

ベイズ統計に基づく 確率的画像処理システムの統計的性能評価

Statistical Performance in Probabilistic Image Processing based on Bayesian Statistics

○田中和之

○Kazuyuki Tanaka

東北大学大学院情報科学研究科情報基礎科学専攻

Department of Computer and Mathematical Sciences,
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

キーワード： 統計的手法 (statistical method) ベイズ統計 (Bayesian statistics), 自己回帰モデル (autoregressive model), 確率的情報処理 (probabilistic information processing), 離散フーリエ変換 (discrete Fourier transform), 雑音除去 (noise elimination)

連絡先： 〒980-8579 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉 04 東北大学大学院情報科学研究科情報基礎科学専攻
田中和之, Tel.: (022)217-5899, Fax.: (022)217-5851, E-mail: kazu@statp.is.tohoku.ac.jp

1. はじめに

画像処理を目的とした多くの確率的情報処理アルゴリズムがベイズ統計にもとづいて考案されている^{1, 2)}。ベイズ統計をもとに構成された画像処理アルゴリズムの多くは事前確率分布としてマルコフ確率場を仮定しており, 事後確率分布に対する大規模確率場モデルとして定式化されている^{3, 4, 5)}。事後確率分布にはいくつかのハイパパラメータが含まれており, 多くの場合, 最尤推定の立場に置いて周辺ゆう度と呼ばれる量を最大化するように決定され, これを効率よく行うアルゴリズムが統計力学的近似解析手法をもとに提案されている^{6, 7, 8)}。その一方で, 大規模確率モデルではあるが解析的取り扱いが可能なモデルに限定して, この確率的画像処理に対する周辺ゆう度最大化の性能

評価を行う研究がなされている^{9, 10, 11)}。

本論文では統計量がガウス積分の公式を用いて解析的に計算できる確率場モデルによる濃淡画像の画像修復の定式化と周辺ゆう度の解析的な表式の導出を行い, ハイパパラメータの推定に対する解析的性能評価を行う。Sec.2. ではベイズ統計の枠組みと周辺ゆう度を用いたハイパパラメータ推定について概説する。Sec.3. では劣化過程と事前確率分布に対する仮定を与え, ベイズ統計の枠組みにおいて事後確率分布として画像修復の定式化を行い, 修復画像と周辺ゆう度の解析的表式を与える。Sec.4. では本論文で与えた確率場モデルに対する統計的性能評価を与える。Sec.5. では数値実験を与え, Sec.6. はむすびである。なお, 本論文の内容は北海道大学大学院工学研究科の井上純一

助教授との共同研究であり、すでに公表済みである¹¹⁾。

2. ベイズ統計

周期境界条件のもとで $|\mathbf{L}| = L_x \times L_y$ 個の画素からなる正方形格子 $\mathbf{L} = \{(x, y) | x = 0, 1, \dots, L_x - 1, y = 0, 1, \dots, L_y - 1\}$ の上で与えられた濃淡画像の画像修復を考える。原画像と劣化画像は $\mathbf{f} = \{f_{x,y} | (x, y) \in \mathbf{L}\}$ 及び $\mathbf{g} = \{g_{x,y} | (x, y) \in \mathbf{L}\}$ によりそれぞれ与えられるものとする。すなわち $f_{x,y}$ と $g_{x,y}$ は原画像及び劣化画像の画素 (x, y) における階調値を表し、任意の実数により与えられる。観測された劣化画像 $\mathbf{g}$ から原画像 $\mathbf{f}$ を復元するためには劣化過程と原画像に対する事前知識が必要となる。これを確率場モデルとして表現するために原画像及び劣化画像の確率場を $\mathbf{F} = \{F_{x,y} | (x, y) \in \mathbf{L}\}$ 及び $\mathbf{G} = \{G_{x,y} | (x, y) \in \mathbf{L}\}$ によりそれぞれ表すこととする。ベイズの公式において劣化画像 $\mathbf{g}$ が観測されたという条件のもとでの原画像が $\mathbf{x}$ であるという事後確率密度関数 $\rho\{\mathbf{F} = \mathbf{f} | \mathbf{G} = \mathbf{g}\}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \rho\{\mathbf{F} = \mathbf{f} | \mathbf{G} = \mathbf{g}, \alpha, \beta\} \\ = \frac{\rho\{\mathbf{G} = \mathbf{g} | \mathbf{F} = \mathbf{f}, \beta\} \rho\{\mathbf{F} = \mathbf{f} | \alpha\}}{\int \rho\{\mathbf{G} = \mathbf{g} | \mathbf{F} = \mathbf{f}, \sigma\} \rho\{\mathbf{F} = \mathbf{f} | \alpha\} d\mathbf{f}} \quad (1) \end{aligned}$$

