計測自動制御学会東北支部 第197回研究集会 (2001.10.13)
資料番号 197-15

ニューラルネットワークを用いた非線形系の安定化制御

Stabilizing Control of Nonlinear System Using Neural Network

○宮崎直樹*，大久保重紀*，及川一美*，高橋達也*

○Naoki Miyazaki*, Sigenori Okubo*, Kazumi Oikawa*, Tatuya Takahashi*

山形大学*

Yamagata University*

キーワード： バックプロパゲーション (Back propagation)，ニューラルネットワーク (Neural network)，非線形系 (Nonlinear system)，

連絡先： 〒992-8510 山形県米沢市城南4-3-16 山形大学大学院 理工学研究科 機械システム工学専攻 大久保研究室

宮崎直樹，Tel.: (0238)26-3246，Fax.: (0238)26-3246，

1. 緒論

非線形を含む複雑な制御対象に対し、バックプロパゲーションによるニューラルネットワークをオンラインで適応的に学習させることにより、状態をゼロに収束させる制御系の設計を考察する。評価関数を状態変数の２次形式で与えこれを最小にするように教師信号なしで学習を行う。さらにアルゴリズムを連続時間に変換し、その有効性を検証する。また外乱の影響を抑えるための制御系についても考察する。

2. ＮＮの構成

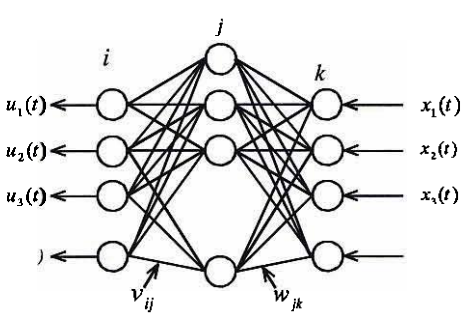

*Fig.*1 Neural network with the structure of three layers

非線形系に対して*Fig.*1のような３層ニューラルネットワークを使い、系を安定にする制御系を設計する。ここで、重みと各層の入出力関係はつぎのように与えられる。

$$U(t) = W(t)x(t) + \theta(t) \tag{1}$$

$$H(t) = diag[f(U(t))] \tag{2}$$

$$S(t) = V(t)H(t) + \gamma(t) \tag{3}$$

$$u(t) = diag[f(S(t))] \tag{4}$$

$f(x)$はニューロンの入出力特性であり、(5)式で与えられるものとする。また、$f'(x)$は(6)式のようになる。

$$f(x) = L\tanh(\frac{x}{u_o})$$

$$f'(x) = \frac{1}{Lu_o}(L^2 - f(x)^2)$$

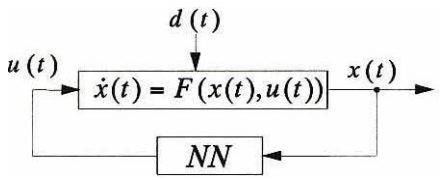

*Fig.*2 Block diagram of control system by neural network

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) + d(t) \tag{7}$$

$h > 0$を微小にとれば、(7)式は次のようになる。

$$x(t+h) = x(t) + \int_t^{t+h} \{F(x(\tau), u(\tau)) + d(\tau)\} d\tau \tag{8}$$

平均値の定理より、$(0 < \theta_a < 1)$

$$x(t+h) = x(t) + hF(x(t+\theta_a h), u(t+\theta_a h)) + hd(t+\theta_a h) \tag{9}$$

評価関数を(10)式のようにおき、$E(t)$を最小にする制御則を求める。ただし、$Q = Q^T > 0$とする。

$$E(t+h) = \frac{1}{2} x^T(t+h) Q x(t+h) \tag{10}$$

各重み、オフセットの更新量は、最急降下法を用いて次のように表わせる。(α、βは学習係数)

$$\Delta\theta(t) = -\beta\left(\frac{\partial E(t)}{\partial \theta(t)}\right) \tag{11}$$

$$\Delta\gamma(t) = -\beta\left(\frac{\partial E(t)}{\partial \gamma(t)}\right) \tag{12}$$

$$\Delta V(t) = -\alpha\left(\frac{\partial E(t)}{\partial V(t)}\right) \tag{13}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \partial(E(t+h) - E(t)) \\ \partial x(t+h) \end{matrix} \right. \begin{matrix} \partial x^T(t+h) \\ \partial u(t+\theta_a h) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \partial u^T(t+\theta_a h) \\ \partial u(t) \end{matrix} \begin{matrix} \partial u^T(t) \\ \partial S(t) \end{matrix} \left. \begin{matrix} \partial S^T(t) \\ \partial V(t) \end{matrix} \right\} \tag{14}$$

