

ファジィディスクリプタシステムのモデル追従形制御系の設計

Design of the Model Following Control System for the Fuzzy Descriptor System

秋山 孝夫
Takao AKIYAMA
山形大学
Yamagata University

大久保 重範
Shigenori OKUBO
山形大学
Yamagata University

キーワード： ファジィ制御 (Fuzzy Control), モデル追従形制御 (Model Following Control), 外乱 (Disturbance)

1. 緒 言

安定性を保証したファジィ制御器の設計に関する研究例は、これまでレギュレータ問題やサーボ系設計問題が大部分であり、モデル追従形制御系の設計を扱ったものは極めて少ない。

本研究では、ディスクリプタ形式に拡張された高木・菅野のファジィモデルで表された制御対象に対し、外乱を考慮したモデル追従形制御系の設計法を提案する。

2. 問題の設定

制御対象は次式で示されるディスクリプタ形式の高木・菅野のファジィモデルで与えられていると仮定する。

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) E_i \dot{x}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} &= \\ \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) \{A_i x(t) + B_i u(t)\}}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} + \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) d_i(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} & \quad (1) \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) C_i x(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} + \frac{\sum_{i=1}^r w_i(x(t)) d_{oi}(t)}{\sum_{i=1}^r w_i(x(t))} \quad (2)$$

ここで、 $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in R^n$ は状態変数、 $u(t) \in R^l$ は制御入力、 $y(t) \in R^l$ は制御対象の出力、 $d_i(t) \in R^n$ 、 $d_{oi}(t) \in R^l$ は有界な外乱である。 A_i 、 B_i 、 C_i はそれぞれ適合する次元の実数定数行列である。 $w_i(x(t))$ は $M_{ij}(x_j(t))$ をメンバーシップ関数値として次式を満足する適合度である。

$$\begin{aligned} w_i(x(t)) &= \prod_{j=1}^n M_{ij}(x_j(t)) \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ \sum_{i=1}^r w_i(x(t)) &> 0 \end{aligned} \quad (3)$$

式(1)の記述を簡単にするために、次式で定義される正規化された適合度ベクトル $\alpha(x(t))$ を導入する。

$$\begin{aligned} \alpha(x(t)) &= [\alpha_1(x(t)), \alpha_2(x(t)), \dots, \alpha_r(x(t))]^T, \\ \alpha_i(x(t)) &= \frac{w_i(x(t))}{\sum_{j=1}^r w_j(x(t))} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ \dot{\alpha}(x(t)) &= [\dot{\alpha}_1(x(t)), \dot{\alpha}_2(x(t)), \dots, \dot{\alpha}_r(x(t))]^T, \\ \dot{\alpha}_i(x(t)) &= \left[\frac{\partial \alpha_i(x(t))}{\partial x(t)} \right]^T \dot{x}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, r), \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i(x(t)) &= 1, \quad \sum_{i=1}^r \dot{\alpha}_i(x(t)) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)を利用して式(1)と(2)を書き換えるれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} E(\alpha) \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + d(t), \\ y(t) &= C(\alpha)x(t) + d_o(t) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i E_i, \quad A(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i, \\ B(\alpha) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i B_i, \quad C(\alpha) = \sum_{i=1}^r \alpha_i C_i, \\ d(t) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i d_i(t), \quad d_o(t) = \sum_{i=1}^r \alpha_i d_{oi}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

であり、以下の条件を満たすものとする。

- ・レギュラー条件、インパルスフリー条件

$$|pE(\alpha) - A(\alpha)| \neq 0 \quad (7)$$

$$\text{rank } E(\alpha) = \deg |pE(\alpha) - A(\alpha)| = m \leq n$$

- ・指数可制御、指數可観測

$$\begin{aligned}\text{rank}[pE(\alpha) - A(\alpha), B(\alpha)] &= n \\ \text{rank} \begin{bmatrix} pE(\alpha) - A(\alpha) \\ C(\alpha) \end{bmatrix} &= n\end{aligned}\quad (8)$$

また, α の t についての i ($i = 1, 2, \dots$) 回微分係数が $\dot{\alpha} \equiv \mathbf{0}, \ddot{\alpha} \equiv \mathbf{0}, \dots$ を満たすものとする.