ここで、 $\int d\mathbf{f} = \prod_{(x,y) \in \mathbf{L}} \int_{-\infty}^{+\infty} df_{x,y}$ はすべての画素の階調値 $f_{x,y}$ に対して区間 $(-\infty, +\infty)$ を通しての積分をとることを意味する。 $\Pr\{\mathbf{F} = \mathbf{f} | \alpha\}$ は原画像が $\mathbf{f}$ である事前確率密度関数を表し、 $\Pr\{\mathbf{G} = \mathbf{g} | \mathbf{F} = \mathbf{f}, \sigma\}$ は原画像 $\mathbf{f}$ から劣化画像 $\mathbf{g}$ が生成される劣化過程を表す確率密度関数である。これらの確率密度関数に含まれる α と β はハイパパラメータである。

最ゆう推定の立場に置いてハイパパラメータ α , σ は周辺ゆう度

$$\rho\{\mathbf{G} = \mathbf{g} | \alpha, \sigma\}$$

$$\equiv \int \rho\{\mathbf{G} = \mathbf{g} | \mathbf{F} = \mathbf{f}, \sigma\} \rho\{\mathbf{F} = \mathbf{f} | \alpha\} d\mathbf{f} \quad (2)$$

を最大化するように決定される。ハイパパラメータ α, σ の推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\sigma}$ に対して修復画像 $\hat{\mathbf{f}} \equiv \{\hat{f}_{x,y} | (x, y) \in \mathbf{L}\}$ は事後確率密度関数から次のようにして決定される。

$$\hat{f}_{x,y} = \int f_{x,y} \rho\{\mathbf{F} = \mathbf{f} | \mathbf{G} = \mathbf{g}, \hat{\alpha}, \hat{\sigma}\} d\mathbf{f} \quad (3)$$

3. 可解マルコフ確率場モデル

本論文では劣化過程として平均 0, 分散 σ^2 の加法的白色ガウス雑音 $\mathcal{N}[0, \sigma^2]$ を考える。すなわち原画像 $\mathbf{f}$ から劣化画像 $\mathbf{g}$ が生成される条件付き確率密度関数 $\rho\{\mathbf{G} = \mathbf{g} | \mathbf{F} = \mathbf{f}, \beta\}$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \rho\{\mathbf{G} = \mathbf{g} | \mathbf{F} = \mathbf{f}, \sigma\} \\ \equiv \frac{1}{Z_{\text{noise}}(\sigma)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2\right) \quad (4) \end{aligned}$$

$$Z_{\text{noise}}(\sigma) \equiv \left(2\pi\sigma^2\right)^{\frac{|\mathbf{L}|}{2}} \quad (5)$$

また、画像修復における事前知識として原画像が $\mathbf{f}$ である事前確率密度関数は

$$\rho\{\mathbf{F} = \mathbf{f} | \alpha\} \equiv \frac{1}{Z_{\text{prior}}(\alpha)} \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha \mathbf{f}^T \mathbf{C}^2 \mathbf{f}\right) \quad (6)$$

$$Z_{\text{prior}}(\alpha) \equiv \int \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha \mathbf{f}^T \mathbf{C}^2 \mathbf{f}\right) d\mathbf{f} \quad (7)$$

により与えられるものであると仮定する。 $\mathbf{C}$ は $|\mathbf{L}|$ 行 $|\mathbf{L}|$ 列の行列であり、その $(x, y | x', y')$ -成分は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \langle x, y | \mathbf{C} | x', y' \rangle &\equiv \delta_{x,x'} \delta_{y,y'} \\ &- \frac{1}{4} \delta_{x,x'+1} \delta_{y,y'} - \frac{1}{4} \delta_{x,x'-1} \delta_{y,y'} \\ &- \frac{1}{4} \delta_{x,x'} \delta_{y,y'+1} - \frac{1}{4} \delta_{x,x'} \delta_{y,y'-1} \quad (8) \end{aligned}$$

事前確率密度関数は次の意味において自己回帰 (Auto-regressive; AR) モデルと等価となる¹²⁾。

$$\begin{aligned} f_{x,y} - \frac{1}{4}(f_{x+1,y} + f_{x-1,y} + f_{x,y+1} + f_{x,y-1}) \\ \sim \mathcal{N}[0, 1/\alpha] \quad (9) \end{aligned}$$

行列 C は離散フーリエ変換

$$\langle x, y | U | p, q \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{L}|}} \exp\left(-i \frac{2\pi p x}{L_x} - i \frac{2\pi q y}{L_y}\right) \quad (10)$$

を導入することにより, 次のように対角化される.

$$\langle p, q | U^{-1} C U | p', q' \rangle = \delta_{p,p'} \delta_{q,q'} \lambda(p, q) \quad (11)$$

$$\lambda(p, q) \equiv 1 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi p}{L_x}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi q}{L_y}\right) \quad (12)$$

これにより多次元ガウス積分の公式を用いることにより $Z_{\text{prior}}(\alpha)$ は次のように表される.

$$Z_{\text{prior}}(\alpha) = (2\pi)^{\frac{|\mathbf{L}|}{2}} \left(\prod_{(p,q) \in \mathbf{L}} \frac{1}{\alpha \lambda(p, q)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

