

時変むだ時間をもつ離散時間システムの 因果律を考慮した安定条件

Stability Condition Considering Causality for Discrete-time Systems with Time-varying Delay

西平直史*, 安田一則**

Naofumi Nishihira* and Kazunori Yasuda**

*山形大学人文学部, **和歌山大学システム工学部

*Faculty of Literature and Social Sciences, Yamagata University,

*Faculty of Systems Engineering, Wakayama University

キーワード: 離散時間システム (discrete-time systems), むだ時間(time delay), 安定性 (stability), 因果律 (causality), 線形行列不等式 (linear matrix inequality)

連絡先: 〒990-8560 山形市小白川町1丁目4-12 山形大学 人文学部 総合政策科学科
西平直史, Tel.: (023)628-4295, Fax.: (023)628-4295, E-mail: nishihira@human.kj.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

離散時間システムにおいて, むだ時間が存在しても有限次元システムであり, 状態変数を拡大することでむだ時間のない線形システムとして表現できることはよく知られている. しかし, むだ時間が変動する場合にはこの手法を用いることはできない. そこで, 時変むだ時間をもつ離散時間システムの安定条件が考慮されている(例えば文献1, 2)).

文献¹⁾では, 連続時間システムに対する文献³⁾の手法を離散時間システムに拡張することを考えており, もとのシステムと等価なシステムに変形し, これに対する安定条件を導出することでもとのシステムの安定性を考察しているし, 文献²⁾では, むだ時間が最大値をとったとして拡大系を構

成し, むだ時間の変動を時変の不確かさと考え, 拡大系の二次安定性を考えることで安定条件を導出している. しかし, これらの条件はいずれもむだ時間の大きさ(もしくは最大値)のみを考慮しており, むだ時間の大きさと因果律がともに考慮されていない. ここでは, むだ時間の大きさと因果律をともに考慮した安定条件を LMI (線形行列不等式) 条件として導出する.

2. 対象システム

本報告では, つぎの時変むだ時間をもつ離散時間システムを対象とする.

$$x(k+1) = Ax(k) + Dx(k-l(k)) \quad (1)$$

ここで, $x(k)$ は状態, A, D は適当な次元をもつ定数行列, $l(k)$ はむだ時間であり,

$$0 \leq l(k) \leq l_M, l(k+1) - l(k) \leq 0 \quad (2)$$

を満たすものとする.

ところで, (2)式のむだ時間の変動率の上界について考えてみよう. 連続時間系

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Dx(t-h(t)) \quad (3)$$

の場合, むだ時間 $h(t)$ の変動率の上界は

$$\dot{h}(t) \leq \alpha < 1$$

となる. $\alpha > 1$ の場合には因果律が成り立たないし, $\alpha = 1$ の場合には因果律は成り立つものの, むだ時間の状態を表す関数の区間が無限大にまで広がることを許してしまうことになるため, $\alpha < 1$ の条件は妥当なものであると言えよう. また, ここではこれを因果律が成り立つものと呼ぶこととする.

因果律を考慮すると, 離散時間系の場合には, $\Delta l(k) \triangleq l(k+1) - l(k)$ の上界は

$$\Delta l(k) < 1$$

となる. 離散時間系であることに注意すると上記の条件は, $\Delta l(k) \leq 0$ となる. しかしながら, この条件はむだ時間が増加することを許しておらず, 非常に特殊なものになっていることに注意しておく.

注意 1 本報告では(2)式を満たすむだ時間を考えているが, 文献¹⁾では因果律はいっさい考慮されていないためむだ時間の変動率は仮定されておらず, 問題の設定が異なっている. また, 文献²⁾では, コンベヤモデルで表されるむだ時間を対象とし, その変動率が

$$1 - l_M \leq l(k+1) - l(k) \leq 1$$

となるものを考えているが, ここではコンベヤモデルに特定していないため変動率の下界に関する仮定をおいていない.

以下では, 上記のむだ時間システムが安定となる条件をむだ時間の最大値と因果律を考慮した形で導出する.

3. 安定条件

システム(1)の安定条件はつぎのように与えられる.

