

# ファジィモデル追従形制御系の一設計法

## A Design Method of the Fuzzy Model Following Control Systems

○秋山 孝夫, 大久保 重範

○Takao AKIYAMA, Shigenori OKUBO

山形大学

Yamagata University

キーワード: ファジィ制御(Fuzzy Control), モデル追従形制御(Model Following Control), 外乱(Disturbance)

### 1. 緒言

安定性を保証したファジィ制御器の設計に関する研究例は, これまでレギュレータ問題やサーボ系設計問題が多く, モデル追従形制御系の設計を扱ったものは極めて少ない.

そこで, 本研究では高木・菅野のファジィモデルで表される制御対象に対し, 外乱を考慮したモデル追従形制御系の設計法を提案する.

### 2. 問題の設定

制御対象は次式で示される高木・菅野のファジィモデルで与えられていると仮定する.

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} + \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) d_i(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} \quad (1)$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} + \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) d_{oi}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} \quad (2)$$

ここで,  $x(t) \in R^n$  は状態変数,  $u(t) \in R^l$  は制御入力,  $y(t) \in R^l$  は制御対象の出力,  $d_i(t) \in R^n$ ,  $d_{oi}(t) \in R^l$  は有界な外乱である.  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  はそれぞれ適合する次元の実数定数行列である.  $w_i(x(t))$  は  $M_{ij}(x_j(t))$  をメンバーシップ関数値として次式を満足する適合度である.

$$w_i(x(t)) = \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j(t)) \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, r), \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) > 0$$

式(1)の記述を簡単にするために, 次式で定義される正規化された適合度ベクトル  $\alpha(x(t))$  を導入する.

$$\alpha(x(t)) = (\alpha_1(x(t)), \alpha_2(x(t)), \dots, \alpha_r(x(t)))^T,$$

$$\alpha_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum_{j=1}^r w_j(x(t))} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, r), \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) = 1$$

式(4)を利用して式(1)と(2)を書き換えれば, 次のようになる.

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + d(t), \quad (5)$$

$$y(t) = C(\alpha)x(t) + d_o(t)$$

ここで,

$$A(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i, \quad B(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i, \quad C(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i C_i, \quad (6)$$

$$d(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i d_i(t), \quad d_o(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i d_{oi}(t)$$

であり,  $\{A(\alpha), B(\alpha)\}$  可制御,  $\{C(\alpha), A(\alpha)\}$  可観測とする. また,  $\dot{\alpha} \cong 0$  を満たすものとする.

参照モデルを次式で表す.

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r_m(t), \quad (7)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t)$$

ここで,  $x_m(t) \in R^{n_m}$ ,  $r_m(t) \in R^{l_m}$ ,  $y_m(t) \in R^{l_m}$  はそれぞれ参照モデルに関する状態, 参照入力, 出力である.  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  はそれぞれ適合する次元の実数定数行列であり,  $(A_m, B_m)$  可制御,  $(C_m, A_m)$  可観測,  $A_m$  は安定行列とする. また, 制御対象と参照モデルとの出力誤差  $e(t)$  は次式で与えられる.

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (8)$$

$t \rightarrow \infty$  で  $e(t) \rightarrow 0$  にするようなモデル追従形制御系の設計を考える.

### 3. 制御系の設計

微分演算子  $p = d/dt$  を用いると,  $y(t)$  と  $y_m(t)$  はそれぞれ次式のように表される.

$$\begin{aligned}
y(t) &= C(\alpha)\{pI - A(\alpha)\}^{-1}B(\alpha)u(t) \\
&\quad + C(\alpha)\{pI - A(\alpha)\}^{-1}d(t) + d_o(t) \\
y_m(t) &= C_m(pI - A_m)^{-1}B_m r_m(t) \\
p\alpha &= \dot{\alpha} + \alpha p \equiv \alpha p \text{ を考慮して式(9)と(10)は} \\
C(\alpha)\{pI - A(\alpha)\}^{-1}B(\alpha) &\equiv \frac{N(\alpha, p)}{D(\alpha, p)}, \\
N(\alpha, p) &= C(\alpha) \text{adj}\{pI - A(\alpha)\}B(\alpha), \quad (11) \\
D(\alpha, p) &= |pI - A(\alpha)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_m(pI - A_m)^{-1}B_m &\equiv \frac{N_m(p)}{D_m(p)}, \\
N_m(p) &= C_m \text{adj}\{pI - A_m\}B_m, \quad (12) \\
D_m(p) &= |pI - A_m|
\end{aligned}$$

