n\ p]^T \\ u &= u - p = F - p \\ z &= [\tilde{z}\ q]^T = [W_{per}\tilde{z}\ W_{rob}u]^T = [W_{per}\ddot{x}_1\ W_{rob}u]^T \\ y &= \bar{y} + n = \dot{x}_1 + n \end{aligned} \qquad (9)$$

また、nはH^∞制御問題を解く際に必要な条件を満たすために外乱wの中に付け加えられた、観測量yに対する観測ノイズである。図３には周波数重み、ロバスト重みを加えて拡張した一般化プラントを示してある。これより、状態量x、制御量z、観測量yは、以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x \quad + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \qquad (10)$$

よって、一般化プラント$G(s)$は以下のようになる。

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c|c} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & 0 \\ \hline C_2 & 0 & D_{22} \end{array}\right] \qquad (11)$$

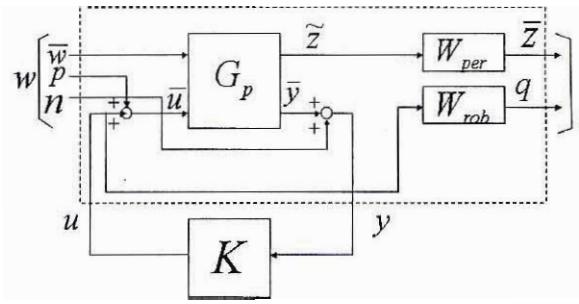

図４　一般化プラント

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26.46/M & -2/M & -10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10^5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -26.46/M & -1/M & -10^5/M & -0.3 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -600 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 26.46/M & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 26.46/M & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5875 & -575000 \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = [0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0], \quad D_{21} = [0\ 0\ 1] \qquad (12)$$

ただし、一般化プラント全体の状態量をx、パフォーマンス重み、ロバスト重みを通ってきた信号の状態量をそれぞれ$[x_{wp1}\ x_{wp2}]^T$,$[x_{wr1}\ x_{wr2}]^T$とすると以下のようになる。

$$x = [x_1\ \dot{x}_1\ x_f\ x_{wp1}\ x_{wp2}\ x_{wr1}\ x_{wr2}]^T \in R^7 \qquad (13)$$

３．４　LMIに基づいたH^∞制御問題の解法

本研究の目的を成し遂げるには、路面変位から車体加速度までの閉ループのゲインを抑える外乱抑制問題を解かなくてはならない。この、H^∞制御問題を解くことは、次の３つのLMIを満たすX, Yが存

在することにつながる。

$$\begin{bmatrix} AX+XA'+B_1B_1'-B_2 & XC_1' \\ C_1X & -\gamma I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} YA+A'Y+C_1'C_1-C_2C_2' & YB_1 \\ B_1'Y & -\gamma I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0$$

（１４）

このとき、閉ループ系が内部安定であり、H^∞ノルムがγ未満のコントローラが次のように表される。

$$K=\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A+B_2C_c-B_cC_2+Y^{-1}C_1'C_1-Y^{-1}Q(I-XY)^{-1} \\ B_2'Y(I-XY)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$Q=YA+A'Y+YB_1B_1'Y+C_1'C_1-C_2'C_2<0$$

（１５）

３．５　シミュレーション

車体の質量を３kgに固定した場合のシミュレーション結果を図５,６に示す。図５,６より、パッシブサスペンションよりも、アクティブ・サスペンションの方が体感周波数帯域におけるゲインが低くなり、加速度も抑えられた。

また、H^∞ノルムは質量３kgに固定した場合がγ＝30.0、質量が変動する場合がγ＝169.3であった。

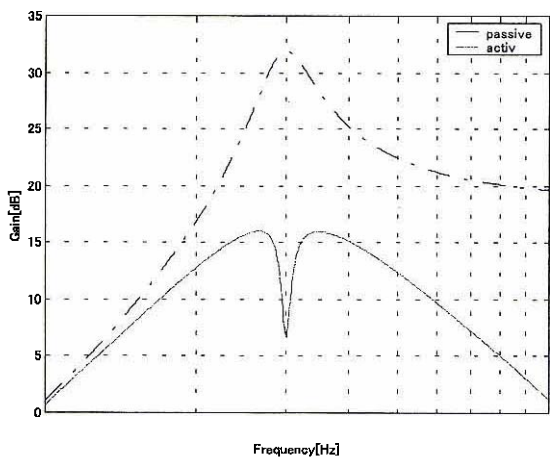

図５、周波数特性

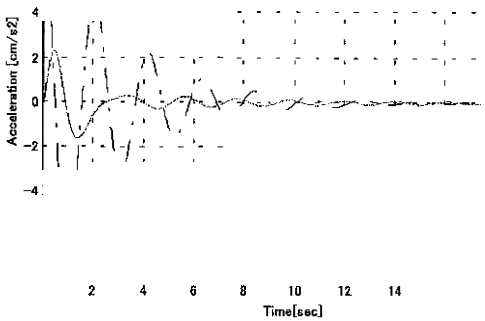

図６、時間応答

４．制御系設計２

乗車人数が変化すると質量Mも変化する。しかしこのMは分母にきてしまうため制御対象が非線形になってしまう。故に、システムが非線形となってしまうため、ゲインスケジューリングを用いて制御する必要がある。