$$\Delta W(t) = -\alpha\left(\frac{\partial E(t)}{\partial W(t)}\right) \tag{15}$$

$$= W(t+h) - W(t)$$

$$\left\{ \begin{matrix} \partial(E(t+h) - E(t)) \\ \partial x(t+h) \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} \partial x^T(t+h) \\ \partial u(t+\theta_a h) \end{matrix} \begin{matrix} \partial u^T(t+\theta_a h) \\ \partial u(t) \end{matrix} \begin{matrix} \partial u^T(t) \\ \partial S(t) \end{matrix}$$

$$\left. \times \frac{\partial S^T(t)}{\partial H(t)} \frac{\partial H^T(t)}{\partial U(t)} \frac{\partial U^T(t)}{\partial W(t)} \right\} \tag{16}$$

(14)式、(16)式内の各要素は以下の通りである。

$$\frac{\partial E(t+h)}{\partial x(t+h)} = x(t+h)Q \tag{17}$$

$$\frac{\partial E(t)}{\partial x(t+h)} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial x^T(t+h)}{\partial u(t+\theta_a h)} \cdot \frac{\partial F^T(x(t+\theta_a h), u(t+\theta_a h))}{\partial u(t+\theta_a h)} \tag{19}$$

$$\frac{\partial u^T(t)}{\partial S(t)} = \frac{1}{Lu_0} diag[L^2 - u^2(t)] \tag{20}$$

$$\frac{\partial S^T(t)}{\partial H(t)} = V^T(t) \tag{21}$$

$$\frac{\partial S^T(t)}{\partial V(t)} = H^T(t) \tag{22}$$

$$\frac{\partial S(t)}{\partial \gamma(t)} = I \tag{23}$$

$$\frac{\partial U(t)}{\partial \theta(t)} = I \tag{24}$$

$$\frac{\partial H^T(t)}{\partial U(t)} = \frac{1}{Lu_0} diag[L^2 - H^2(t)] \tag{25}$$

$$\frac{\partial U^T(t)}{\partial W(t)} = x^T(t) \tag{26}$$

ここで、(16)式をhで割って両辺の極限をとると、更新値$\dot{W}(t)$が得られる。

$$\begin{aligned} W(t) = \lim_{h \to 0} & W(t+h) - W(t) \\ & -\frac{\alpha}{u_0^2 L^2} diag[L^2 - H^2(t)] V^T(t) \\ & \times diag[L^2 - u^2(t)] \frac{\partial F^T(x(t), u(t))}{\partial u(t)} \\ & \times Qx(t) x^T(t) \end{aligned} \tag{27}$$

同様にして、$\dot{V}(t)$、$\dot{\theta}(t)$、$\dot{\gamma}(t)$を求める。

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & -\frac{\alpha}{u_0 L} diag[L^2 - u^2(t)] \\ & \cdot \frac{\partial F^T(x(t), u(t))}{\partial u(t)} \cdot Qx(t) H^T(t) \end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) = & -\frac{\beta}{u_0^2 L^2} diag[L^2 - H^2(t)] V^T(t) \\ & \times diag[L^2 - u^2(t)] \frac{\partial F^T(x(t), u(t))}{\partial u(t)} \\ & \times Qx(t) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) = & -\frac{\beta}{u_0 L} diag[L^2 - u^2(t)] \\ & \cdot \frac{\partial F^T(x(t), u(t))}{\partial u(t)} \cdot Qx(t) \end{aligned} \tag{30}$$

以上の状態方程式を連立させればＮＮによる安定化制御系の全方程式がつぎのように得られる。

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) + d(t) \tag{31}$$

$$f(x) = L tanh(\frac{x}{u_0}) \tag{32}$$

$$U(t) = W(t)x(t) + \theta(t) \tag{33}$$

$$H(t) = diag[f] U(t) \tag{34}$$

$$S(t) = V(t)H(t) + \gamma(t) \tag{35}$$

$$u(t) = diag[f] S(t) \tag{36}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{Lu_0} diag[L^2 - u^2(t)]$$

