計測自動制御学会東北支部 第204回研究集会 (2002.10.12)
資料番号 204-13

多様体論による非線形系の厳密線形化

The Strict Linearization for Nonlinear System by the Manifold Theory

○馬永傑*，大久保　重範**，及川　一美***，高橋　達也†

○Yongjie Ma*, Shigenori Okubo**,
Kazumi Oikawa***, Tatsuya Takahashi†

*山形大学

*Yamagata University

キーワード： 多様体論 (manifold theory)，非線形システム (nonlinear system)，厳密線形化 (strict linearization)

連絡先： 〒992-8510　山形県米沢市城南4-3-16 山形大学 工学部 機械システム工学科 大久保研究室
馬永傑，Tel: (0238)26-3245，Fax: (0238)26-3245，E-mail: mayongjie10jp@yahoo.co.jp

1. はじめに

非線形システム理論がまだ確立されてない今、あるシステムを設計するとき、線形制御理論を用いるために、まず、そのシステムに対して線形化を行う必要がある。従来の近似線形化は平衡点の近くでしか作用できない。その後、1つの工夫として、非線形システムの幅広い範囲での線形化を可能にしたのが厳密線形化である。

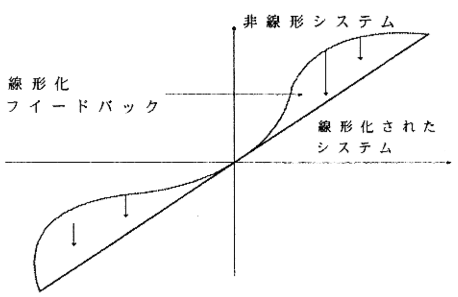

Fig. 1　非線形フィードバックと座標変換を用いた線形化のイメージ

2. 一入力非線形系の厳密線形化

まず,従来1入力非線形系の厳密線形化を調べる.

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$

において$x \in R^n, f(x) \in R^n, g(x) \in R^n$とする。状態方程式(1)に対して原点の近傍$V$が存在して$V$上で可制御線形状態方程式とフィ-ドバック等価であるための必要十分条件はつぎの二つの条件を満たす原点の近傍$\bar{V}$が存在することである。

1) $\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \cdots, ad_f^{n-1} g\}(x)$ がすべての$x \in V$において線形独立であり,

2) $\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \cdots, ad_f^{n-2} g\}(x)$ がV上で*Involutive*である。これら二つの条件が満たされるとき,フロベニウスの定理により,原点の近傍V と$\bar{V}$上で

$$L_{ad_f^i g}\phi(x) \quad = \quad 0, i = 0, 1, \cdots, (n-2) \tag{2}$$

$$L_{ad_f^{n-1}g}\phi(x) \neq 0 \tag{3}$$

を満たす c^∞ 関数 $\phi(x)$ が存在する。この $\phi(x)$ を用いてシステムを線形化する座標変換とフィ-ドバックの $P(x)$ は

$$\xi = P(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ L_f^1\phi(x) \\ L_f^2\phi(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}\phi(x) \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} u &= \alpha(x) + \beta(x)v \\ &= \frac{v - L_f^n\phi(x)}{L_g L_f^{n-1}\phi(x)} \end{aligned} \tag{5}$$

で与えられる。このとき,つぎの可制御線形状態方程式に変換することができる。

$$\frac{d\xi}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} v \tag{6}$$

上記の演算でリー積は

$$[f, g] = (\frac{\partial g}{\partial x^T})f - (\frac{\partial f}{\partial x^T})g \tag{7}$$

$$ad_f^{i+1}g = [f, ad_f^i g] \tag{8}$$

$$ad_f^0 g = g \tag{9}$$

で定義される。また,リー微分は

$$L_f\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^T} f \tag{10}$$

$$L_f^{i+1}\phi = L_f(L_f^i\phi) \tag{11}$$

$$L_f^0\phi = \phi \tag{12}$$

で定義される。この線形化されたシステムに対して線形制御理論を用いてコントローラを設計できる。例え、状態フィードバックが線形化されたシステムを安定化するならば、その線形化された状態方程式に基礎ついて設計されたコントローラも元のシステムを安定化する。

3. 多項式非線形系の厳密線形化

制御対象は多項式からなる非線形系とし、次のように記述しよう.

