計測自動制御学会東北支部 第 203 回研究集会（2002.7.23）
資料番号 203-3

核理研 NKS 装置における磁場解析

Analysis of magnetic field in Neutral Kaon Spectrometer at LNS

○佐藤武志[†]，　遠藤周[†]，　佐々木厚[†]
○Takeshi Sato，Amane Endo，Atsushi Sasaki

秋田大学[†]
Akita University

キーワード：磁束密度（magnetic flux density），マクスウェル方程式（Maxwell's equations），線積分（a curvilinear integral），差分法（difference method），NKS 装置（Neutral Kaon Spectrometer）

連絡先：〒010-8502 秋田市手形学園町 1-1　秋田大学工学資源学部電気電子工学科　電気エネルギー工学講座　佐々木厚，Tel.：(018)889-2569，E-mail: sasaki@ed.phys.akita-u.ac.jp

1. はじめに

1-1. 知的営み

素粒子物理学では，これまでの様々な素粒子反応を通して素粒子の性質，素粒子の世界の法則および宇宙の性質などを見い出すことに成功してきた。現在もその実験は行われている。この分野における実験では，ある特定の粒子の反応や構造を調べる前提として，発生した粒子が何であるかを識別する。粒子の識別は観測された粒子の質量と電荷を知ることであり，それらは磁場の中での荷電粒子の運動解析によりわかる。磁場が一様である場合，荷電粒子は円運動もしくは螺旋運動をするのでその運動は解析的に解くことができる。しかし，磁場が一様でない場合は荷電粒子の運動は解析的に解くことができず，何らかの数値解法で求めなければならない。数値解法で求める場合は，解析的に解く場合よりも複雑であり誤差をともなう。このため，荷電粒子の運動解析には一様な磁場を発生させる装置が必要である。

荷電粒子の運動解析装置の一例として TAGX 運動量解析装置があり，この装置は 1987 年以来東京大学原子核研究所において数多くの素粒子実験に利用されてきた。現在は NKS 装置（中性 K 中間子測定装置）として東北大学原子核理学研究所への移設が進められている。ここで，NKS 装置は運動量解析装置全体を意味し，磁場発生装置はその装置の一部である（以降，磁場発生装置を NKS 装置と呼ぶことにする）。

1-2. NKS 装置について

NKS 装置は，図 1-1 のように軟鉄（以下ヨークと呼ぶことにする）で囲まれており，磁極およびコイルはヨークに支えられている。磁極はコイルに囲まれており，磁極の半径は

53.5cm，磁極と磁極の間の距離は 60cm である。磁場は，コイルに 500A の電流を流すことにより下側の磁極から上側の磁極へ向かって発生し，装置の中央に近似的に一様な磁場 5kG を作り出す。

1-3. 座標の定義

直交座標（x, y, z）と円筒座標（r, φ, z）を図 1-1 のように定義する。なお，それぞれの原点は装置の中央である。

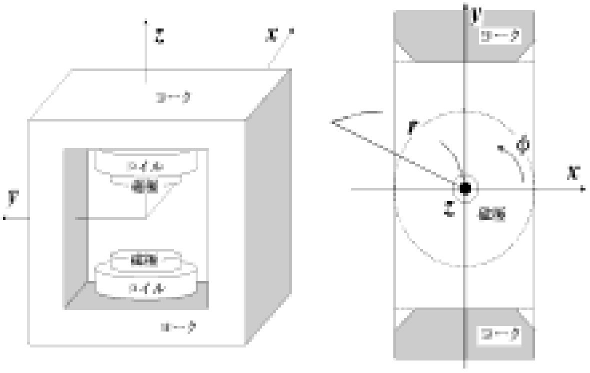

図 1-1　NKS 装置　概略図

左側が NKS 装置正面図，右側が上から見た図になる

1-4. 現状

NKS 装置内における磁束密度は，円筒座標において z 成分（B_z）しか測定されていない。これは，磁極の中心付近では B_z が卓越しており，荷電粒子の運動解析には磁極の中心付近を使うことに基づく。なお参考までに，z=0cm の水平面における B_z の様子を以下に示す。

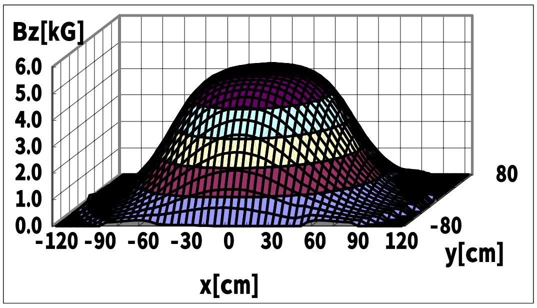

図 1-2　z=0cm の水平面における磁場 B_z の様子

磁場 B_z はホール素子を用いて，直交座標において以下のメッシュポイントで測定された。

$$\begin{cases} \cdot\ x：-120\sim120\text{cm までの 5cm 刻み} \\ \cdot\ y：-80\sim80\text{cm までの 5cm 刻み} \\ \cdot\ z：-30\sim30\text{cm までの 5cm 刻み} \end{cases} \qquad (1\text{-}1)$$

このメッシュポイントで測定されたデータは，1%以内の精度で Legendre 多項式 fitting され，さらにその多項式を用いて，円筒座標において以下のメッシュポイントで再現された[3]。

$$\begin{cases} \cdot\ r：0\sim120\text{cm までの 5cm 刻み} \\ \cdot\ \phi：-180\sim180°\text{までの 5° 刻み} \\ \cdot\ z：-25\sim25\text{cm までの 2.5cm 刻み} \end{cases} \qquad (1\text{-}2)$$