式 (4) 及び式 (6) を式 (1) に代入することにより事後確率密度関数は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \rho\{\mathbf{F} = \mathbf{f} | \mathbf{G} = \mathbf{g}, \alpha, \beta\} \\ = \frac{1}{Z_{\text{posterior}}(\alpha, \beta)} \exp\left(-E(\mathbf{f} | \mathbf{g}, \alpha, \sigma)\right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$Z_{\text{posterior}}(\alpha, \beta) \equiv \int \exp\left(-E(\mathbf{f} | \mathbf{g}, \alpha, \sigma)\right) d\mathbf{f} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} E(\mathbf{f} | \mathbf{g}, \alpha, \sigma) &\equiv \frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 + \frac{1}{2} \alpha \mathbf{f}^T \mathbf{C}^2 \mathbf{f} \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \left(\mathbf{f} - (\mathbf{I} + \alpha \sigma^2 \mathbf{C}^2)^{-1} \mathbf{g} \right)^T \\ &\quad \times (\mathbf{I} + \alpha \sigma^2 \mathbf{C}^2) \\ &\quad \times \left(\mathbf{f} - (\mathbf{I} + \alpha \sigma^2 \mathbf{C}^2)^{-1} \mathbf{g} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \alpha \mathbf{g}^T \mathbf{C}^2 (\mathbf{I} + \alpha \sigma^2 \mathbf{C}^2)^{-1} \mathbf{g}. \end{aligned} \quad (16)$$

ここで, 多次元ガウス積分の公式を用いることにより $Z_{\text{posterior}}(\alpha, \sigma)$ は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} Z_{\text{posterior}}(\alpha, \sigma) \\ &= (2\pi\sigma^2)^{\frac{|\mathbf{L}|}{2}} \left\{ \det(\mathbf{I} + \alpha \sigma^2 \mathbf{C}^2) \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha \mathbf{g}^T \mathbf{C}^2 (\mathbf{I} + \alpha \sigma^2 \mathbf{C}^2)^{-1} \mathbf{g}\right) \\ &= (2\pi)^{\frac{|\mathbf{L}|}{2}} \left(\prod_{(p,q) \in \mathbf{L}} \frac{\sigma^2}{1 + \alpha \sigma^2 \lambda(p, q)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} |G(p, q)|^2 \frac{\alpha \lambda(p, q)^2}{1 + \alpha \sigma^2 \lambda(p, q)^2}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$G(p, q) \equiv \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{L}|}} \sum_{(x,y) \in \mathbf{L}} g_{x,y} \exp\left(-i \frac{2\pi p x}{L_x} - i \frac{2\pi q y}{L_y}\right) \quad (18)$$

式 (5), (13), (17) から周辺ゆう度の厳密な表式は以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} \ln(\rho\{\mathbf{G} = \mathbf{g} | \alpha, \sigma\}) &= \ln\left(\frac{Z_{\text{posterior}}(\alpha, \sigma)}{Z_{\text{noise}}(\sigma) Z_{\text{prior}}(\alpha)}\right) \\ &= -\frac{|\mathbf{L}|}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln\left\{ \det(\mathbf{I} + \alpha \sigma^2 \mathbf{C}^2) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln\left\{ \det(\alpha \mathbf{C}^2) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{g}^T \alpha \mathbf{C}^2 (\mathbf{I} + \alpha \sigma^2 \mathbf{C}^2)^{-1} \mathbf{g} \\ &= -\frac{|\mathbf{L}|}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \ln\left(1 + \alpha \sigma^2 \lambda(p, q)^2\right) \\ &\quad + \frac{|\mathbf{L}|}{2} \ln(\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \ln\left(\lambda(p, q)^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} |G(p, q)|^2 \frac{\alpha \lambda(p, q)^2}{1 + \alpha \sigma^2 \lambda(p, q)^2} \end{aligned} \quad (19)$$

周辺ゆう度 $\rho\{\mathbf{G} = \mathbf{g} | \alpha, \sigma\}$ の $\alpha = \hat{\alpha}$, $\sigma = \hat{\sigma}$ における極値条件は以下の非線形連立方程式に帰着される.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{\alpha}} &= \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \frac{\hat{\sigma}^2 \lambda(p, q)^2}{1 + \hat{\alpha} \hat{\sigma}^2 \lambda(p, q)^2} \\ &\quad + \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} |G(p, q)|^2 \frac{\lambda(p, q)^2}{(1 + \hat{\alpha} \hat{\sigma}^2 \lambda(p, q)^2)^2} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \frac{\hat{\sigma}^2}{1 + \hat{\alpha} \hat{\sigma}^2 \lambda(p, q)^2} \\ &\quad + \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} |G(p, q)|^2 \frac{\hat{\alpha}^2 \hat{\sigma}^4 \lambda(p, q)^4}{(1 + \hat{\alpha} \hat{\sigma}^2 \lambda(p, q)^2)^2} \end{aligned} \quad (21)$$

式 (10)-(12) 及び式 (16) から式 (3) における修復画像 $\hat{\mathbf{f}}$ の厳密な表式は次のように与えられる.