とおけば、それぞれ次式のように書き換えられる。

$$D(\alpha, p)y(t) \equiv N(\alpha, p)u(t) + v(\alpha, t) \quad (13)$$

$$D_m(p)y_m(t) \equiv N_m(p)r_m(t) \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
v(\alpha, t) &\equiv C(\alpha) \text{adj}\{pI - A(\alpha)\}d(t) \\
&\quad + D(\alpha, p)d_o(t) \quad (15)
\end{aligned}$$

設計の都合上、 $N(\alpha, p)$ と $N_m(\alpha, p)$ をそれぞれ次式の形式で表す。

$$N(\alpha, p) = N_r(\alpha) \text{diag}(p^{\eta_i}) + \tilde{N}(\alpha, p) \quad (i=1, 2, \dots, l) \quad (16)$$

$$N_m(p) = N_{m_r} \text{diag}(p^{\eta_{m_i}}) + \tilde{N}_m(p) \quad (17)$$

ここで、 $\eta_i$ は $N(\alpha, p)$ の各行の $p$ に関する次数を表し、 $\eta_{m_i}$ は $N_m(p)$ の各行の次数である。また、 $\partial_r \tilde{N}(\alpha, p) < \eta_i$ 、 $\partial_r \tilde{N}_m(p) < \eta_{m_i}$ である。 $N_r(\alpha)$ は $l \times l$ の行列であり、 $|N_r(\alpha)| \neq 0$ であるとする。また、外乱 $d(t)$ 、 $d_o(t)$ は

$$D_d(p)d(t) = \mathbf{0}, \quad D_d(p)d_o(t) = \mathbf{0}, \quad (18)$$

$$\partial D_d(p) = n_d$$

を満たすものとする。 $D_d(p)$ は既知のモニックな多項式であり、外乱のモードを与える。よって、

$$D_d(p)v(\alpha, p) \equiv \mathbf{0} \quad (19)$$

次に、 $\rho$ 次( $\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \eta_i$ )のモニックで安定な多項式 $T(p)$ を選び、次式より $p$ に関する多項式 $R(\alpha, p)$ と $S(\alpha, p)$ を求める。

$$T(p)D_m(p) = D_d(p)D(\alpha, p)R(\alpha, p) + S(\alpha, p) \quad (20)$$

ここで、各多項式の次数は $\partial T(p) = \rho$ 、 $\partial D_m(p) = n_m$ 、 $\partial D_d(p) = n_d$ 、 $\partial D(\alpha, p) = n$ 、 $\partial R(\alpha, p) = \rho + n_m - n_d - n$ 、 $\partial S(\alpha, p) \leq n_d + n - 1$ である。

式(3)、(20)、(14)および式(13)、(19)を考慮すれば、 $e(t)$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
T(p)D_m(p)e(t) &= D_d(p)D(\alpha, p)R(\alpha, p)y(t) \\
&\quad + S(\alpha, p)y(t) - T(p)N_m(p)r_m(t) \\
&\equiv \{D_d(p)R(\alpha, p)N(\alpha, p) - N_r(\alpha)Q(p)\}u(t) \\
&\quad + N_r(\alpha)Q(p)u(t) + S(\alpha, p)y(t) \\
&\quad - T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (21)
\end{aligned}$$

ここで、 $Q(p)$ は $|Q(p)|$ が安定な多項式であるような多項式行列であり、次式のように表す。

$$Q(p) = \text{diag}(p^{\rho+n-n_m-\eta_i}) + \tilde{Q}(p) \quad (i=1, 2, \dots, l) \quad (22)$$

ただし、 $\partial_r \tilde{Q}(p) < \rho + n_m - n + \eta_i$ である。式(21)において、 $T(p)D_m(p)e(t) = \mathbf{0}$ となるように右辺をゼロとおけば、 $u(t)$ は次式のように求められる。

$$\begin{aligned}
u(t) &\equiv -Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1}\{D_d(p)R(\alpha, p)N(\alpha, p) \\
&\quad - N_r(\alpha)Q(p)\}u(t) \\
&\quad - Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1}S(\alpha, p)y(t) \\
&\quad + Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (23)
\end{aligned}$$

式(23)の各行列要素の分数式がプロパーとなるためには、次の条件を満足しなければならない。

$$\begin{aligned}
\rho &\geq n_d + 2n - n_m - 1 - \eta_i, \\
n_m - \eta_{m_i} &\geq n - \eta_i \quad (i=1, 2, \dots, l) \quad (24)
\end{aligned}$$