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{N} A_{[1,k]} x^{[k]} + bu \tag{13}$$

x は状態ベクトル,u は制御入力ベクトルであり,各次元は $x \in R^n$,$u \in R^m$ とする.$x^{[k]}$ は x のクロネッカー巾であり,係数行列 $A_{[1,k]}$ は $[1,k]$ 型共変対称テンソルの係数の性質を有する. (1) と (13) を対応させれば

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} A_{[1,k]} x^{[k]}, g(x) = b \tag{14}$$

となる。まず厳密線形化の条件 1) について考察する。そのためにまず $ad_f^i g$ の内容を調べる。

$$adf^0 g = g = b \tag{15}$$

$$\begin{aligned} ad_f^1 g &= [f, b] = (\frac{\partial b}{\partial x^T})f - (\frac{\partial f}{\partial x^T})b = -(\frac{\partial f}{\partial x^T})b \\ &= -\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x^T}(A_{[1,k]}x^{[k]})b \\ &= \sum_{k=0}^{N} A_{[1,k]}^{(1)} x^{[k]} \end{aligned} \tag{16}$$

とおくことにする。一般的に

$$ad_f^i g = \sum_{k=0}^{N_i} A_{[1,k]}^{(i)} x^{[k]} \tag{17}$$

とおくことができる。係数行列 $A_{[1,k]}^{(i)}$ を漸化的に求めるアルコリズムを調べる。

$$\begin{aligned} ad_f^{i+1} g &= [f, ad_f^i g] \\ &= \frac{\partial (ad_f^i g)}{\partial x^T} f - (\frac{\partial f}{\partial x^T}) ad_f^i g \\ &= \sum_{k=0}^{N_{i+1}} A_{[1,k]}^{(i+1)} x^{[k]} \end{aligned} \tag{18}$$

係数行列を $A_{[1,k]}^{(i)}$ を求めると

$$N_{i+1} = N_i + (N-1) \tag{19}$$

によって

$$A_{[1,k]}^{(i+1)} = \sum_{k_1=0}^{N_i}[A_{[1,k-k_1+1]}^{(i)}(A_{[1,k_1]})^{\{k-k_1+1\}} - \sum_{k_1=0}^{N_i} A_{[1,k_1]}(A_{[1k,-k_1+1]}^{(i)})^{\{k_1\}}] \quad (20)$$

となる。条件1)の内容は$\{ad_f^0g,ad_f^1g,ad_f^2g,\cdots,ad_f^{n-1}g\}$がすべての$x\in V$において線形独立であるから,

$$\rho(x) = \mid ad_f^0g, ad_f^1g, ad_f^2g, \cdots, ad_f^{n-1}g \mid \quad (21)$$

と定義した場合,$\rho(x)\neq 0,x\in\bar{V}$であることを意味する。$\bar{v}$を全空間$\Omega$にとった場合，$\rho$の次数$N_\rho$を偶数であるものとしてこれを多項式系の場合に使えば

$$\rho(x) = \sum_{k=0}^{N_\rho} Z_{[0,k]}^T x^{[k]} \quad (22)$$

と書ける。そして定数項$Z_{[0,0]}^T = Z_{[0,0]}$を使い,

$$\bar{\rho}(x) = \rho_{[0,0]}Z(x) = \sum_{k=0}^{2M}\bar{Z}_{[0,k]}^T x^{[k]} \quad (23)$$

を定義する。$x\in\Omega$で$\bar{\rho}(x)>0$であるこの条件を満たす$Z_{[0,k]}$を求めるため,次のように変形するとき、$k=2r,(2r-1)$の場合,

$$\bar{Z}_{[0,2r]}^T x^{[r]} = x^{T[r]}p_{[r,r]}x^{[r]} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{[0,2r-1]}x^{[2r-1]} &= 2x^{T[r-1]}p_{[r-1,r]}x^{[r]} \\ &= 2x^{T[r]}p_{[r,r-1]}x^{[r-1]} \quad (25)\end{aligned}$$