$$\frac{\partial F^T(x(t), u(t))}{\partial u(t)} = Qx(t) \quad (37)$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{Lu_0} diag[L^2 - H^2(t)] V^T(t)\delta(t) \quad (38)$$

$$\dot{W}(t) = -\alpha\sigma(t)x^T(t) \quad (39)$$

$$\theta(t) = -\beta\sigma(t) \quad (40)$$

$$\dot{V}(t) = -\alpha\delta(t)H^T(t) \quad (41)$$

$$\dot{\gamma}(t) = -\beta\delta(t) \quad (42)$$

3. 単倒立振子

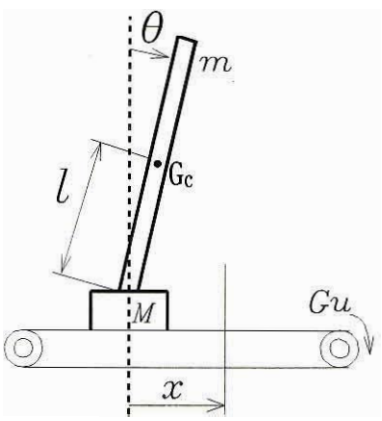

Fig.3 Single inverted pendulum

各パラメータを以下のように示す。

Table.1 Parameters of Inverted Pendulum

$M[kg]$	台車の質量
$m[kg]$	振子の質量
$G[N/V]$	力／電圧変換係数
$F[kg/s]$	台車の等価摩擦係数
$C[kg\,m/s]$	軸の粘性摩擦係数
$l[m]$	振子の重心までの距離
$g[m/s^2]$	重力加速度
$J[kgm^2]$	振子の慣性モーメント

倒立振子の運動方程式は(43)式のようになるので、

$$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}cos\theta + F\dot{x} - ml\dot{\theta}^2 sin\theta = Gu$$
$$ml\ddot{x}cos\theta + (J+ml^2)\ddot{\theta} + C\dot{\theta} - mglsin\theta = 0 \quad (43)$$

$$\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{matrix} \quad (44)$$

(44)式のように$x_1 = x$、$x_2 = \theta$、$x_3 = \dot{x}$、$x_4 = \dot{\theta}$とおくと、倒立振子の方程式は(45)式となる。

$$(M+m)\dot{x}_3 + ml\dot{x}_4 cosx_2 + Fx_3 - mlx_4^2 sinx_2 = Gu$$
$$ml\dot{x}_3 cosx_2 + (J+ml^2)\dot{x}_4 + Cx_4 - mglsinx_2 = 0 \quad (45)$$

そして、(45)式を$\dot{x}_3$、$\dot{x}_4$について解いていく。

$$\begin{bmatrix} (M+m) & mlcosx_2 \\ mlcosx_2 & (J+ml^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{matrix} Gu - Fx_3 + mlx_4{}^2 sinx_2 \\ -Cx_4 + mglsinx_2 \end{matrix}$$

$d = (M+m)(J+ml^2) - (mlcosx_2)^2$とすると、

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (J+ml^2)/d & -mlcosx_2/d \\ -mlcosx_2/d & (M+m)/d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Gu - Fx_3 + mlx_4{}^2 sinx_2 \\ -Cx_4 + mglsinx_2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\dot{x}_3 = (J+ml^2)(Gu - Fx_3 + mlx_4{}^2 sinx_2)/d$$
$$+(-mlcosx_2)(-Cx_4 + mglsinx_2)/d \quad (48)$$

$$\dot{x}_4 = (-mlcosx_2)(Gu - Fx_3 + mlx_4{}^2 sinx_2)/d$$
$$+(M+m)(-Cx_4 + mglsinx_2)/d \quad (49)$$

よって、(50)式が成り立つので、ＮＮの入力更新値は(51)式から(54)式となる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(t) \\ x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} \begin{matrix} F_1(x_1(t), u_1(t)) + d_1(t) \\ F_2(x_2(t), u_2(t)) + d_2(t) \\ F_3(x_3(t), u_3(t)) + d_3(t) \\ F_4(x_4(t), u_4(t)) + d_4(t) \end{matrix}$$

$$\dot{x}_1(t) = x_3(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_3(t) =$$

$$(J+ml^2)(Gu - Fx_3(t) + mlx_4(t)^2 sinx_2(t))/d$$

$$+(-mlCcosx_2(t))(-Cx_4(t) + mglsinx_2(t))/d \quad (53)$$

$$\dot{x}_4(t) =$$

$$(-mlcosx_2(t))(Gu - Fx_3(t) + mlx_4(t)^2 sinx_2(t))/d$$

$$+ (M+m)(-Cx_4(t) + mglsinx_2(t))/d \quad (54)$$

は(55)式となる

$$\frac{\partial F(x(t), u(t))}{\partial u(t)} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ G(J+ml^2)/d \\ G(-mlcosx_2)/d \end{matrix} \quad (55)$$