現在はこの円筒座標で再現された磁場データしか入手できない。そこで，(1-1)と(1-2)の重なる領域を磁場データの利用可能領域とする。

1-5. 研究のテーマ

本来存在すると思われる磁場の r 成分（B_r）と φ 成分（B_ϕ）については測定されていない。もし，B_r および B_ϕ を推計することができれば，機器の設計や荷電粒子の運動解析に応用できることが期待される。磁場の解析方法には解析的方法と数値解法があり，数値解法には差分法と数値積分を用いた方法や有限要素法といった方法が挙げられる。本研究では数値解法における差分法と数値積分を頼りに，Maxwell 方程式と既知の B_z をもとに各点における B_r および B_ϕ を求めることを試みた。

2. Maxwell 方程式の導入

B_r，B_ϕ を求めるにあたり，NKS 装置内は真空であるとみなす。その場合，Maxwell 方程式は

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad (2\text{-}1)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = 0 \qquad (2\text{-}2)$$

となる。円筒座標における磁束密度 B_r，B_ϕ，B_z はそれぞれ（r, φ, z）の関数なので，得られた(2-1)式と(2-2)式を円筒座標系で展開する。その結果，以下４つの式を得ることができる。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} - \frac{\partial B_\phi}{\partial z} = 0 \qquad (2\text{-}4)$$

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0 \qquad (2\text{-}5)$$

$$\frac{\partial(rB_\phi)}{\partial r}-\frac{\partial B_r}{\partial \phi}=0 \qquad (2\text{-}6)$$

これらの式が B_r と B_ϕ を求めるための条件式であり，その中でも(2-5)式を用いて B_r を，(2-4)式を用いて B_ϕ を求めることができると考えられる。また，仮に B_r と B_ϕ を求めることができた場合，4 つの条件式で活用していない式，すなわち(2-3)式と(2-6)式を用いて，求めた B_r と B_ϕ の値の妥当性を確認することができると考えられる。

3. 磁場 B_r の数値解析

3-1. (2-5)式の積分

(2-5)式をφと r を固定したまま z について 0 から z まで積分すると，

$$B_r(r,\phi,z)-B_r(r,\phi,0)=\int_0^z \frac{\partial B_z}{\partial r}dz \qquad (3\text{-}1)$$

となる。ここで，左辺第 2 項目の積分定数 $B_r(r,\phi,0)$ は，z=0cm の水平面における B_r の値を表す。図 3-1 のように z=0cm の水平面では，磁力線の接線の向きは鉛直上方であると考えることができるので，積分定数 $B_r(r,\phi,0)$ は 0kG である。このことから(3-1)式は

$$B_r(r,\phi,z)=\int_0^z \frac{\partial B_z}{\partial r}dz \qquad (3\text{-}2)$$

となる。

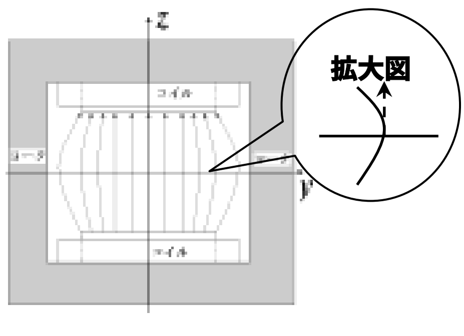

図 3-1　磁力線の予想図

装置の対称性から z＝0cm の水平面における磁力線の接線の向きは鉛直上方であると考えられる。

3-2. 線積分

φを固定した(3-2)式は，(r，z) 平面における任意の点の磁場 B_r を求める式であり，図 3-2 のように r 軸から任意の点までの z 方向の積分を意味する。

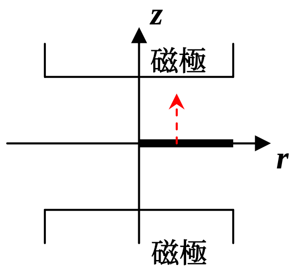

図 3-2　積分方向

NKS 装置の正面図であり，点線矢印の向きが(3-2)式の積分方向を表す。

この式を用いて以下の条件

$$\begin{cases} \cdot\ \phi \text{を固定} \\ \cdot\ r=0\sim120\text{cmまでの5cm刻み} \\ \cdot\ z=0\sim25\text{cmまでの2.5cm刻み} \end{cases} \qquad (3\text{-}3)$$

のもとで，各点における B_r を求めた。このときの処理手順と注意点は以下のとおりである。

[処理手順]
① φを固定
② (r，z) 平面において，さらに r を固定
③ φ，r を固定したうえで，z 方向のライン上の磁場 B_r を求める

[注意点]
積分は，各 r について独立に行うことから，磁場 B_r の r についての連続性を確認する必要がある。この確認については，数値積分結果のグラフをもとに判断する。

なお，(3-2)式における微係数 $\frac{\partial B_z}{\partial r}$ は，測定データ B_z をもとに差分法[2)]で計算し，数値積分 $\int_0^z \frac{\partial B_z}{\partial r}dz$ はシンプソンの公式[2)]を用いた。

3-3. 数値積分結果

3-2 の数値積分結果を図 3-3 に示す。B_r の連続性についてであるが，図 3-3 より，磁場 B_r は(r，z)平面で滑らかであることがわかる。したがって，r 方向についての磁場 B_r は，十分に連続であると考えて差し支えない。

