計測自動制御学会東北支部第197回研究集会（2001.10.13）
資料番号 197-16

ゲインスケジューリングによる非線形システムの制御

Gain Scheduling Control of Nonlinear System

○渡辺　昭*、渡部　慶二*、羅　志偉**、遠藤　茂*

○ Akira Watanabe*, Keiji Watanabe*, Zhiwei Luo**, Shigeru Endo*

*山形大学大学院　理工学研究科、**理化学研究所

*Yamagata University, **Riken

キーワード：ゲインスケジューリング(gain scheduling)、非線形システム(nonlinear system)、パラメータ凍結法(frozen parameter method)

連絡先：〒992-0038　山形県米沢市城南４－３－１６　山形大学　工学部　応用生命システム工学科
渡部研究室　渡辺昭、Tel.：(0238)26-3178、E-mail:akira@ewata.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

実在するシステムは一般的に非線形性を持っているため、制御する際は何らかの方法で線形化を行い、その線形化したシステムに対し線形制御理論を適用し制御している。しかし、この方法では非線形領域を含む動作範囲全体において良い性能を得ることは難しい。

そこで、本研究では、制御対象の状態を表すパラメータに依存してコントローラを切り替えるゲインスケジューリングの手法を倒立振子系と、振子の先にもう一つ振子を取り付けた直列型二重倒立振子系に適用し、その有用性の検証を試みた。

2. ゲインスケジューリング

ゲインスケジューリングは、非線形システムに対する制御系設計において、実際的な制御手法の一つである。これまで用いられてきた方法は

１．非線形システムをいくつかの動作点で線形化する。
２．得られた各線形系に対して線形制御器を設計する。
３．得られた線形制御器を補間（スケジューリング）する。

という３つのステップからなる。最後に得られる制御則をスケジューリング制御則と呼んでいる。この制御則は実際の現場では有用性が認められているが、一方で以下のような問題点がある。

・線形化を行う動作点をどのように選ぶのか。
・それぞれの動作点での線形制御系をどのように設計するのがいいのか。
・補間（スケジューリング）をどのように行うべきか。

これらの問題点を解決するため、新しいゲインスケジューリングが提案されている。

新しいゲインスケジューリングの手法は

１）非線形システムからＬＰＶシステムを導出。
２）ＬＰＶシステムに対する線形制御則を設計。

の二つのステップからなる。これはスケジューリングを決定してから制御則を決定することになり、従来の方法とは順序が逆になるが基本的な考え方は変わっていない。

3. 制御対象の記述

本研究では次の非線形制御対象を考える。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = f_0(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))u(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

ただし

$$f_0(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) \qquad (2)$$

$$\|\mathbf{A}(0)\| < \infty$$

$$\|\mathbf{b}(0)\| < \infty$$

4. ＬＰＶシステム

ＬＰＶシステム（Linear Parameter-Varying system）とは、非線形の制御対象をスケジューリングパラメータを持つ線形系でモデル化したものである。（１）、（２）式から $\mathbf{x}(t)$ をスケジューリングパラメータ $\theta(t)$ にとると次の式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(\theta(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(\theta(t))u(t) \qquad (3)$$

$$\mathbf{x}(0) = 0$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

ここで、$\mathbf{x}(t)$ は状態、$u(t)$ は制御入力、$\mathbf{y}(t)$ は出力、$\theta(.) = \{\theta(t) = \mathbf{x}(t), t \in [0,\infty)\}$ がスケジューリングパラメータである。

5. パラメータ凍結法

ＬＰＶシステムはスケジューリングパラメータを固定すると線形時変形となるが、スケジューリングパラメータは事前には与えられず制御対象の動作によって定まるものである。このため標準的な手法では制御器の設計ができないため、パラメータ凍結法を用いる。その手順は以下のようになる。

１．パラメータを一定値に固定し、ＬＰＶシステムを線形時不変系と考える。

２．線形時不変系に対し安定性と制御性能を保証する制御器を構成する。

３．パラメータを固定するごとに１．と２．を繰り返し、すべてのパラメータに対する制御器を求める。

４．オンラインで与えられるパラメータに応じ３．で求めた制御器の集合をスケジューリングする。

この設計法の問題点は、個々の凍結パラメータに対しては補償される安定性や制御性能が、比較的速く変化するスケジューリングによって補償されなくなることである。

（３）式に対して

$$\begin{aligned} &X(\theta)A(\theta) + A^T(\theta)X(\theta) \\ &\qquad -X(\theta)b(\theta)b^T(\theta)X(\theta) + C^TC = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