4. シミュレーション

以下のような条件でシミュレーションをおこなった。

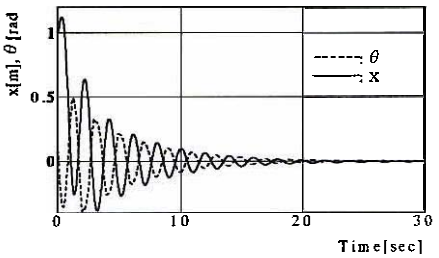

Fig.4 Response of x and θ

初期位置　x　=　1.0　$[m]$
初期角度　θ　=　5.0　$[deg]$
外乱なし

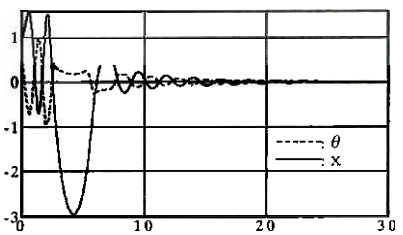

Fig.5 Response of x and θ

初期位置　x　=　1.0　$[m]$
初期角度　θ　=　25.0　$[deg]$
外乱なし

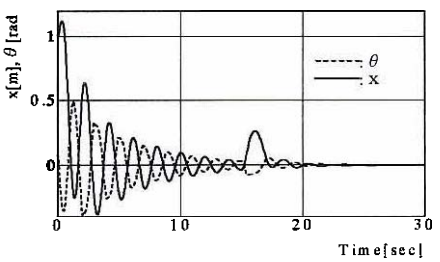

Fig.6 Response of x and θ

初期位置　x　=　1.0　$[m]$
初期角度　θ　=　5.0　$[deg]$
外乱あり　$d_3(t)$　=　1.0　$(15.0 \leq t \leq 15.5)$

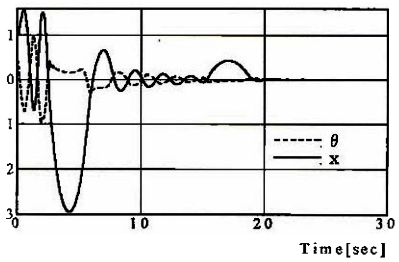

Fig.7 Response of x and θ

初期位置　x　=　1.0　$[m]$
初期角度　θ　=　25.0　$[deg]$
外乱あり　$d_3(t)$　=　1.0　$(15.0 \leq t \leq 15.5)$

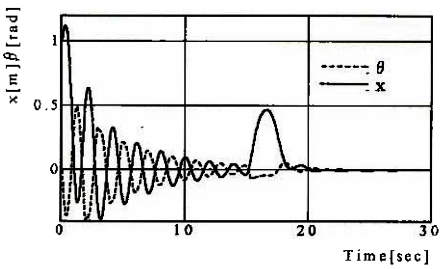

Fig.8 Response of x and θ

初期位置　x　=　1.0　$[m]$
初期角度　θ　=　5.0　$[deg]$
外乱あり　$d_4(t)$　=　5.0　$(15.0 \leq t \leq 15.5)$

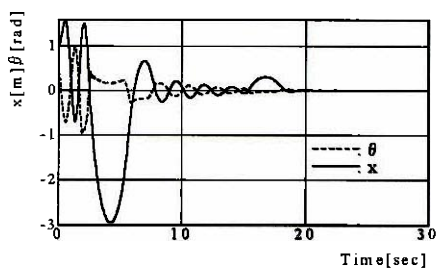

Fig.9 Response of x and θ

初期位置　x　=　1.0　$[m]$
初期角度　θ　=　25.0　$[deg]$
外乱あり　$d_4(t)$　=　3.0　$(15.0 \leq t \leq 15.5)$