次に B_r の値について述べる。z を固定したまま，r 方向に磁場の様子を見ていった場合，

z＝25cm における磁場の変化が最も激しい。そこで，そのときの磁場の様子を図 3-4 に示す。図 3-4 より，r が約 10cm までは B_r はほぼ 0kG である。しかし，15cm 付近から序々に B_r が現れ，磁極の縁（r=53.5cm）付近である r=60cm において B_r の絶対値が 3.6kG と最大となる。ここから r をさらに大きくして見ていくと，B_r の絶対値は小さくなっていくのがわかる。

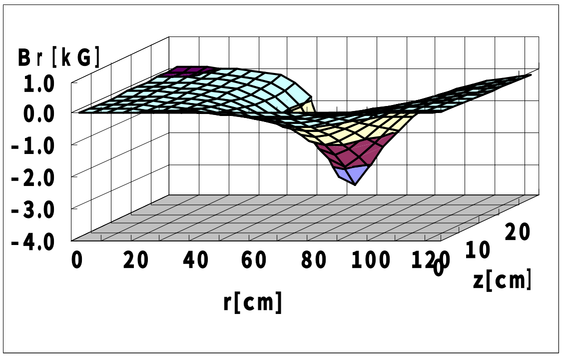

図 3-3　φ=0°における(3-2)式の数値積分結果

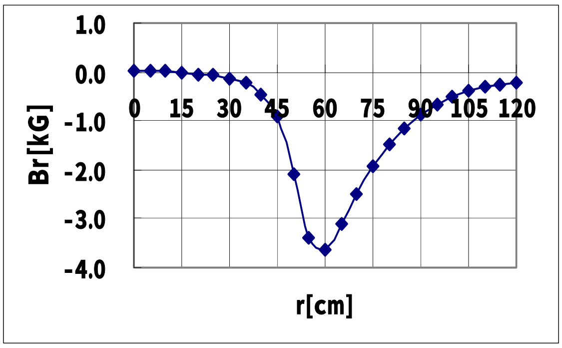

図 3-4　z=25cm のときの r と B_r の関係

数値積分結果の妥当性について考察する。図 3-1 より，z 軸付近では磁力線の向きは鉛直上方であることから，B_z しかないと考えることができる。すなわち B_r はないことが期待される。このことと 3-3 の結果を比較すると，図 3-4 より r が 10cm までは B_r はほぼ 0kG であることから，期待したとおりの結果が得られていると考えられる。また，NKS 装置より離れた場所，すなわち r＝120cm についても，B_r はほとんどないと考えられるため，B_r と B_z はともに 0kG であることが期待される。そこで，z=25cm，r＝120cm における B_r の値について調べたところ－0.22kG であり，最大の絶対値(r=60cm で 3.6kG)の約 6 %であることから，やはり期待した結果が得られている。

z 軸付近や半径が大きいところでは B_r はほぼ 0kG であったが，磁極の縁付近（r＝53.5cm）では磁力線は多く発生するので，B_r はそれなりに大きな値であることが予想される。図 3-3 および図 3-4 からもそのことを窺うことはでき，r＝60cm で z＝25cm における B_r の絶対値が最も大きい。そのときの値は約－3.6kG であるが，この値の妥当性については直接磁場 B_r を測定し，確かめる必要がある。また，この値が荷電粒子の運動解析にどう影響するかも確認する必要がある。

3-4. B_r の全体像

3-2 で行った計算をもとに，ここでは

$$\begin{cases} \cdot\ \phi\ :\ -180^\circ \sim 180^\circ \text{ までの } 5^\circ \text{刻み} \\ \cdot\ r\ :\ 0 \sim 120\,\text{cm までの} 5\,\text{cm刻み} \\ \cdot\ z\ :\ 0 \sim 25\,\text{cm までの} 2.5\,\text{cm刻み} \end{cases} \qquad (3\text{-}4)$$

の各点における B_r を求めた。このときの処理手順と注意点は以下のとおりである。

[処理手順]

① φを－180°に固定

② (r，z)平面において，さらに r を固定

③ φ，r を固定したうえで，z 方向のライン上の磁場 B_r を求める

④ φを 5°刻みで変え，φが 180°になるまで①から③を繰り返す

[注意点]

異なったφについて，各 r-z 平面で独立に磁場 B_r を求めている。したがって，各 r-z 平面における B_r の整合性について検討する必要がある。この確認については，次の 3 点

1. 変数φについての，B_r の連続性
2. 変数φについての，$\dfrac{\partial B_r}{\partial \phi}$ の連続性
3. (2-3)式と(2-6)式を満たすかどうか

を見るとよい。

[注意点の確認]

1 と 2 については，グラフで B_r および $\dfrac{\partial B_r}{\partial \phi}$ の様子を見て，滑らかであることを確認する。1 と 2 についてはこのセクションで，3 については第 5 章で確認する。なお，今回の場合は面と面との整合性についての確認であり，ラインとラインとの整合性については，3-2 と 3-3 で述べた。

このときの結果を図 3-5，3-6 に直交座標

$$\begin{cases} \cdot\ x：-120 \sim 120\,\mathrm{cm}\ までの5\mathrm{cm}刻み \\ \cdot\ y：-80 \sim 80\,\mathrm{cm}\ までの5\mathrm{cm}刻み \end{cases} \quad (3\text{-}5)$$