定理 1 つぎの LMI を満足する正定対称行列 $P_i (i = 0, 1, \dots, l_M)$ が存在するならばシステム(1)の零解は漸近安定である.

$$\begin{bmatrix} A^T P_0 A - P_0 + P_1 & A^T P_0 D \\ D^T P_0 A & D^T P_0 D - P_{l_M} \end{bmatrix} < 0 \quad (4)$$

$$P_{i+1} - P_i < 0 (i = 1, 2, \dots, l_M - 1) \quad (5)$$

証明 システム(1)において,

$$V(x) = x^T(k)P_0x(k) + \sum_{i=1}^{l(k)} x^T(k-i)P_i x(k-i)$$

を考え, システムの解軌道に沿った差分を考えると

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= x^T(k+1)P_0x(k+1) - x^T(k)P_0x(k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{l(k+1)} x^T(k+1-i)P_i x(k+1-i) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{l(k)} x^T(k-i)P_i x(k-i) \end{aligned}$$

となる. 以下では, 二つの場合に分けて考える. i) $l(k+1) - l(k) = 0$ のときには

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &= x^T(k)(A^T P_0 A - P_0 + P_1)x(k) \\ &\quad + x^T(k)A^T P_0 D x(k-l(k)) \\ &\quad + x^T(k-l(k))D^T P_0 A x(k) \\ &\quad + x^T(k-l(k))D^T P_0 D x(k-l(k)) \\ &\quad - x^T(k-l(k))P_{l(k)}x(k-l(k)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{l(k)-1} (x^T(k-i)P_{i+1}x(k-i) \\ &\quad - x^T(k-i)P_i x(k-i)) \\ &= \begin{bmatrix} x^T(k) & x^T(k-l(k)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} A^T P_0 A - P_0 + P_1 & A^T P_0 D \\ D^T P_0 A & D^T P_0 D - P_{l(k)} \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-l(k)) \end{bmatrix} \\
& + \sum_{i=1}^{l(k)-1} (x^T(k-i)P_{i+1}x(k-i) \\
& - x^T(k-i)P_i x(k-i)) \quad (6)
\end{aligned}$$

となる . ii) $l(k+1) - l(k) < 0$ のときには

$$\begin{aligned}
\Delta V(x) &= \begin{bmatrix} x^T(k) & x^T(k-l(k)) \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} A^T P_0 A - P_0 + P_1 & A^T P_0 D \\ D^T P_0 A & D^T P_0 D - P_{l(k)} \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} x(k) \\ x(k-l(k)) \end{bmatrix} \\
& + \sum_{i=1}^{l(k+1)} (x^T(k-i)P_{i+1}x(k-i) \\
& - x^T(k-i)P_i x(k-i)) \\
& - \sum_{l(k+1)+1}^{l(k)-1} x^T(k-i)P_i x(k-i) \quad (7)
\end{aligned}$$

となる . (6)式が負定となるときに(7)式が負定になることは明らかだから , 以下では(6)式を考える . ある時刻 k でむだ時間が $l(k) = L, 0 \leq L \leq l_M$ であったとしよう . このとき , $l(k) = L$ で(6)式が負定になると , L より小さいすべてのむだ時間 $l(k)$ で(6)式は負定になる . したがって , $l(k)$ の最大値 l_M で(6)式が負定となることを示せば , $V(x) > 0 (x \neq 0)$ なのでLyapunov の定理よりシステム(1)の零解が漸近安定であることがいえる . $l(k) = l_M$ とした(6)式に(4),(5)式を代入すると $\Delta V(x) < 0$ がいえる . □

この条件は , むだ時間の最大値 l_M 個の変数行列をもっているし , (6), (7)式の導出の過程で , むだ時間の因果律を考慮している . これらの意味で , むだ時間の大きさと因果律を考慮した条件となっている .

最後に , 本報告の条件と文献^{1, 2)}の条件をまとめておこう . Table 1にそれぞれの条件が考慮しているむだ時間のクラスについてまとめた . ○ は条

Table 1 comparisons among some conditions

条件	むだ時間の大きさ	因果律
本報告	△	△
文献 ¹⁾	○	×
文献 ²⁾	△	×

件の中で陽に考慮されていること , △ は暗に考慮されている (具体的には , むだ時間の大きさの場場合は行列の大きさや数がむだ時間の大きさに依存している , 因果律の場合は条件の導出過程で使用している) こと , × は考慮されていないことを示している .

4. おわりに

本報告では , 時変むだ時間をもつ離散時間システムの安定性について考察し , ここでは , むだ時間の大きさと因果律を考慮した条件をLMI の形で導出した . 今後の課題としては , むだ時間が増加する場合を考慮できる安定条件を導出することがあげられる .

参考文献

- 1) B. Lee and J. G. Lee: Delay-dependent Stability Criteria for Discrete-time Delay Systems; Proc. of the American Control Conference, 319/320 (1999)
- 2) 市原 , 熊澤 , 阿部 : 離散時間時変むだ時間系の安定条件 ; 第 2 回制御部門大会資料 , 331/334 (2002)
- 3) X. Li and C. E. de souza: Delay-dependent Robust Stability and Stabilization of Uncertain Linear Delay Systems; A Linear Matrix Inequality Approach; *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 42, 1144/1148 (1997)