を満たす完全対称テンソルの要素からなる荷重行列$p_{[r,r]},p_{[r,r-1]}$が存在して$p_{[r,r-1]} = p_{[r-1,r]}^T$をみたす。そして$\bar{Z}(x)$はつぎのような行ベクトル系に書ける。

$$\bar{Z}(x) = [1, x^T, x^{T[2]}, \cdots, x^{T[M]}] \quad (26)$$

ここで

$$P_{G[M,M]} = \begin{bmatrix} p_{[0,0]} & p_{[0,1]} & & 0 \\ p_{[0,1]} & p_{[1,1]} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & p_{[M-1]} \\ 0 & & p_{[M-1,M]} & p_{[M,M]} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$G^{[0,M]}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ \vdots \\ x_{[M]} \end{bmatrix} \quad (28)$$

とすれば

$$\begin{aligned}\bar{Z}(x) &= G^{T[0,M]}(x)P_{G[M,M]}G^{[0,M]}(x) \quad (29) \\ &= G^{T<0,M>}(x)P_{G<M,M>}G^{<0,M>}(x)\end{aligned}$$

となる。$P_{G<M,M>}$は$P_{G[M,M]}$の縮約形,$G^{T<0,M>}$は$G^{T[0,M]}$の縮約形である。$\bar{Z}(x)>0,x\in\Omega$の十分条件は$P_{G<M,M>}>0$となる。

つぎに*Involutive*の条件について調べる。

$\{ad_f^0g,ad_f^1g,ad_f^2g,\cdots,ad_f^{n-2}g\}$が*Involutive*とは

$$[ad_f^ig, ad_f^jg] \in span\{ad_f^0g, ad_f^1g, \cdots, ad_f^{n-2}g\}$$

$0\leqq i\leqq (n-2),0\leqq j\leqq (n-2)$,$(i<j)$ことである。すなわち

$$\begin{aligned}&\mid ad_f^0g, ad_f^1g, \cdots, ad_f^{n-2}g, [ad_f^ig, ad_f^jg]| = 0 \\ &0\leqq i<j\leqq (n-2) \quad (30)\end{aligned}$$

である。$[ad_f^ig, ad_f^jg]$の具体的内容を調べる。

$$\begin{aligned}&[ad_f^ig, ad_f^jg] \\ &= (\frac{\partial ad_f^jg}{\partial x^T})ad_f^ig - (\frac{\partial ad_f^ig}{\partial x^T})ad_f^jg \\ &= \sum_{k=0}^{(N-1)(i+j)-1} A_{[1,k]}^{(i,j)}x^{[k]} \quad (31)\end{aligned}$$

ここで

$$A_{[1,k]}^{(i,j)} = \sum_{k_1=0}^{(N-1)i}[A_{[1,k-k_1+1]}^{(j)}\{A_{[1,k_1]}^{(i)}\}^{\{k-k_1+1\}} - \sum_{k_1=0}^{(N-1)i}[A_{[1,k_1]}^{(i)}\{A_{[1,k-k_1+1]}^{(j)}\}^{\{k_1\}}] \quad (32)$$

である。

*Involutive*の条件はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned}&Z_{ij}(x) \\ &= \mid ad_f^0g, adf^1g, \cdots, ad_f^{n-2}g, [ad_f^ig, ad_f^jg]| \\ &= 0, i<j \quad (33)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& deg\rho_{ij}(x) \\
= \ & (N-1)(1+2+\cdots+(n-2)+i+j)-1 \\
= \ & (N-1)\{i+j+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\}-1 \quad (34) \\
= \ & N\rho_{ij}
\end{aligned}
$$

として

$$
\rho_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{N\rho_{ij}} Z_{ij}{}_{[0,k]}^{T} x^{[k]} \tag{35}
$$