で示す。なお，各点における B_r は 3 次元内挿法で求めた。図 3-5，3-6 より，z=15cm でかつ磁極の縁付近（r=53.5cm）における B_r の絶対値は約 1.6kG であり，z=25cm でかつ磁極の縁付近では φ=0°で 3.6kG，φ=90°で 4.3kG と最も大きな値であった。

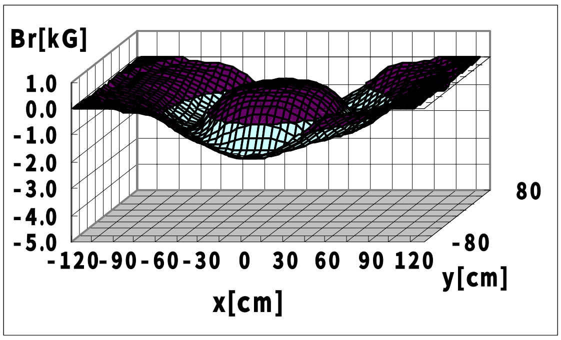

図 3-5　z＝15cm の水平面における B_r の様子

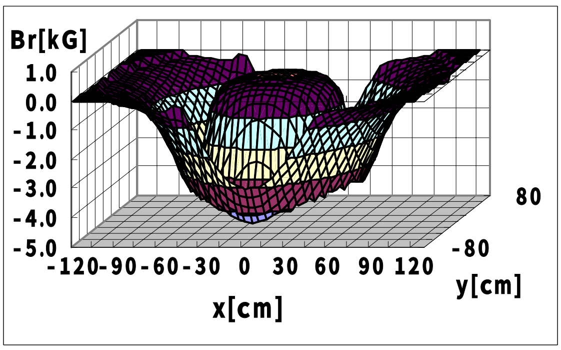

図 3-6　z＝25cm の水平面における B_r の様子

異なった r-z 平面における B_r の整合性を確認する。z=25cm の場合（図 3-6）が最も B_r の変化が激しく，その絶対値は r=60cm で最も大きい。そこで，主に z=25cm，r=60 と 80cm のときの，(φ，B_r)，(φ，$\dfrac{\partial B_r}{\partial \phi}$)の様子を見ることにする。その様子が図 3-7 と図 3-8 である。図 3-7 を見る限りでは，磁場 B_r の様子はほぼ滑らかであることがわかる。したがって，B_r は変数φについて連続であるといえる。また，$\dfrac{\partial B_r}{\partial \phi}$ についても図 3-8 より全体的に滑らかではあるが，r=80cm，φ=±120°付近では多少凹凸が激しい。このことから，その付近では磁場 B_r の信頼性が薄い可能性がある。結論として，多少滑らかでないところがあるものの，全体的には磁場 B_r はφ方向で連続であると考えて差し支えない。以上の考察より，求めた磁場 B_r は妥当であると考えられる。

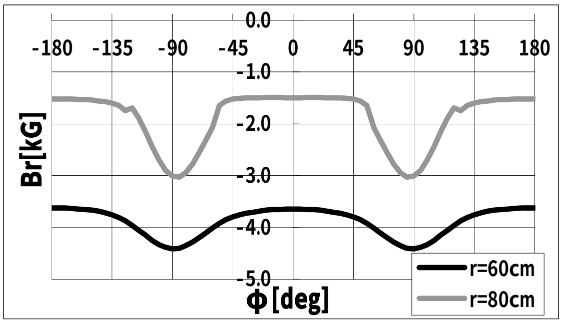

図 3-7　z＝25cm のときのφと B_r の関係

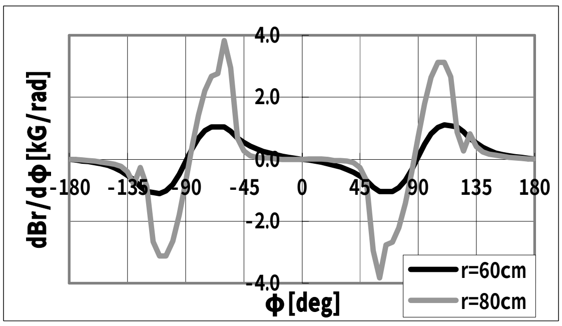

図 3-8　z＝25cm のときのφと $\dfrac{\partial B_r}{\partial \phi}$ の関係

3-5. 磁極の中心付近の B_r

z=25cm の場合が最も B_r の変化が激しい。そこで，この場合について述べる。図 3-9 は図 3-6 における x 軸上の B_r の様子である。

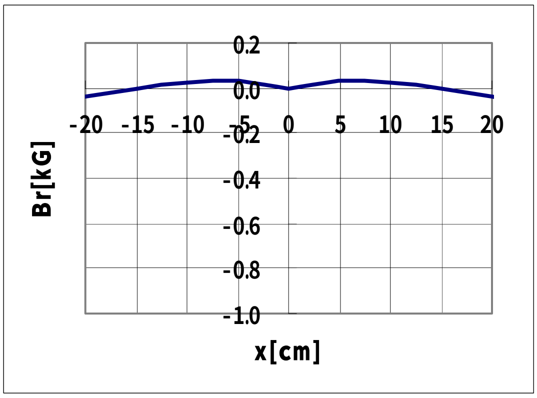

図 3-9　図 3-6 における x=0cm 付近の拡大図

図 3-9 より，x 軸上では，±20cm 付近までは B_r はほぼ 0kG であることがわかる。念のため，その範囲内における B_r の絶対値の最大値を調べた。その結果，x=－20cm で B_r の絶対値が最大であり，そのときの値が－0.042kG であった。この付近では，B_z の値は約 5kG であることを考慮すると，0.042kG はその 0.8% に過ぎない。このことと，B_r はほぼ同心円状に広がっていることを考慮すると，半径 20cm までは，磁場 B_r を無視することができると考えて差し支えない。