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{h}(\mathbf{g}, \hat{\alpha}, \hat{\sigma}) = (\mathbf{I} + \hat{\alpha} \hat{\sigma}^2 \mathbf{C}^2)^{-1} \mathbf{g} \quad (22)$$

すなわち

$$\begin{aligned} \hat{f}_{x,y} &= h_{x,y}(\mathbf{g}, \hat{\alpha}, \hat{\sigma}) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \frac{1}{1 + \hat{\alpha} \hat{\sigma}^2 \lambda(p, q)^2} \\ &\quad \times \left(\cos\left(\frac{2\pi p x}{L_x} + \frac{2\pi q y}{L_y}\right) \text{Re}(G(p, q)) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{2\pi p x}{L_x} + \frac{2\pi q y}{L_y}\right) \text{Im}(G(p, q)) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

本節で与えた定式化をまとめると式 (20) 及び式 (21) によりハイパパラメータの推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\sigma}$ を決定し、原画像の推定値すなわち修復画像 $\hat{f}$ は式 (23) により計算されるということになる。劣化画像 g がひとつ与えられた時に、ハイパパラメータの推定値 $\hat{\alpha}, \hat{\sigma}$ を周辺ゆう度最大化の枠組みにより求めるアルゴリズムは以下のように与えられる。

劣化画像 g から周辺ゆう度最大化するアルゴリズム

Step 1: Calculate the discrete Fourier transform $G(p, q)$ of the given degraded image g by means of Eq. (18). Set $r \leftarrow 0$, $a(0) \leftarrow 1$ and $b(0) \leftarrow 1$ as an initial value.

Step 2: Update $r \leftarrow r + 1$; and

$$a(r) \leftarrow \left(\frac{1}{|L|} \sum_{(p,q) \in L} \frac{b(r-1)\lambda(p,q)^2}{1+a(r-1)b(r-1)\lambda(p,q)^2} + \frac{1}{|L|} \sum_{(p,q) \in L} |G(p,q)|^2 \frac{\lambda(p,q)^2}{(1+a(r-1)b(r-1)\lambda(p,q)^2)^2} \right)^{-1}, \quad (24)$$

$$b(r) \leftarrow \frac{1}{|L|} \sum_{(p,q) \in L} \frac{b(r-1)}{1+a(r-1)b(r-1)\lambda(p,q)^2} + \frac{1}{|L|} \sum_{(p,q) \in L} |G(p,q)|^2 \frac{a(r-1)^2 b(r-1)^2 \lambda(p,q)^4}{(1+a(r-1)b(r-1)\lambda(p,q)^2)^2}. \quad (25)$$

Step 3: Update $\hat{\sigma} \leftarrow \sqrt{b(r)}$, $\hat{\alpha} \leftarrow a(r)$ and $R \leftarrow r$. Stop if it is satisfied that

$$\left| \frac{a(r) - a(r-1)}{a(r-1)} \right| + \left| \frac{b(r) - b(r-1)}{b(r-1)} \right| < 10^{-6}, \quad (26)$$

and go to Step 2 otherwise.

4. 統計的性能評価

本節では前節で与えられた可解マルコフ確率場モデルの統計的性能評価を参考文献⁹⁾においてスピングラス理論の立場から画像修復に対して定義されている統計量に基づいて行う。

最初に、原画像 f をひとつ固定したときにそのハイパパラメータ α の最適値を最ゆう推定のもとで評価することとすると次の式で与えられる。

$$\alpha^* = \arg \max_{\alpha} \rho\{F = f | \alpha\} \quad (27)$$

この式はもともと、原画像 f はハイパパラメータ α を α^* という値に固定したときの事前確率密度

関数 $\rho\{F = f | \alpha\}$ の高い確率を与える画像のひとつであると仮定したのだから、 $\rho\{F = f | \alpha\}$ を原画像 f が与えられたときに α に対するもつもらしさを表す関数すなわちゆう度関数とみなして最大化するように α^* の値を決定しよう」ということを意味する。離散フーリエ変換 U を用いると周辺ゆう度 $\rho\{F = f | \alpha\}$ の解析的表式は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \ln(\rho\{F = f | \alpha\}) &= \frac{|L|}{2} \ln(\alpha) + \sum_{(p,q) \in L} \ln(\lambda(p,q)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \alpha \sum_{(p,q) \in L} |F(p,q)|^2 \lambda(p,q)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

$$F(p,q) \equiv \frac{1}{\sqrt{|L|}} \sum_{(x,y) \in L} f_{x,y} \exp\left(-i \frac{2\pi p x}{L_x} - i \frac{2\pi q y}{L_y}\right) \quad (29)$$