と表せば(30)式の条件は

$$
Z_{[0,k]} = 0, 0 \leqq i < j \leqq (n-2), 0 \leqq k \leqq N\rho_{ij} \tag{36}
$$

となる。つぎに定理からえられる(2),(3)式に対する多項式非線形系の条件を考える。

$$
\begin{aligned}
& [b, \sum_{k=0}^{N-1} A_{[1,k]}^{(1)} x^{[k]}, \cdots \sum_{k=0}^{(N-1)(n-1)} A_{[1,k]}^{(n-1)} x^{[k]}]^{-1} \\
= \ & [b_0(x), b_1(x), \cdots, b_{n-1}(x)]^{-1} \\
= \ & \begin{bmatrix} \alpha_0^T(x) \\ \alpha_1^T(x) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T(x) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{37}
$$

とすれば

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \alpha_0^T(x) \\ \alpha_1^T(x) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0(x), b_1(x), \cdots, b_{n-1}(x) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} \alpha_0^T(x)b_0(x), \cdots, \alpha_0^T(x)b_{n-1}(x) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T(x)b_0(x), \cdots, \alpha_{n-1}^T(x)b(x) \end{pmatrix} \\
= \ & \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{38}
$$

より

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n-1}^T(x)b_i(x) &= 0, i = 0, \cdots, (n-2) && (39) \\
\alpha_{n-1}^T(x)b_{n-1}(x) &= 1 && (40)
\end{aligned}
$$

である。

$$
\frac{\partial \phi}{\partial x^T} = \rho(x)\alpha_{n-1}^T(x) \tag{41}
$$

ととれば

$$
\begin{aligned}
L_{ad_f^i g}\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x^T} ad_f^i g \\
&= \rho(x)\alpha_{n-1}^T(x)b_i(x) = 0 && (42) \\
& \quad i = 0, \cdots, (n-2) \\
L_{ad_f^i g}\phi &= \frac{\partial \phi}{\partial x^T} ad_f^{n-1} g = \rho(x)\alpha_{n-1}^T(x)b_{n-1}(x) \\
&\neq 0 && (43)
\end{aligned}
$$

をみたす。よって(41)式を満たすようにϕを決めればよいことがわかる。$\alpha_j(x)$はつぎの代数方程式の解である。

$$
\begin{pmatrix} b_0^T(x) \\ \ddots \\ b_{n-1}^T(x) \end{pmatrix} \alpha_j(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{44}
$$

$\alpha_j(x)$の分子の次数は

$$
\begin{aligned}
deg\{\rho(x)\alpha_j(x)\} &= \frac{1}{2}n(n-1)(N-1)-(N-1)j \\
&= (N-1)\{\frac{n(n-1)}{2}-j\}
\end{aligned}
$$

である。よって$\alpha_j(x)$はつぎのように表せる。

$$
\alpha_j(x) = \frac{\sum_{k=0}^{(N-1)\{\frac{n(n-1)}{2}-j\}} B_{[1,k]}^{(j)} x^{[k]}}{\rho(x)} \tag{45}
$$

よって$\alpha_{n-1}(x)$は

$$
\alpha_{n-1}(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(N-1)} B_{[1,k]}^{(n-1)} x^{[k]}}{\rho(x)} \tag{46}
$$

となる。このとき$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \alpha_{n-1}(x)\rho(x)$より

$$
\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(N-1)} B_{[1,k]}^{(n-1)} x^{[k]} \tag{47}
$$

で与えられる。これよりϕは次の多項式で与えられる。

$$
\phi = \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(N-1)+1} C_{[0,k]}^{T(0)} x^{[k]} \tag{48}
$$

$B^{(n-1)}_{[1,k]}$と$C^{T(0)}_{[0,k]}$とにはつぎの関係がある。

$$\begin{aligned} & x^T\{B^{(n-1)}+\sum_{j=1}^{k}\{B^{(n-1)}\}^{\sigma(i,j)}\}x^{[k]} \\ = \ & C^{T(0)}_{[0,k+1]}x^{[k+1]} \end{aligned} \tag{49}$$