3-6. 磁力線の様子

求めた B_r と B_z をもとに磁力線の様子を作図する。B_ϕ を考慮しない場合，磁力線の向きは B_r と B_z の対角線方向となるので微係数 $\frac{dr}{dz}$ を

$$\frac{dr}{dz}=\frac{B_r}{B_z} \tag{3-6}$$

（ただし，r は z の関数）

と定義する。今，任意の点における B_r，B_z が 3 次元内挿法により求めることができるので，(3-6)式における微係数 $\frac{dr}{dz}$ の値も任意の点で求めることができる。常微分方程式を数値的に解く方法として 4 次の Runge-Kutta 法 [1,2] があり，ここでは出発点（r，z）を定め z を微小にずらしながら，そのときの r を逐次的に求めていった。その結果を図 3-10 に示す。

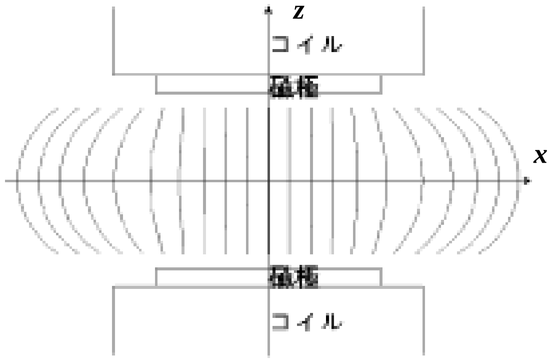

図 3-10　xz 平面(x 軸上)における磁力線の様子

図 3-10 は，z=－25cm で r を 10cm 刻みで変えながら磁力線を出発していった図である。この図を見ると，z 軸付近では磁力線は鉛直上方であるが，そこから離れるにしたがって磁力線は弧を描いているのがわかる。このことから，z 軸付近では B_z しかないと考えてよいが，それ以外のところでは，もはや B_z しかないと考えることはできない。

4. 磁場 B_ϕ の数値解析

第 3 章では磁場 B_r についての数値解析を行ったが，磁場 B_ϕ の数値解析についても基本的な考え方は第 3 章とほぼ同じである。そこで，ここでは主に磁場 B_ϕ の数値解析結果を重点に置くことにする。

4-1. (2-4)式の積分

(2-4)式を r と φ を固定したまま z について 0 から z まで積分すると，

$$B_\phi(r,\phi,z)-B_\phi(r,\phi,0)=\frac{1}{r}\cdot\int_0^z\frac{\partial B_z}{\partial\phi}dz \tag{4-1}$$

となる。ここで，左辺第 2 項目の積分定数 $B_\phi(r,\phi,0)$ は，z=0cm の水平面における B_ϕ の値を表す。しかし，3-1 で考えたように，z=0cm の水平面における磁力線の接線の向きは鉛直上方であることから，やはり B_z しか存在しないと考えることができる。したがって，$B_\phi(r,\phi,0)$ は 0kG となるので，(4-1)式は

$$B_\phi(r,\phi,z)=\frac{1}{r}\cdot\int_0^z\frac{\partial B_z}{\partial\phi}dz \tag{4-2}$$

となる。なお，(4-2)式を用いて磁場 B_ϕ を求める場合，r=0cm における磁場 B_ϕ を求めることができない。そこで，z 軸上における磁力線の向きは完全に鉛直上方であることから，

$$B_\phi(0,\phi,z)=0 \qquad (4\text{-}3)$$

とする。

4-2. 線積分

r を固定した(4-2)式は，（φ，z）平面における任意の点の磁場 B_ϕ を求める式であり，図 3-2 のようにφ軸から任意の点までの z 方向の積分を意味する。この式を用いて

$$\begin{cases} \cdot\ r=5\text{cm と }80\text{cm} \\ \cdot\ \phi=-180\sim180°\text{までの}5°\text{刻み} \\ \cdot\ z=0\sim25\text{cm までの}2.5\text{cm 刻み} \end{cases} \qquad (4\text{-}4)$$

の各点における B_ϕ を求めた。なお，(4-2)式における微係数および数値積分については 3-2 と同様である。

4-3. 数値積分結果

4-2 の数値積分結果を以下に示す。

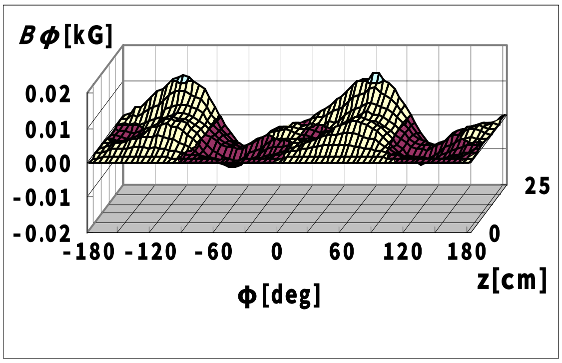

図 4-1　r＝5cm における B_ϕ の数値積分結果

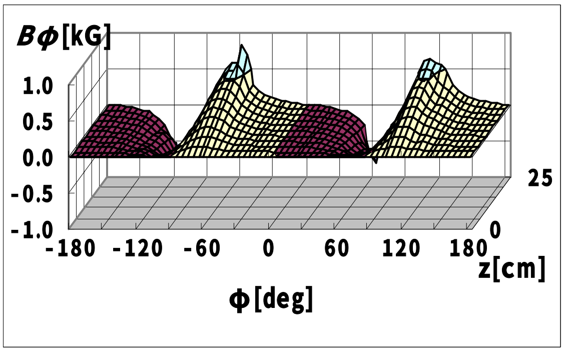

図 4-2　r＝80cm における B_ϕ の数値積分結果

B_ϕ の連続性についてであるが，これらの図より，磁場 B_r は(φ，z)平面でほぼ滑らかであることがわかる。したがって，φ方向についての磁場 B_ϕ は，十分に連続であると考えて差し支えない。