さらに次の関係式

$$\begin{aligned}
Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1}\{D_d(p)R(\alpha, p)N(\alpha, p) \\
- N_r(\alpha)Q(p)\} &= H_1(\alpha)(pI - F_1)^{-1}G_1, \\
Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1}S(\alpha, p) &= J_2(\alpha) + H_2(\alpha)(pI - F_2)^{-1}G_2, \\
Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1}T(p)N_m(p) &= J_3(\alpha) + H_3(\alpha)(pI - F_3)^{-1}G_3, \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}_1(t) &= F_1\xi_1(t) + G_1u(t), \\
\dot{\xi}_2(t) &= F_2\xi_2(t) + G_2y(t), \\
\dot{\xi}_3(t) &= F_3\xi_3(t) + G_3r_m(t), \quad (26)
\end{aligned}$$

$$|pI - F_i| = |Q(p)| \quad (i=1, 2, 3)$$

を利用すれば、式(23)は状態変数フィルタ $\xi_i$  ( $i=1, 2, 3$ )を用いて次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
u(t) &\equiv -H_1(\alpha)\xi_1(t) - J_2(\alpha)y(t) \\
&\quad - H_2(\alpha)\xi_2(t) + u_m(t), \quad (27)
\end{aligned}$$

$$u_m(t) = J_3(\alpha)r_m(t) + H_3(\alpha)\xi_3(t)$$

式(27)の $u(t)$ は $e(t) \rightarrow \mathbf{0}$  ( $t \rightarrow \infty$ )を満足するから、制御系を構成する内部状態が有界であれば、モデル追従形制御系が構成できる。

#### 4. 内部状態の安定性の解析

制御系に対して外部から入る信号は参照入力 $r_m(t)$ と外乱 $d(t)$ 、 $d_o(t)$ であるが、これらはすべて有界であるものとする。制御系全体の挙動をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + d(t), \\
\dot{\xi}_1(t) &= F_1\xi_1(t) + G_1u(t), \\
\dot{\xi}_2(t) &= F_2\xi_2(t) + G_2y(t), \\
\dot{\xi}_3(t) &= F_3\xi_3(t) + G_3r_m(t), \\
u(t) &\equiv -H_1(\alpha)\xi_1(t) - J_2(\alpha)y(t) - H_2(\alpha)\xi_2(t) + u_m(t), \\
u_m(t) &= J_3r_m(t) + H_3\xi_3(t), \\
y(t) &= C(\alpha)x(t) + d_o(t), \\
\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m r_m(t), \\
y_m(t) &= C_m x_m(t) \quad (28)
\end{aligned}$$

$\xi_3(t)$ は有界となるため、 $z_s(t)^T = [x(t)^T, \xi_1(t)^T, \xi_2(t)^T]$ と  
おいて有界性の解析に必要な部分をまとめれば、  
次式を得る。

$$\dot{z}_s(t) = A_s(\alpha)z_s(t) + d_s(t) \quad (29)$$

ここで、

$$A_s(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) - B(\alpha)J_2(\alpha)C(\alpha) & -B(\alpha)H_1(\alpha) \\ -G_1J_2(\alpha)C(\alpha) & \{F_1 - G_1H_1(\alpha)\} \\ G_2C(\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B(\alpha) \\ G_1 \\ 0 \end{bmatrix} u_m(t) + \begin{bmatrix} d(t) - B(\alpha)J_2(\alpha)d_o(t) \\ -G_1J_2(\alpha)d_o(t) \\ G_2d_o(t) \end{bmatrix} \quad (30)$$

式(29)の特性多項式を計算すると次式のようになる。

$$|pI - A_s(\alpha)| = |Q(p)T(p)'D_m(p)'V(\alpha, p)| \quad (31)$$

ここで、 $V(\alpha, p)$ は $\alpha \equiv 0$ の条件下における  
 $C(\alpha)\{pI - A(\alpha)\}^{-1}B(\alpha)$ の不変零点の多項式である。  
 $Q(p)$ 、 $T(p)$ 、 $D_m(p)$ はいずれも安定多項式である  
ため、 $V(\alpha, p)$ が安定ならば、 $A_s(\alpha)$ は安定なシステ  
ム行列となる。よって、 $z_s(t)$ の有界性が証明された。

## 5. 数値例

次のような高木・菅野のファジィモデルに対して  
モデル追従形制御系を設計し、その数値シミュレ  
ーション結果を示す。

規則 i: If  $x_1(t)$  is  $M_{i1}$  and  $x_2(t)$  is  $M_{i2}$

Then

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + B_i u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ d_i(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= C_i x(t) + d_{oi}(t) \end{aligned} \quad (32)$$

( $i=1,2$ )