式 (28) を α で微分し、極値の条件として書き直すことにより α^* は次のように表される。

$$\alpha^* = \left(\frac{1}{|L|} \sum_{(p,q) \in L} |F(p,q)|^2 \lambda(p,q)^2 \right)^{-1} \quad (30)$$

そこでまず、対数周辺ゆう度の劣化過程 (4) 及び事前確率密度関数 (6) についての統計平均量

$$\begin{aligned} \text{ML}(\alpha, \sigma) &\equiv \int \left\{ \left(\ln \rho\{G = g | \alpha, \sigma\} \right) \right. \\ &\quad \times \left(\int \rho\{G = g | F = z, \sigma^*\} \right. \\ &\quad \times \rho\{F = z | \alpha^*\} dz \left. \right) dg. \end{aligned} \quad (31)$$

を計算する。この統計平均量の厳密な表式は式 (4)、式 (6) 及び式 (19) を式 (31) の右辺に代入し、式 (5)、式 (13) 及び式 (16) を用いることにより、次のような表式として与えられる。

$$\begin{aligned} \text{ML}(\alpha, \sigma) &= -\frac{|L|}{2} \ln(2\pi) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{(p,q) \in L} \ln\left(\frac{\alpha \lambda(p,q)^2}{1 + \alpha \sigma^2 \lambda(p,q)^2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{(p,q) \in L} \left(\frac{\alpha}{\alpha^*}\right) \left(\frac{1 + \alpha^* \sigma^{*2} \lambda(p,q)^2}{1 + \alpha \sigma^2 \lambda(p,q)^2}\right). \end{aligned} \quad (32)$$

ML(α, β) の α 及び β についての微分から $\alpha = \hat{\alpha}$ 及び $\alpha = \hat{\beta}$ におけるその極値条件は次の非線形連立方程式として与えられる.

$$\frac{1}{\hat{\alpha}} = \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \frac{\hat{\sigma}^2 \lambda(p,q)^2}{1 + \hat{\alpha} \hat{\sigma}^2 \lambda(p,q)^2} - \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \left(\frac{(1 + \alpha^* \sigma^{*2} \lambda(p,q)^2)}{\alpha^* (1 + \hat{\alpha} \hat{\sigma}^2 \lambda(p,q)^2)^2} \right) \quad (33)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \left(\frac{\hat{\sigma}^2}{1 + \hat{\alpha} \hat{\sigma}^2 \lambda(p,q)^2} \right) - \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \left(\frac{\hat{\alpha}^2 \hat{\sigma}^4 \lambda(p,q)^2 (1 + \alpha^* \sigma^{*2} \lambda(p,q)^2)}{\alpha^* (1 + \hat{\alpha} \hat{\sigma}^2 \lambda(p,q)^2)^2} \right) \quad (34)$$

式 (33) 及び式 (34) において $\hat{\alpha} = \alpha$, $\hat{\sigma} = \sigma$ が解の一つになっていることは容易に確かめられ, 原画像 f がひとつ与えられ, 加法的白色ガウス雑音 $\mathcal{N}[0, \sigma^{*2}]$ により劣化されるという前提のもとで, Sec.3 に与えられた「劣化画像 g から $\hat{\alpha}, \hat{\sigma}$ を推定するアルゴリズム」を適用した場合の統計的軌道を求めるアルゴリズムが以下のように与えられる.

周辺ゆわ度最大化の統計的軌道を推定するアルゴリズム

Step 1: Calculate the discrete Fourier transform $F(p, q)$ of the given standard image f by means of Eq. (29).

Step 2: Determine the value of α^* by means of Eq. (30).

Step 3: Set $r \leftarrow 0$, $c(0) \leftarrow 1$ and $d(0) \leftarrow 1$.

Step 4: Update $r \leftarrow r + 1$; and

$$c(r) \leftarrow \left(\frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \frac{d(r-1) \lambda(p,q)^2}{1 + c(r-1) d(r-1) \lambda(p,q)^2} - \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \left(\frac{1}{\alpha^*} \right) \times \left(\frac{(1 + \alpha^* \sigma^{*2} \lambda(p,q)^2)}{(1 + c(r-1) d(r-1) \lambda(p,q)^2)^2} \right) \right)^{-1}, \quad (35)$$

$$d(r) \leftarrow \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \left(\frac{d(r-1)}{1 + c(r-1) d(r-1) \lambda(p,q)^2} \right) - \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \left(\frac{c(r-1)^2 d(r-1)^2 \lambda(p,q)^2}{\alpha^*} \right) \times \left(\frac{(1 + \alpha^* \sigma^{*2} \lambda(p,q)^2)}{(1 + c(r-1) d(r-1) \lambda(p,q)^2)^2} \right). \quad (36)$$

Step 5: Update $\hat{\sigma} \leftarrow \sqrt{d(r)}$, $\hat{\alpha} \leftarrow c(r)$ and $R \leftarrow r$. Stop if it is satisfied that

$$\left| \frac{c(r) - c(r-1)}{c(r-1)} \right| + \left| \frac{d(r) - d(r-1)}{d(r-1)} \right| < 10^{-6}, \quad (37)$$

and go to Step 4 otherwise.