次に B_ϕ の値について述べる。図 4-1 と 4-2 において，z を固定したままφ方向に磁場の様子を見ていった場合，r=80cm，z＝25cm における磁場の変化が最も激しい。そこで，そのときの磁場の様子を図 4-3 に示す。この図からφ=0°，±180°，±90°における B_ϕ の値はほぼ 0kG であることがわかる。また，B_ϕ の絶対値はφ=±60°で最も大きく約 0.8kG である。

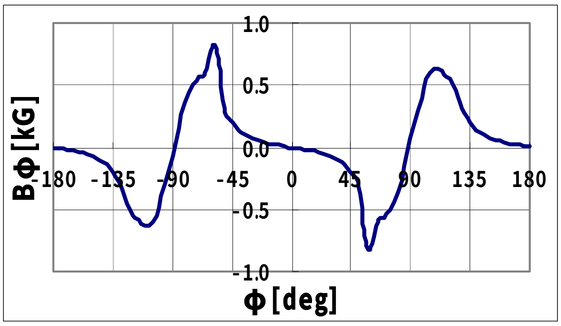

図 4-3　φと B_ϕ の関係（r＝80，z=25cm）

数値積分結果の妥当性について考察する。図 4-1 は，r=5cm のときの(φ，z)平面における磁場 B_ϕ の様子であることから，z 軸付近の磁場の様子を表している。その付近では，磁力線はほぼ鉛直上方であることから，磁場は B_z しか存在しないと考えることができる。したがって，B_ϕ はほぼ 0kG であることが期待される。図 4-1 を見ると，磁場 B_ϕ は最大で 0.02kG である。この値は，5kG に比べて非常に小さな値であることからほぼ 0kG であると考えてよく，期待した結果が得られている。次に，図 4-2，4-3 について検討する。装置の対称性を考慮すると，φ=0°，180°，±90°における磁場 B_ϕ は，r および z の値によらずにすべて 0kG であることが予想される。図 4-3 は磁場 B_ϕ の変化が最も激しいところであるが，そのときのφ=0°，±90°，±180°における磁場 B_ϕ の値はほぼ 0kG であることから期待した結果が得られている。しかし，図 4-3

における，φ=±60°付近すなわちヨークの角付近の B_ϕ の絶対値が最大であることとその値の妥当性については，B_r のときと同様に直接磁場 B_ϕ を測定し確かめる必要がある。また，この値が荷電粒子の運動解析にどう影響するかも確認する必要がある。

4-4. B_ϕ の全体像

4-2 で解析した方法をもとに，ここでは

$$\begin{cases} \cdot\ r\ ：\ 5\text{〜}120\,\text{cm までの} 5\,\text{cm 刻み} \\ \cdot\ \phi\ ：\ -180°\text{〜}180°\ \text{までの}\ 5°\text{刻み} \\ \cdot\ z\ ：\ 0\text{〜}25\,\text{cm までの} 2.5\,\text{cm 刻み} \end{cases} \quad (4\text{-}5)$$

の各点における B_ϕ を求めた。このときの結果を図 4-4，4-5 に直交座標で示す。なお，各点における B_ϕ は 3 次元内挿法で求めた。

図 4-4，4-5 を見ると，第 1，第 2，第 3，第 4 象限における B_ϕ の値は，それぞれ負，正，負，正となっている。これは，磁力線がリターンヨークを避けているためと考えられる。また，磁場 B_ϕ の絶対値については，z=15cm でかつヨーク付近では約 0.5kG であり，z=25cm では約 1.0kG と B_ϕ の中で最も大きな値であった。

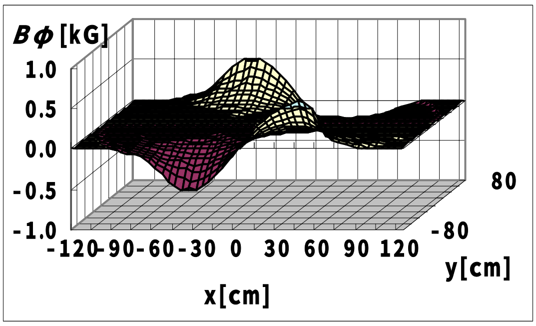

図 4-4　z＝15cm の水平面における B_ϕ の様子

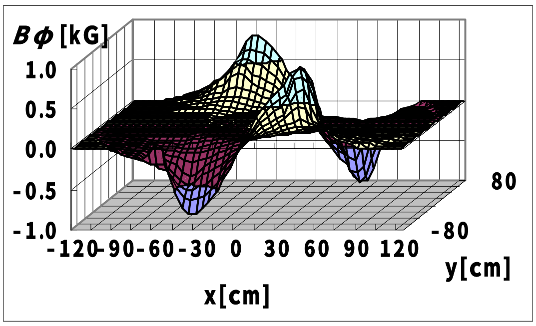

図 4-5　z＝25cm の水平面における B_ϕ の様子

異なったφ-z 平面間における B_ϕ の整合性を確認するために，r 方向で B_ϕ と $\dfrac{\partial B_\phi}{\partial r}$ が連続かどうかをグラフで確認する。z=25cm の場合（図 4-5）が最も B_ϕ の変化が激しく，その絶対値を考えた場合，第 1，第 2，第 3，第 4 象限はどれも似た様子になると考えられるので，以下のメッシュポイント（第 1 象限）