を満たす $X(\theta) \geq 0$ を求め

$$f(\theta) = b^T(\theta)X(\theta)$$

と置き

$$u = -f(\theta)x \qquad (5)$$

とする。

6. 系の安定性

（３）式に（５）式のフィードバックをほどこすと系の閉ループ系は

$$\dot{x}(t) = (A(\theta) - b(\theta)f(\theta))x(t) \qquad (6)$$

となる。この系の安定性を保証するため、リアプノフの安定性理論で安定性を調べる。リアプノフ関数を

$$V(t) = x^T(t)X(\theta)x(t)$$

とし、この関数の時間微分に（３）式を代入すると

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{x}^T(t)X(\theta)x(t) + x^T(t)X(\theta)\dot{x}(t) \\ &\qquad + x^T(t)\dot{X}(\theta)x(t) \\ &= x^T(t)[A^T(\theta)X(\theta) - X(\theta)b(\theta)^T b(\theta)X(\theta) \\ &\qquad + X(\theta)A(\theta) - X(\theta)b(\theta)^T b(\theta)X(\theta)]x(t) \\ &\qquad + x^T(t)\dot{X}(x(t))x(t) \\ &= -x^T(t)[C^TC \\ &\qquad + X(\theta)b(\theta)^T b(\theta)X(\theta) - \dot{X}(\theta)]x(t) \end{aligned} \qquad (7)$$

となる。ここで C^TC は対称行列であるため、

$$X(\theta) > 0 \qquad (8)$$

$$C^TC + X(\theta)b(\theta)^T b(\theta)X(\theta) > \dot{X}(\theta) \qquad (9)$$

であれば $\dot{V}(t) < 0$ となり系は漸近安定となる。

7. 倒立振子

前章までのゲインスケジューリングの有効性を調べるため倒立振子の制御を考える。これは、この制御対象が振子の角度に対する非線形性が強く、安定化可能な領域を広げるためには非線形性をよく考慮した制御が必要であり、４次系であるため厳密な線形化が行えないため、ゲインスケジューリングが有効であると考えたためである。

7.1. モデリング

図１に本研究で使用した倒立振子を示し、表１にそのパラメータを示す。

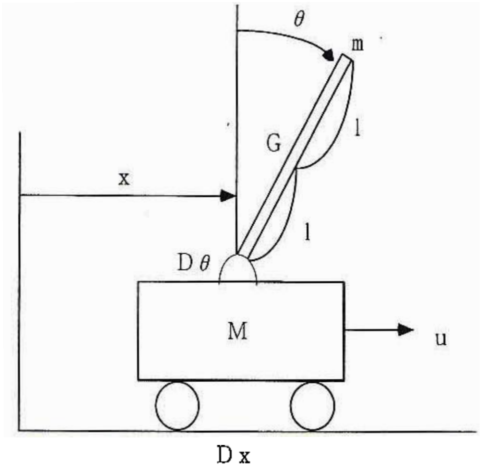

図１　倒立振子

表１　倒立振子のパラメータ

台車の質量	M[kg]	1.531
振子の質量	m[kg]	0.27
振子の長さ	l[m]	0.35
台車の粘性係数	$D_\theta[kg \cdot m^2/s]$	58.1780
振子の粘性係数	$D_X[N \cdot s/m]$	0.0
電圧一力変換係数	a[N/V]	17.3
重力加速度	$g[m/s^2]$	9.8

状態変数を $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & \theta & \dot{x} & \dot{\theta} \end{bmatrix}^T$ とすると図１の倒立振子の状態方程式は次式のようになる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))u(t)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A1(\mathbf{x}(t)) & A2(\mathbf{x}(t)) & A3(\mathbf{x}(t)) \\ 0 & A4(\mathbf{x}(t)) & A5(\mathbf{x}(t)) & A6(\mathbf{x}(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b1(\mathbf{x}(t)) \\ b2(\mathbf{x}(t)) \end{bmatrix} u(t) \qquad (10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