次に, 原画像 f とハイパパラメータ α, σ をひとつ固定した時に式 (22) により定義された画像 $h(\alpha, \sigma)$ の平均自乗誤差における統計平均量を次のように定義することにより導入する.

$$M(\alpha, \sigma) \equiv \int \int \left(\frac{1}{|\mathbf{L}|} \|z - h(g, \alpha, \sigma)\|^2 \right) \times \rho\{G = g | F = z, \sigma^*\} \rho\{F = z | \alpha^*\} dz dg \quad (38)$$

式 (4), 式 (6), 式 (22) を式 (38) の右辺に代入し, 式 (5), 式 (13) 及び式 (16) を用いることにより, オーバーラップの厳密な表式は次のように与えられる.

$$M(\alpha, \sigma) = \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \frac{\sigma^{*2}}{1 + \alpha^* \sigma^{*2} \lambda(p,q)^2} + \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \left(\frac{\sigma^{*2}}{(1 + \alpha^* \sigma^{*2} \lambda(p,q)^2)^2} - \frac{\sigma^2}{(1 + \alpha \sigma^2 \lambda(p,q)^2)^2} \right)^2 \quad (39)$$

この表式の右辺の第2項をみると $M(\alpha, \sigma)$ は $(\alpha, \sigma) = (\alpha^*, \sigma^*)$ において最大値を与えることは容易に確かめられる.

原画像 f がひとつ与えられ, 加法的白色ガウス雑音 $\mathcal{N}[0, \sigma^{*2}]$ により劣化されるという前提のもとで, 本論文で扱っている確率モデルを用いた画像修復の統計的性能を評価するアルゴリズムを次に与える.

原画像 f の統計的性能を評価するアルゴリズム

Step 1: Calculate the discrete Fourier transform $F(p, q)$ of the given standard image f by means of Eq. (29).

Step 2: Determine the value of α^* by means of Eq. (30).

Step 3: Calculate the quantity $M(\alpha^*, \sigma^*)$ as follows:

$$M(\alpha^*, \sigma^*) \leftarrow \frac{1}{|\mathbf{L}|} \sum_{(p,q) \in \mathbf{L}} \frac{\sigma^{*2}}{1 + \alpha^* \sigma^{*2} \lambda(p,q)^2}. \quad (40)$$

5. 数値実験

本節では, Sec.3. および Sec.4. で与えられたアルゴリズムについて Fig.1 に与えられた標準画

像を原画像 f としての数値実験を与える。

Fig.1 に与えられた原画像 f に対して加法的白色ガウス雑音 $\mathcal{N}[0, \sigma^{*2}]$ を用いて劣化した画像 g を Fig.2 に与える。Fig.2 では $\sigma^* = 30$ と設定している。この劣化画像 g に対して Sec.3. 与えた「劣化画像 g から $\hat{\sigma}, \hat{\alpha}$ を推定するアルゴリズム」を適用して得られた修復画像 $\hat{f}$ を Fig.3 に与える。加法的白色ガウス雑音 $\mathcal{N}[0, \sigma^{*2}]$ において様々の

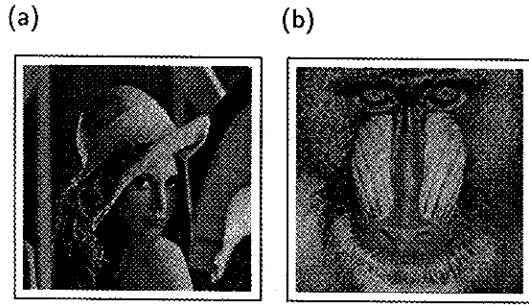


Fig. 1 Original images f . (a) "Lena." (b) "Mandrill."

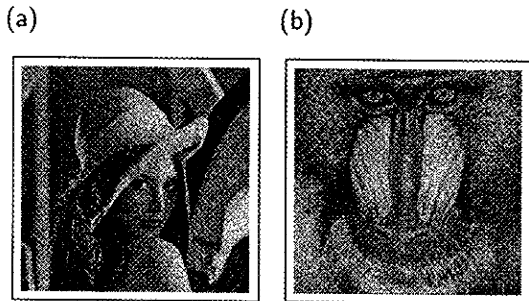


Fig. 2 Degraded images g produced from the original images f in Fig.1 by means of an additive white Gaussian noise $\mathcal{N}[0, \sigma^{*2}]$. (a) "Lena." (b) "Mandrill."