$$\begin{cases} \cdot\ r\ ：\ 0\text{〜}80\,\text{cm までの} 5\,\text{cm 刻み} \\ \cdot\ \phi\ ：0\ \text{〜}90°\ \text{までの}\ 30°\text{刻み} \\ \cdot\ z\ ：\ 25\,\text{cm} \end{cases} \quad (4\text{-}6)$$

の$(r,\ B_\phi)$, $(r,\ \dfrac{\partial B_\phi}{\partial r})$の様子を見ることにする。

その様子が図 4-6 と図 4-7 である。図 4-6 を見る限りでは，磁場 B_ϕ の様子はほぼ滑らかであることがわかる。したがって，B_r は変数φについて連続であるといえる。また，$\dfrac{\partial B_\phi}{\partial r}$ についても図 4-7 より全体的に滑らかであることがわかる。以上の検討より，求めた磁場 B_ϕ は妥当であると考えられる。

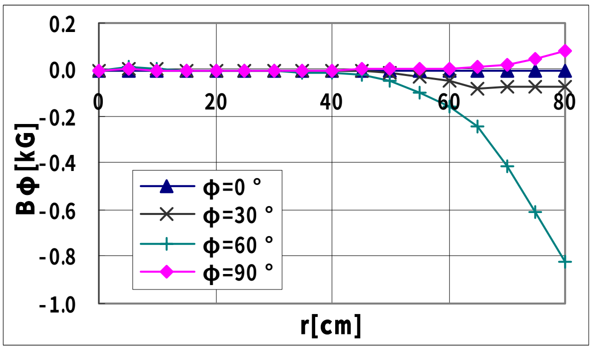

図 4-6　z=25cm のときの r と B_ϕ の関係

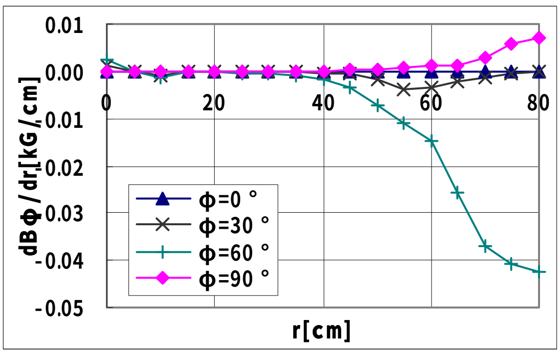

図 4-7　z=25cm のときの r と $\dfrac{\partial B_\phi}{\partial r}$ の関係

4-5. 磁極の中心付近における B_ϕ

図 4-6 より，r=20cm 付近までは，どのφについても磁場 B_ϕはほぼ 0kG であることがわかる。念のため，その範囲内における B_ϕの絶対値の最大値を調べた。その結果，r=5cm，φ=60°における B_ϕの絶対値が最大であり，0.012kG であった。この値は，磁極の中心付近では B_z の値が約 5kG であることから，その 0.2%に過ぎない。したがって，半径 20cm までは，磁場 B_ϕを無視することができると考えて差し支えない。

5. B_r と B_ϕの妥当性について

Maxwell 方程式より得ることができる 4 つの条件式のうち，(2-5)式と線積分を活用して B_rを，(2-4)式と線積分を活用して B_ϕ を求めた。その際，求めた B_r と B_ϕ の妥当性および整合性については，物理的考察によりほぼ妥当であると判断した。しかしなお，数値的に求めた B_r と B_ϕ および実測データ B_z は，各点において Maxwell 方程式を満たさなければならない。そこで，第 3 章で求めた B_r と 4 章で求めた B_ϕ および既知の B_z を用いて，(2-3)式と(2-6)式を満たすどうかの検討を行う。なお，これらの検討は磁場データの利用可能領域すべてについて行うのではなく，その領域よりも若干狭い領域

$$\begin{cases} \cdot\, r：0\sim 80\text{cmまで} \\ \cdot\, \phi：-180\sim 180°\text{まで} \\ \cdot\, z：-25\sim 25\ \text{cmまで} \end{cases} \tag{5-1}$$

で検討する。これは磁場の有効な領域を十分に網羅しているので問題はない。

5-1. (2-6)式の計算

(2-6)式において，$r\cdot B_\phi$ を P とおき，さらにφと z を固定したまま r について 0 から r まで積分すると，

$$P(r,\phi,z)-P(0,\phi,z)=\int_0^r \frac{\partial B_r}{\partial \phi}dr \tag{5-2}$$

となる。上式における第 2 項目の積分定数は z 軸上における P の値を表すが，z 軸上では磁力線は鉛直上方であることから 0 と考えてよい。このことを踏まえ(5-2)式の両辺を r で割ると

$$\frac{P(r,\phi,z)}{r}=\frac{1}{r}\cdot\int_0^r \frac{\partial B_r}{\partial \phi}dr \tag{5-3}$$