ただし、

$$N = \left(4(M+m)m - 3m^2 Cos^2\theta\right)l^2/3$$

$$A1 = -m^2 g l^2 Cos\theta Sin\theta / N\theta$$

$$A2 = -4ml^2 Dx/3N$$

$$A3 = \left(4m^2 l^3 \dot{\theta} Sin\theta + 3mlD_\theta Cos\theta\right)/3N$$

$$A4 = (M+m)mglSin\theta / N\theta$$

$$A5 = mlD_X Cos\theta / N$$

$$A6 = \left(-m^2 l^2 \dot{\theta} Cos\theta Sin\theta - (M+m)D_\theta\right)/N$$

$$b1 = 4ml^2/3N$$

$$b2 = -mlCos\theta/N$$

である。

7.2. 制御系設計

前章までの方法により倒立振子の制御則を求める。（１０）式において

$$N(0) \neq 0$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

であるから

$$\|\mathbf{A}(0)\| < \infty$$

$$\|\mathbf{b}(0)\| < \infty$$

である。ここで、スケジューリングパラメータを $\mathbf{x}(t)$ とするとＬＰＶシステムは（３）式と等しくなる。これより、（５）式のフィードバックをオンラインで与えられるパラメータに応じてスケジューリングすることで、スケジューリング状態フィードバック

$$f(x) = b^T(x(t))X(x(t))$$

を得る。

この系の安定性は（７）式の解が

$$C^T C + X(\theta(t))b(\theta(t))^T b(\theta(t))X(\theta(t)) > \dot{X}(\theta(t))$$

を満たし、正定であれば系は漸近安定となる。

7.3. シミュレーション

設計した制御系に対して初期状態として振子を $0.1[rad]$ 傾けた場合と $1.3[rad]$ 傾けた場合のシミュレーション結果をそれぞれ図２、図３に示す。

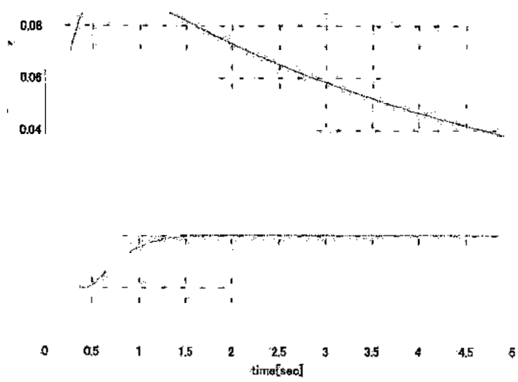

図２　$\theta = 0.1[rad]$ としたシミュレーション結果

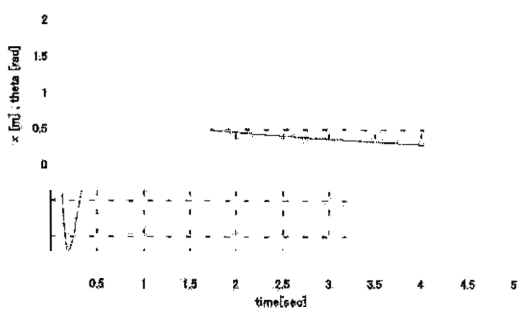

図３　$\theta = 1.3[rad]$ としたシミュレーション結果

シミュレーション結果より初期値を $\theta = 1.3[rad]$ までは安定化することができた。

比較として（１０）式を $\theta \approx 0$ の近傍で $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$ と線形近似したものについても同様のシミュレーションを行った。結果を図４に示す。

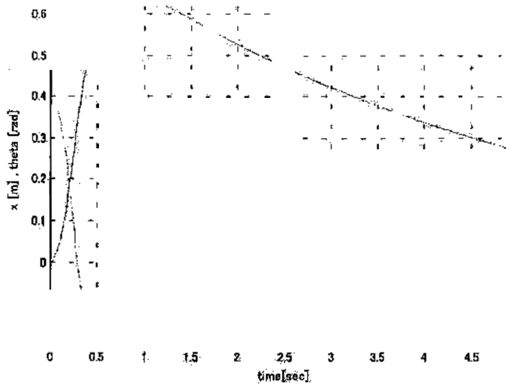

図４　$\theta = 0.4[rad]$ としたシミュレーション結果

シミュレーションの結果、安定化できたのは初期値 $\theta = 0.4[rad]$ までであった。この結果より、本研究の設計法のほうが､安定領域が広いことがわかる。

8. おわりに

本研究では非線形な制御対象にパラメータ凍結法を適用し、その有効性を振子の角度に対する非線形性の強い倒立振子のシミュレーションで示した。

今後の課題として実際の実験装置での実験と、直列型二重倒立振子に適用した場合のシミュレーションと実験を行いたい。

9. 参考文献

1）内田健康；ゲインスケジューリング；計測と制御、Vol.34、182－187(1995).

2）野波健蔵：MATLAB による制御系設計；東京電機大学出版局、(1998).