ゲインスケジューリングを用いるためには、非線形系である制御対象をスケジューリングパラメータを持つ線形系で記述しなければならない。この記述した線形系に対する制御系設計を考えることでスケジューリングコントローラを求めることを考える。このスケジューリングパラメータを持つ線形系をLPVシステム(Linear Parameter-varying System)と言う。

４．１　LMIによるLPVシステムの記述

LMIによる制御系設計においては、パラメータの変動を明確に表現したものであれば、LPVシステムとして扱うことができる。故に、LPVシステムとしてアフィンパラメータ依存モデルを用いることができる。

前章までの一般化プラントは車体のみという状況を想定して作成したモデルであったのでMは3kgに設定されていた。今回作成するモデルは、600kgの車体に50kgの人が１人から４人まで乗車した状況を考慮するため、１人乗車につきこのモデルでは0.25kg増加するということになる。

またシステム行列$S(p)$を以下のようにおく。

一般化プラントをアフィンパラメータ依存モデルにすると以下のようになる。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(p)x + B_1(p)w + B_2 u\\ \bar{z} &= C_1\ x + \quad + D_{12}u\\ y &= C_2\ x + D_{21}w\end{aligned} \qquad (16)$$

$$A(p) = A_0 + p(t)A_1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -10^5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -10^5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -0.3 & -9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -600 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ p(t) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -26.46 & -2 & -10^5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -26.46 & -2 & -10^5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (17)$$

$$B_1(p) = B_0 + p(t)B_1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad p(t) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0\\ 26.46 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 26.46 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad (18)$$

$p(t)$ はパラメータベクトルで $1/M$ であり、以下のように設定する。

$$3.0 + 0.25 \times 4^{-} \le p(t) \le \frac{1}{3.0} \qquad (19)$$

4．3　ゲインスケジュールド H^{∞} 制御問題の LMI 定式化

定式化を行う前にアフィンモデルをポリトピックモデルに変換する。

$$S(p) = \begin{matrix} A(p) & B_1(p) & B_2\\ C_1 & 0 & D_{12}\\ C_2 & D_{21} & 0 \end{matrix} \qquad (20)$$

ポリトピックモデルは以下に示すようなパラメータベクトルに任意の凸分解を与える。

$$p(t) = \alpha_1 \Pi_1 + \alpha_2 \Pi_2,\ \alpha_1 \ge 0, \alpha_2 \ge 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \qquad (21)$$

また $\Pi_{i=1,2}$ は端点であり、これを用いることでアフィンモデルをポリトピックモデルに変換できる。この凸分解によりアフィンモデルが次のようにポリトピックモデルに変換される。

$$S(p) = \alpha_1 S(\Pi_1) + \alpha_2 S(\Pi_2) \qquad (22)$$

ゲインスケジュールド H^{∞} 制御問題は式（23）を満たす X, Y を求める LMI 問題になる。

$$\begin{bmatrix} V & 0\\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{matrix} A_i X + X A_i^T & X C_{1i}^T & \\ C_{1i} X & -\gamma I & \\ B_{1i}^T & D_{11i}^T & - \end{matrix} \begin{bmatrix} V & 0\\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} W & 0\\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T Y + & C_{1i}^T\\ B_{1i}^T Y & D_{11i}\\ C_{1i}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W & 0\\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} X & I\\ I & Y \end{bmatrix} \ge 0 \quad \begin{bmatrix} A_i & B_{1i}\\ C_{1i} & D_{11i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\Pi_i) & B_1(\Pi_i)\\ C_1(\Pi_i) & D_{11}(\Pi_i) \end{bmatrix}$$

$$i = 1,2 \qquad (23)$$

ここで、V と W は $[B_2^T\ D_{12}^T], [C_2\ D_{21}]$ の零空間の基底である。これらより、ゲインスケジュールドコントローラの状態空間表現は以下のように得られる

$$\begin{aligned}\dot{x}_K &= A_K(p)x_K + B_K(p)y\\ u &= C_K(p)x_K + D_K(p)y\end{aligned} \qquad (24)$$

$A_K(p), B_K(p), C_K(p), D_K(p)$ は以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} A_K(p) & B_K(p)\\ C_K(p) & D_K(p) \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1 \begin{bmatrix} A_K(\Pi_1) & B_K(\Pi_1)\\ C_K(\Pi_1) & D_K(\Pi_1) \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} A_K(\Pi_2) & B_K(\Pi_2)\\ C_K(\Pi_2) & D_K(\Pi_2) \end{bmatrix}$$

すなわち、現在のパラメータ値 $p(t)$ の凸分解を与えると $A_K(p), B_K(p), C_K(p), D_K(p)$ はパラメータの端点の値から導出される。故に、動作点 $p(t)$ でのコントローラの状態空間行列は線形端点コントローラの凸補間で得られる。

6．今後の予定

ゲインスケジュール時のシミュレーションを完成

させるため、プログラムを早急に改善し結果を出す.

H^∞ ノルムが高かったのでさらにゲインを小さく下げるようなコントローラを作成する。

参考文献

川谷亮治、山下勝司、藤森一雄、木村英紀
H^∞ 制御理論に基づくアクティブサスペンションの制御　計測自動制御学会論文集　Vol.27、No.5、554/561,(1991)

システム制御情報学会編　細江繁幸、荒木光彦
制御器設計—H^∞ 制御とその応用　朝倉書店(1994)

岩崎徹夜　LMI と制御　昭晃堂　(1997)