となる。上式を用いて求めた P/r（$=B_\phi$）と 4 章で求めた B_ϕ を比較することが，(2-3)式を満たすかどうかにの検討になると考えられる。そこで，(5-3)式の数値積分によって得た P/r の値と 4 章で求めた B_ϕを比較したところ，両者の差が最も大きいところは r=65cm，φ=-60°，z=25cm の場所であった。そのときの結果を以下に示す。

表 5-1　差 $P/r-B_\phi$および相対誤差

P/r	0.264kG
B_ϕ	0.241kG
$P/r-B_\phi$	0.023kG
相対誤差	9.5%

このことから，第 3 章と 4 章で得られた B_r と B_ϕは，10%以内の精度で(2-6)式を満たしていると考えられる。

5-2. div$\vec{B}$ の様子

(2-3)式を満たすどうかを確認するにあたり，z=25cm の平面における x 軸上および y 軸上の div$\vec{B}$ の変化を調べた。その結果を以下に示す。

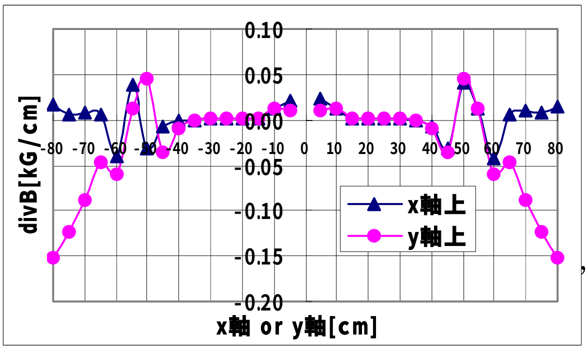

図 5-1　x 軸上と y 軸上における div$\vec{B}$ の様子

この図から，中心から 40cm 程度までは x 軸上 y 軸上ともに div$\vec{B}$ の値はほぼゼロであるが，それ以外のところでは揺らいでいる。このことから，磁極の外側では求めた磁場 B_r および

B_Φの信頼性が薄い可能性がある。

5-3. div$\vec{B}$ の値についての検討

div$\vec{B}$ の値を 0 とみなしてよいかどうかの判断は困難な作業である。そこで，(2-3)式の左辺第 3 項目を右辺に移項する。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi}=-\frac{\partial B_z}{\partial z} \qquad (5\text{-}4)$$

上式の右辺は実験データから直接計算でき，左辺は第 3 章と 4 章の数値積分の値を用いて計算できる量である。div$\vec{B}$ が 0 であるかどうかの確認は，(5-4)式の左辺と右辺の値が等しいかどうかを見ることと同じであり，その場合右辺の値を，相対誤差を求めるための基準値として取り扱うことが適当である。相対誤差を求める場合，(5-4)式の左辺の値から右辺の値を引き，その値を右辺の値で割ることになる。ここで，左辺の値から右辺の値を引いたものはdiv$\vec{B}$ そのものであり，相対誤差の目安を求める式は，

$$相対誤差=\left|\mathrm{div}\vec{B}\right|\div\left|-\frac{\partial B_z}{\partial z}\right| \qquad (5\text{-}5)$$

となる。 (5-5)式の右辺を図 5-1 の各点において計算したところ，x 軸上と y 軸上の 40cm および 50cm の点ではともに 11%および 12%であり， r=60cm 以降の x 軸上では 17%，y 軸上では 70%であった。このことから，磁極内では 12%以内の精度で(2-3)式を満足していると考えられる。しかし，磁極の外側でかつ電磁石のヨークがある方向については，相対誤差の値が大きいことから数値計算の精度が落ちている可能性がある。

6. 結論

Maxwell 方程式と既知の B_z および差分法と数値積分を頼りに, 各点における B_r と B_Φを求めることができた。その結果 r=20cm 以内では，B_r，B_Φはともにほぼ 0kG であることがわかった。このことから，磁極の中心付近における荷電粒子の運動解析は，B_r と B_Φの影響を無視してもかまわないことが期待される。しかし, z=25cm でかつ磁極の縁付近では, NKS 装置において微小な値であると取り扱ってきた B_r の絶対値は, 3.6〜4.3kG という比較的大きな値であることがわかった。この値の妥当性については第 5 章で検討したが，やはり実際に測定し一致するかどうかを確認することが望ましい。また，B_Φの絶対値は z=25cm でかつヨークの角付近が最も大きく，約 1.0kG という比較的無視しえない値であった。このことから，B_Φついても B_r と同様に実測が必要であると考えられるが, B_r と B_Φの実測を考えた場合，B_r の実測を優先するべきである。

今回は差分法と数値積分をもとに磁場の解析を検討したが，他の解析法として有限要素法が挙げられる。この方法は現在最も広い分野に利用されている数値解析法であり，この方法を活用して磁場の解析を再検討する。

謝辞

東北大学理学部の橋本治教授をはじめ，中性 K 中間子光発生反応研究所のグループの皆様に磁場データを提供していただいたことを，深く感謝いたします。

参考文献

1) 戸川隼人：UNIX ワークステーションによる科学技術計算ハンドブック，サイエンス社（1992-10）
2) William H.Press，Saul A. Teukolsky，William T. Vetterling，Brian P. Flannery：NUMERICAL RECIPES in C（日本語版），技術評論社（1993-6）
3) K. Maruyama et. al：The large acceptance spectrometer TAGX for photoreaction studies at 1.3Gev electron synchrotron, Nucl. Instr. Meth. in Phys. R. vol. A376, No3, 335/355