σ^* の値に設定した場合の修復画像 $\hat{f}$ における劣化画像 g との平均自乗誤差

$$\text{MSE}(f, \hat{f}) \equiv \frac{1}{|L|} \|f - \hat{f}\|^2,$$

と S/N 比における改善率を dB で表した量

$$\Delta_{\text{SNR}} \equiv 10 \log_{10} \left(\frac{\|f - g\|^2}{\|f - \hat{f}\|^2} \right) \text{ (dB)},$$

を Table 1 に与える。Fig. 1 に与えた原画像に対して加法的白色ガウス雑音 $\mathcal{N}[0, \sigma^{*2}]$ により劣化

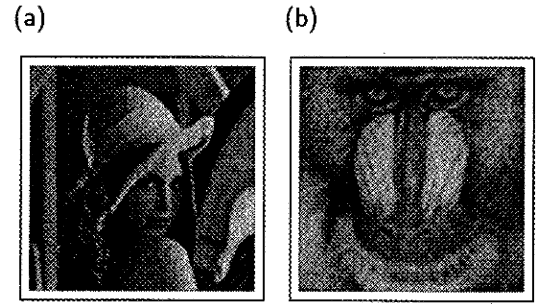


Fig. 3 Restored images $\hat{f}$ for the degraded images g given in Fig.2. (a) "Lena." (b) "Mandrill."

Table 1 Values of $\hat{\sigma}$, $\hat{\alpha}$, $\text{MSE}(f, \hat{f})$ and Δ_{SNR} (dB). (a) "Lena." (b) "Mandrill."

(a)

σ^*	$\hat{\sigma}$	$\hat{\alpha}$	$\text{MSE}(f, \hat{f})$	Δ_{SNR} (dB)
10	9.999	0.01337	48.78	2.74329
20	20.150	0.01756	113.27	5.15498
30	29.568	0.02232	171.97	6.77448
40	38.421	0.02753	228.75	7.89430
50	46.684	0.03338	287.09	8.66598

(b)

σ^*	$\hat{\sigma}$	$\hat{\alpha}$	$\text{MSE}(f, \hat{f})$	Δ_{SNR} (dB)
10	14.453	0.01039	107.55	-0.66986
20	24.488	0.02360	244.68	1.93908
30	33.777	0.04208	328.67	4.20370
40	42.762	0.06665	387.17	5.92869
50	51.223	0.10123	434.27	7.22548

された画像に対して Sec.3. で与えた「周辺ゆう度最大化アルゴリズム」を適用した場合に統計的にどの程度の性能を得ることができるか、すなわち数百回独立に $\mathcal{N}[0, \sigma^{*2}]$ により劣化画像を生成させたうえでそのたびに「周辺ゆう度最大化アルゴリズム」を用いて画像修復を行った場合に場合に平均的にどの程度の $\text{MSE}(f, \hat{f})$ を得ることができるか Sec.4. で与えた「統計的性能を評価するアルゴリズム」を用いて計算することができる。その結果を Table. 2 に与える。また、統計的にどのような軌道を通して $\hat{\sigma}$ と $\hat{\alpha}$ に収束するかは Sec.4 で与えた「周辺ゆう度最大化の統計的軌道を推定するアルゴリズム」を用いて計算することができる。その結果を Fig. 4 と Fig. 5 に与える。

Table 2 Values of $M(\sigma^*, \alpha^*)$ when the original image f is set to the standard images (a) "Lena" and (b) "Mandrill."

(a)

σ^*	α^*	$M(\sigma^*, \alpha^*)$
10	0.01242	49.98
20	0.01242	107.44
30	0.01242	159.53
40	0.01242	209.20
50	0.01242	257.61

(b)

σ^*	α^*	$M(\sigma^*, \alpha^*)$
10	0.00478	68.20
20	0.00478	167.64
30	0.00478	259.38
40	0.00478	345.23
50	0.00478	427.60

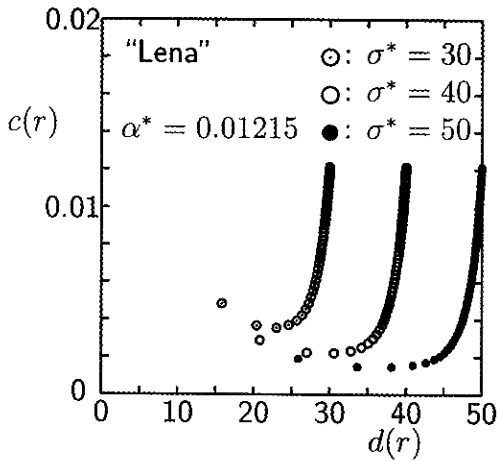


Fig. 4 The dynamical behaviors in the recursion formulas (35) and (36) when the standard images "Lena" are adopted as the original image f .