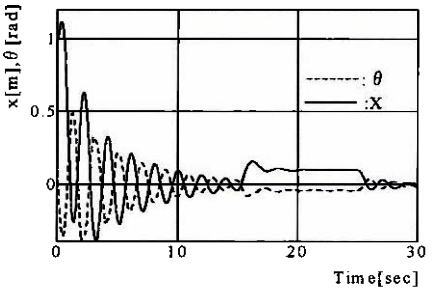

Fig.10 Response of x and θ

初期位置　x　=　1.0　$[m]$
初期角度　θ　=　5.0　$[deg]$
外乱あり　$d_3(t)$　=　0.3　$(15.0 \leq t \leq 25.0)$

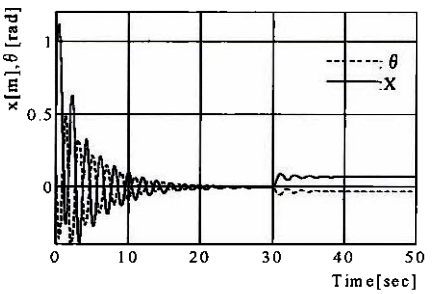

Fig.11 Response of x and θ

初期位置　x　=　1.0　$[m]$
初期角度　θ　=　5.0　$[deg]$
外乱あり　$d_3(t)$　=　0.3　$(30.0 \leq t \leq 50.0)$

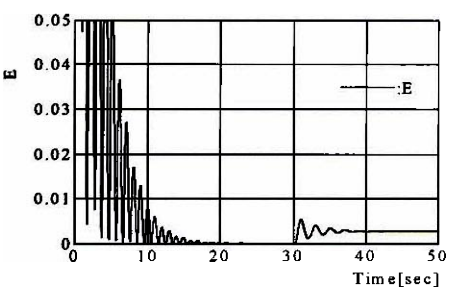

Fig.12 Response of E

初期位置　x　=　1.0　$[m]$
初期角度　θ　=　5.0　$[deg]$
外乱あり　$d_3(t)$　=　0.3　$(30.0 \leq t \leq 50.0)$

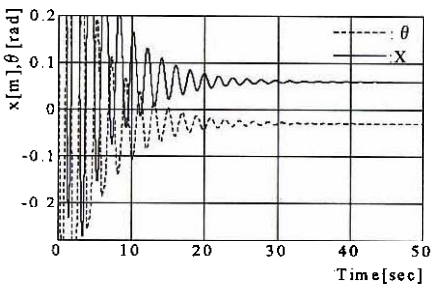

Fig.13 Response of x and θ

初期位置	x	$=$	1.0	$[m]$
初期角度	θ	$=$	5.0	$[deg]$
外乱あり	$d_3(t)$	$=$	0.3	$(0.0 \leq t \leq 50.0)$

外乱がない場合の制御はできたが、外乱が入った場合、発散はしないものの*Fig.*10のような定常誤差がおこり、外乱を除去することができなかった。これは20秒間外乱をあたえた時の評価関数の時間変化のグラフである*Fig.*12から、外乱が入っている時の評価関数が一定になりローカルミニマムに陥ってしまい学習が進まないため重みが更新されず、制御入力は一定になり定常誤差になったと思われる。またはじめから外乱を50秒間入れたときの応答のグラフである*Fig.*13から0以外の値に収束しようとしているため平衡点が移動していると思われる。これは2次形式の評価関数を最小にするアルゴリズムは評価関数が0に収束しない場合でも微分値が0になれば最小とみなし学習を止めるためであると思われる。

5. 定常誤差の改善

ここで

$$u(t) = diag[f(S(t))] + K_I \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=1}^{n} q_i x_i(k) \tag{56}$$

としてシミュレーションを行う。

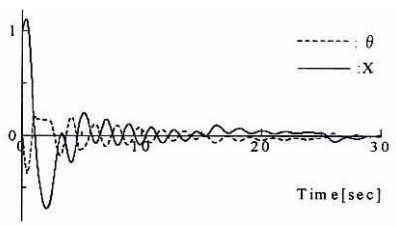

Fig.14 Response of x and θ

初期位置	x	$=$	1.0	$[m]$
初期角度	θ	$=$	5.0	$[deg]$
外乱あり	$d_3(t)$	$=$	0.3	$(15.0 \leq t \leq 25.0)$
	K_I	$=$	0.00023	
	q_1	$=$	1.0	