ここで、

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -2.178 & -0.588 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & B_1 &= \begin{bmatrix} 0.603 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -2.256 & -0.361 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, & B_2 &= \begin{bmatrix} 1.120 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= [3 \ 1], & C_2 &= [2 \ 1], \\ d_1(t) &= 0.9 \ (6 \leq t \leq 11), & d_2(t) &= 0.7 \ (7 \leq t \leq 12), \\ d_{o1}(t) &= 0.7 \ (17 \leq t \leq 23), & d_{o2}(t) &= 0.8 \ (15 \leq t \leq 20) \end{aligned} \quad (33)$$

すなわち制御対象は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} f_1(\alpha) & f_2(\alpha) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} f_3(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ d(t) \end{bmatrix}, \\ y(t) &= [f_4(\alpha) \ 1] x(t) + d_o(t), \\ x(0) &= [0.1 \ -0.5]^T \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= -2.178\alpha_1 - 2.256\alpha_2, \\ f_2(\alpha) &= -0.588\alpha_1 - 0.361\alpha_2, \\ f_3(\alpha) &= 0.603\alpha_1 + 1.120\alpha_2, \\ f_4(\alpha) &= 3\alpha_1 + 2\alpha_2, \end{aligned} \quad (35)$$

$$w_1(t) = \exp[-\{(x_1(t) - 0.3)^2 + (x_2(t) - 0.5)^2\}],$$

$$w_2(t) = \exp[-\{(x_1(t) - 0.7)^2 + (x_2(t) - 0.1)^2\}]$$

また、参照モデルを次式で与える。

$$\begin{aligned} \dot{x}_m(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_m(t), \\ y_m(t) &= [2 \ 1] x_m(t), \quad r_m(t) = 4 \sin 0.5t + 8, \\ x_m(0) &= [0 \ 0]^T \end{aligned} \quad (36)$$

$|Q(p)| = (p+6)^2$ ,  $T(p) = p+5$ ,  $D_m(p) = p^2 + 5p + 6$ と選  
べば、 $V(\alpha, p) = (0.632\alpha_1 + 1.120\alpha_2)\{(3\alpha_1 + 2\alpha_2)p + 1\}$   
となり、いずれも安定である。制御入力 $u$ は次式のよ  
うになる。

$$\begin{aligned} u(t) &\cong [36 \ 12 - 1/f_4(\alpha)] \xi_1(t) - (10 + f_1(\alpha)) f_5(\alpha) y(t) \\ &\quad + [3(110 + 12f_1(\alpha)) \ 89 + 12f_1(\alpha) - f_2(\alpha)] f_5(\alpha) \xi_2(t) \\ &\quad + u_m(t), \\ u_m(t) &= f_5(\alpha) r_m(t) - [26 \ 5] f_5(\alpha) \xi_3(t), \\ f_5(\alpha) &= 1 / \{f_3(\alpha) f_4(\alpha)\} \end{aligned} \quad (37)$$

図1から、出力誤差 $e(t)$ は漸近的にゼロに収束し  
て $y(t)$ は $y_m(t)$ に追従することが数値的確認される。

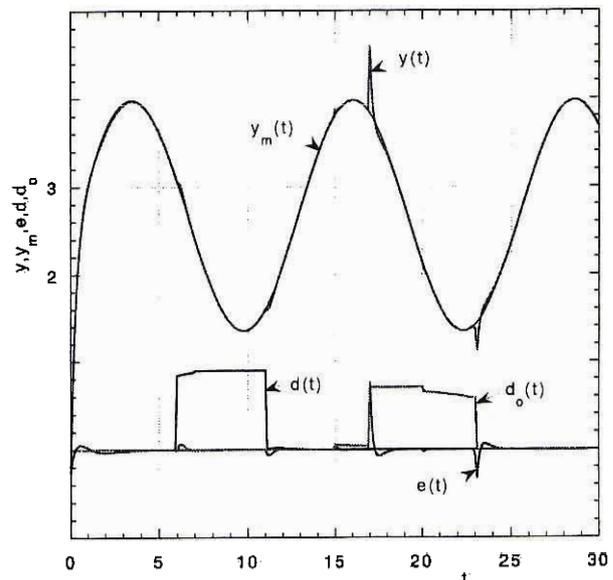


図1. ファジィシステムの応答

## 6. 結言

外乱を考慮し、ファジィ理論を用いたモデル追従  
形制御系の設計法を提案した。本設計法では、正規  
化された適合度ベクトル $\alpha$ と微分演算子 $p$ を導入し  
 $\alpha \equiv 0$ の条件下で $\alpha$ と $p$ に関する多項式行列の簡単  
な代数演算で制御系が設計可能である。