$\sigma(i,j)$は共変添子と反変添子の転置である。つぎに座標変換(4)について考察する。

$$\xi = p(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ L_f\phi(x) \\ L_f^2\phi(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}\phi(x) \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$M_0 = \frac{1}{2}(N-1)(n-1)(n-2)+1$$

とすれば

$$\phi = \sum_{k=1}^{M_0} C^{T(0)}_{[0,k]}x^{[k]} \tag{51}$$

である。

$$\begin{aligned} L_f\phi(x) &= \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^T}f \\ &= \sum_{k=1}^{M_1} C^{T(1)}_{[0,k]}x^{[k]} \end{aligned} \tag{52}$$

ここで

$$C^{T(1)}_{[0,k]} = \sum_{k_1=1}^{M_1} C^{T(0)}_{[0,k_1]}(A_{[1,k-k_1+1]})^{\{k_1\}}$$

である。ただし$A_{[1,j]}=0\ (j \leqq 0, j \geqq (N+1))$となる。一般に$L_f^i\phi$について求める。

$$L_f^i\phi = \sum_{k=1}^{M_i} C^{T(i)}_{[0,k]}x^{[k]} \tag{53}$$

$$L_f^{i+1}\phi = \sum_{k_1=1}^{M_{i+1}} C^{T(i+1)}_{[0,k]}x^{[k]} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} M_{i+1} &= M_i + (N-1) \\ M_0 &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(N-1)+1 \end{aligned}$$

により

$$M_i = (N-1)i + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(N-1)+1$$

これより

$$C^{T(i+1)}_{[0,k]} = \sum_{k_1=1}^{M_{i+1}} C^{T(i+1)}_{[0,k_1]}(A_{[1,k-k_1+1]})^{\{k_1\}}$$

ただし$A_{[1,j]}=0, \qquad j \leqq 0, \qquad j \geqq (N+1)$

である。一方

$$\begin{aligned} L_f^{n-1}\phi &= \sum_{k=1}^{M_{n-1}} C^{T(n-1)}_{[0,k]}x^{[k]} \\ &= \sum_{k=0}^{M_{n-1}-1} \frac{1}{k+1}x^T C_{f[1,k]}x^{[k]} \end{aligned} \tag{55}$$

と変形できる。ここで

$$C^{T(n-1)}_{[0,k+1]}x^{[k+1]} = \frac{1}{k+1}x^T C_{f[1,k]}x^{[k]} \tag{56}$$

となる。$C_{f[1,k]}$は$[1,k]$型完全対物テンソルの行列表示である。

$$\begin{aligned} L_gL_f^{n-1}\phi &= \frac{\partial}{\partial x^T}(L_f^{n-1}\phi)b \\ &= b^T\frac{\partial}{\partial x}(L_f^{n-1}\phi) \\ &= b^T\frac{\partial}{\partial x}(\sum_{k=0}^{M_{n-1}-1}\frac{1}{k+1}x^T C_{f[1,k]}x^{[k]}) \\ &= b^T\sum_{k=0}^{M_{n-1}-1} C_{f[1,k]}x^{[k]} \\ &= \sum_{k=0}^{M_{n-1}-1} b^T C_{f[1,k]}x^{[k]} \end{aligned} \tag{57}$$

となる。$M_{n-1}-1 = \frac{1}{2}n(n-1)(N-1)$である。以上の計算より座標変換は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \xi = P(x) &= \begin{bmatrix} \phi(x) \\ L_f^1\phi(x) \\ L_f^2\phi(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}\phi(x) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{M_0} C^{T(0)}_{[0,k]}x^{[k]} \\ \sum_{k=1}^{M_1} C^{T(1)}_{[0,k]}x^{[k]} \\ \sum_{k=1}^{M_2} C^{T(2)}_{[0,k]}x^{[k]} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{M_{n-1}} C^{T(n-1)}_{[0,k]}x^{[k]} \end{bmatrix} \\ &= T_cG(x) \end{aligned} \tag{58}$$