6. おわりに

本論文では解析的の取り扱いが可能なマルコフ確率場モデルの定式化を行い、周辺ゆう度最大化の枠組みのもとでハイパパラメータを推定する反復計算アルゴリズムを構成し、更にその統計的意味におけるいわゆる典型性能評価を与えるアルゴリズムを与えた。このことは数値実験を行うことなくアルゴリズムの性能評価を行うことが可能となることを意味する。もちろん取り扱う原画像が仮定している事前確率の高い確率を与える画像のひとつであることがその大前提となる。現実世界で

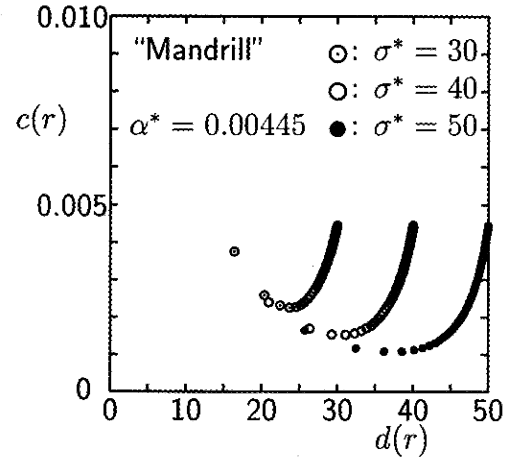


Fig. 5 The dynamical behaviors in the recursion formulas (35) and (36) when the standard images "Mandrill" are adopted as the original image f .

取り扱われる画像がある確率に従うと考えることには無理があるという考え方もあり、実際、式 (6) に従ってモンテカルロシミュレーションを行って、ある時 "Lena" の絵が現れると考える人はまずいないであろう。しかし、部分的なパターンをみるとそういうパターンがそのモンテカルロシミュレーションの途中で現れると考えることはできる。その意味で原画像が事前確率の高い確率を与える画像のひとつであると仮定しているわけである。

本論文で取り扱った式 (9) の意味での自己回帰モデルのような線形モデルを基礎にして解析的に取り扱うことの可能な確率場モデルを構成した。より現実的な画像を取り扱うマルコフ確率場モデルとして知られる結合ガウス・マルコフ確率場モデル^{1, 2)}などでは解析的な取り扱いが難しくなるため本論文の枠組みをそのまま適用することはできないが、式 (38) に与えられるような統計量を与える多くの近似解析手法が提案されている^{13, 14)}。最近、このような統計的性能評価は誤り訂正符号¹⁵⁾やCDMA 復調方式¹⁶⁾の性能評価など形で多くの研究成果が報告されている。画像処理においてその定式化における発展が今後期待される。

参考文献

- 1) R. Chellappa and A. Jain (eds), *Markov Random Fields: Theory and Applications*, Academic Press, New York (1993).
- 2) S. Z. Li, *Markov Random Field Modeling in Computer Vision*, Springer-Verlag, Tokyo (1995).
- 3) H. Derin, H. Elliott, R. Cristi and D. Geman, "Bayes smoothing algorithms for segmentation of binary images modeled by Markov random fields," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **6-6**, 707/720 (1984).
- 4) 田中和之, "統計力学的手法をもとにした画像修復," *日本物理学会誌*, **54-1**, 25/33 (1999).
- 5) 田中和之, "画像修復の情報統計物理," 特集/知識情報処理の統計力学のアプローチ, *数理科学*, **37-12**, 20/27 (1999).
- 6) Z. Zhou, R. M. Leahy and J. Qi, "Approximate maximum likelihood hyperparameter estimation for Gibbs priors," *IEEE Trans. Image Processing*, **6-6**, 844/861 (1997).
- 7) 田中和之, "画像修復に対する周辺ゆう度最大化によるハイパパラメータ推定のクラスタ変分法を用いた理論的検討," *電子情報通信学会論文誌 (A)*, **J83-A-10**, 1148/1160 (2000).
- 8) Kazuyuki Tanaka, "Maximum Marginal Likelihood Estimation and Constrained Optimization in Image Restoration," *Transactions of Japanese Society for Artificial Intelligence*, **16-2**, 246/258 (2001).
- 9) H. Nishimori and K. Y. M. Wong, "Statistical mechanics of image restoration and error-correcting codes," *Physical Review E*, **60-1**, 132/144 (1999).
- 10) J. Inoue and K. Tanaka, "Dynamics of the maximum likelihood hyper-parameter estimation in image restoration: Gradient descent versus expectation and maximization algorithm," *Physical Review E*, **64** (December 2001), in press.
- 11) K. Tanaka and J. Inoue, "Maximum Likelihood Hyperparameter Estimation for Solvable Markov Random Field Model in Image Restoration," *IEICE Trans. E-85D-3* (2002), to appear.
- 12) R. Molina, A. K. Katsaggelos and J. Mateos, "Bayesian and regularization methods for hyperparameter estimation in image restoration," *IEEE Trans. Image Processing*, **8-2**, 231/246 (1999).
- 13) 西森秀稔, "スピングラス理論と情報統計物理学," *新物理学選書*, 岩波書店 (1999).
- 14) H. Nishimori, *Introduction to the Physics of Information*, Oxford University Press, Cambridge (2001).
- 15) Y. Kabashima and D. Saad, "Statistical mechanics of error-correcting codes," *Europhysics Letters*, **45**, 97/103 (1999).
- 16) T. Tanaka, "Statistical mechanics of CDMA multiuser demodulation," *Europhysics Letters*, **54-4**, 540/546 (2001).