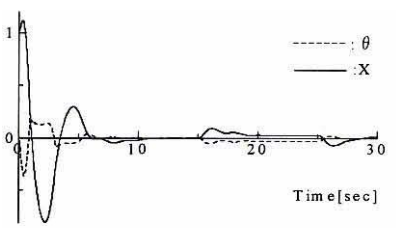

Fig.15 Response of x and θ

初期位置	x	$=$	1.0	$[m]$
初期角度	θ	$=$	5.0	$[deg]$
外乱あり	$d_3(t)$	$=$	0.3	$(15.0 \leq t \leq 25.0)$
	K_I	$=$	0.00023	
	q_1	$=$	1.04655	

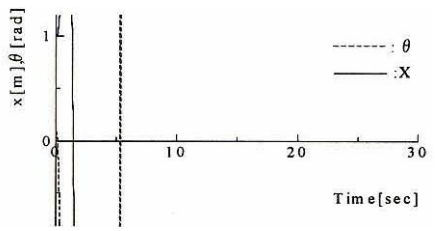

Fig.16 Response of x and θ

初期位置	x	=	1.0	$[m]$
初期角度	θ	=	5.0	$[deg]$
外乱あり	$d_3(t)$	=	0.3	$(15.0 \leq t \leq 25.0)$
	K_I	=	0.00023	
	q_1	=	1.04655	
	NN無し			

(56)式の様にI制御を補償器として用いた結果*Fig.14*の様に定常誤差の影響を抑えることができ、さらに*Fig.15*の様にI制御におけるパラメータを調節することで更に良い応答が得られた。I制御のみで制御されている可能性を確かめるためNN無しでシミュレーションした結果が*Fig.16*であるがNN無しでは制御できないことがわかる。

次に角度θを出力とするサーボ系を構成する。ニューラルネットワークを5入力に拡張し角度θだけに着目して外乱を抑えることを考える。

$$\dot{x}(t) = F(x(t), u(t)) + d(t) \tag{57}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{58}$$

$$e(t) = y(t) - r(t) \tag{59}$$

$$\dot{v}(t) = y(t) - r(t) \tag{60}$$

$$\text{ここで} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} = Z(t) \text{とおく} \tag{61}$$

$$\dot{Z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x(t), u(t)) \\ Cx(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ -r \end{bmatrix} \tag{62}$$

ここで評価関数を新たに(63)式の様に与え、$E_z(t)$を最小にする方法を用いる。

$$E_z(t+h) = \frac{1}{2} z^T(t+h) Q_z z(t+h) \tag{63}$$

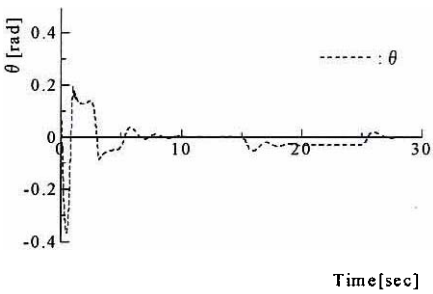

Fig.17 Response of θ

初期位置	x	=	1.0	$[m]$
初期角度	θ	=	5.0	$[deg]$
外乱あり	$d_3(t)$	=	0.3	$(15.0 \leq t \leq 25.0)$

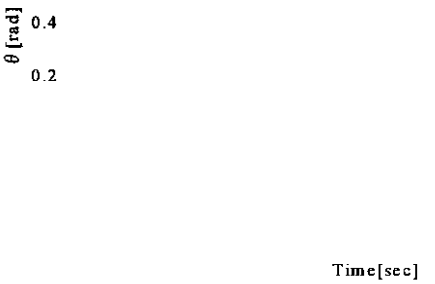

Fig.18 Response of θ

初期位置	x	=	1.0	$[m]$
初期角度	θ	=	5.0	$[deg]$
外乱あり	$d_3(t)$	=	0.3	$(15.0 \leq t \leq 25.0)$

Fig.17,*Fig.18*はそれぞれI制御を取り入れた場合と、サーボ系を用いた場合のシミュレーション結果である。サーボ系を用いた場合の方がより外乱を抑えることができた。

6. 結論と課題

1) 一般的な非線形系の安定化制御法を示した

2) 単倒立振子に適用し、本制御法の有効性を確認した

3) NNにI制御を補償器として用いることが有効であることがわかった

4) 今回の制御法ではqの調整により制御性能の向上がはかれることがわかった

5) サーボ系を用いることで更に外乱を抑えることができた

6) 制御系の安定性の解析を行い、さらに外乱除去のためのアルゴリズムを考察する

参考文献

1) 中野、飯沼、ニューロンネットグループ、桐谷(編): 入門と実習ニューロコンピューター，株式会社技術評論社(1989)