このような定数行列T_cによって

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}v \tag{59}$$

$$u \;=\; \frac{v - L_f^n\phi}{L_g L_f^{n-1}\phi} \tag{60}$$

に変換される。

4. 安定化フィードバック

$$\begin{aligned} v &= -\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k-1}\xi_k \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k-1} {L_f}^{k-1}\phi \end{aligned} \tag{61}$$

によって

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & \cdots & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \xi \tag{62}$$

に変換されξは漸近安定になる。このとき

$$u = -\frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_{k-1} L_f^{k-1} f + L_f^n\phi}{L_g L_f^{n-1}\phi} \tag{63}$$

となる。

5. 数値例

つぎのような非線形系を考える。

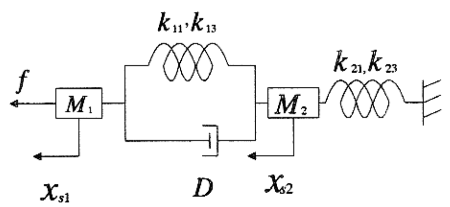

Fig. 2　非線形バネを含む力学系

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_3 & -a_4 & -a_5 \end{bmatrix} x \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -3a_2 & 3a_2 & -a_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {x_1}^3 \\ {x_1}^2 x_2 \\ x_1 {x_2}^2 \\ {x_2}^3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \tag{64}$$

ただしa_1,a_2,a_3,a_4,a_5は定数である。

ここでは可制御線形状態方程式とフィ-ドバック等価であるための必要十分条件の演算を示す。

$$\frac{\partial f}{\partial x^T} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1 + 3a_2(x_1 - x_3)^2 & 0 & -a_2 - 3a_2(x_1 - x_3)^2 \end{bmatrix}$$

$$g = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_f^0 g = b$$

$$\begin{aligned} ad_f^1 g &= [f, ad_f^0 g] = [f, b] = \frac{\partial b}{\partial x^T} f - \frac{\partial f}{\partial x^T} b \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x^T} b \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{65}$$

$$\begin{aligned} ad_f^2 g &= [f, ad_f^1 g] \\ &= \frac{\partial}{\partial x^T}(ad_f^1 g) f - (\frac{\partial f}{\partial x^T}) ad_f^1 g \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 + 3a_2(x_1 - x_3)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} & det\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g\} \\ =\;& det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 + 3a_2(x_1 - x_3)^2 \end{bmatrix} \\ =\;& \{a_1 + 3a_2(x_1 - x_3)^2\} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ =\;& a_1 + 3a_2(x_1 - x_3)^2 \\ =\;& \rho(x) \end{aligned} \tag{67}$$

$$\begin{aligned} & [ad_f^0 g, ad_f^1 g] \\ =\;& \frac{\partial ad_f^1 g}{\partial x^T} ad_f^0 g - \frac{\partial ad_f^0 g}{\partial x^T} ad_f^1 g \\ =\;& 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&| \, ad_f^0 g, ad_f^1 g, [ad_f^0 g, ad_f^1 g] \, | \\
= &\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
= &\ 0 \qquad (68)
\end{aligned}
$$

すなわち、*Involutive*である.

演算によって

$$
\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \qquad (69)
$$

に変形される。

6. おわりに

今回は多様体論を用いて、多項式非線形系状態方程式の厳密線形化のアルコリズムを提案した。次はこれを元に制御を行いたい。

参考文献

1) 大久保　重範: 非線形レギュレ-タのアルコリズムによる設計, 計測自動制御学会論文集, Vol.33,No.11, 1072/1080 (1997)

2) 大久保　重範:非線形システムのべき状態フィ-ドバックによる直接的な安定化制御,計測自動制御学会論文集,Vol.34,No.11,1596/1602(1998)

3) 三平　満司：厳密線形化とそのけん引車両の軌道制御への応用, 計測と制御 Vol.31,No.851/858(1992)

4) 石島　辰太郎,石動　善久,三平　満司,島　公脩,山下　裕,渡辺　敦(編):非線形システム理論,計測自動制御学会(1993)