参照モデルを次式で表す.

$$\begin{aligned}\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m r_m(t), \\ y_m(t) &= C_m x_m(t)\end{aligned}\quad (9)$$

ここで, $x_m(t) \in R^{n_m}$, $r_m(t) \in R^{l_m}$, $y_m(t) \in R^l$ はそれぞれ参照モデルに関する状態, 参照入力, 出力である. A_m , B_m , C_m はそれぞれ適合する次元の実数定数行列であり, (A_m, B_m) 可制御, (C_m, A_m) 可観測, A_m は安定行列とする. また, 制御対象と参照モデルとの出力誤差 $e(t)$ は次式で与えられる.

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (10)$$

$t \rightarrow \infty$ で $e(t) \rightarrow \mathbf{0}$ にするようなモデル追従形制御系の設計を考える.

3. 制御系の設計

微分演算子 $p = d/dt$ を用いると, $y(t)$ と $y_m(t)$ はそれぞれ次式のように表される.

$$\begin{aligned}y(t) &= C(\alpha) \{pE(\alpha) - A(\alpha)\}^{-1} B(\alpha) u(t) \\ &\quad + C(\alpha) \{pE(\alpha) - A(\alpha)\}^{-1} d(t) + d_o(t)\end{aligned}\quad (11)$$

$$y_m(t) = C_m (pI - A_m)^{-1} B_m r_m(t) \quad (12)$$

式(11)と(12)は, $p\alpha = \dot{\alpha} + \alpha p$ を考慮して

$$C(\alpha) \{pE(\alpha) - A(\alpha)\}^{-1} B(\alpha) = \frac{N(\alpha, \dot{\alpha}, p)}{D(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)},$$

$$N(\alpha, \dot{\alpha}, p) = C(\alpha) \text{adj}\{pE(\alpha) - A(\alpha)\} B(\alpha), \quad (13)$$

$$\begin{aligned}D(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p) &= |pE(\alpha) - A(\alpha)| \\ C_m (pI - A_m)^{-1} B_m &= \frac{N_m(p)}{D_m(p)},\end{aligned}\quad (14)$$

$$N_m(p) = C_m \text{adj}(pI - A_m) B_m,$$

$$D_m(p) = |pI - A_m|$$

とおけば, それぞれ次式のように書き換えられる.

$$D(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p) y(t) = N(\alpha, \dot{\alpha}, p) u(t) + v(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, t) \quad (15)$$

$$D_m(p) y_m(t) = N_m(p) r_m(t) \quad (16)$$

$$\begin{aligned}v(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, t) &= C(\alpha) \text{adj}\{pE(\alpha) - A(\alpha)\} d(t) \\ &\quad + D(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p) d_o(t)\end{aligned}\quad (17)$$

設計の都合上, $N(\alpha, \dot{\alpha}, p)$ と $N_m(\alpha, p)$ をそれぞれ次式の形式で表す.

$$N(\alpha, \dot{\alpha}, p) = N_r(\alpha) \text{diag}(p^{\eta_i}) + \tilde{N}(\alpha, \dot{\alpha}, p) \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (18)$$

$$N_m(p) = N_{m_r} \text{diag}(p^{\eta_{m_i}}) + \tilde{N}_m(p) \quad (19)$$

ここで, η_i は $N(\alpha, \dot{\alpha}, p)$ の各行の p に関する次数を表し, η_{m_i} は $N_m(p)$ の各行の次数である. また,

$\partial_{\eta_i} \tilde{N}(\alpha, \dot{\alpha}, p) < \eta_i$, $\partial_{\eta_{m_i}} \tilde{N}_m(p) < \eta_{m_i}$ である. $N_r(\alpha)$ は $l \times l$ の行列であり, $|N_r(\alpha)| \neq 0$ であるとする. また, 外乱 $d(t)$, $d_o(t)$ は

$$\begin{aligned}D_d(p) d(t) &= \mathbf{0}, \quad D_d(p) d_o(t) = \mathbf{0}, \\ \partial D_d(p) &= n_d\end{aligned}\quad (20)$$

を満たすものとする. $D_d(p)$ は既知のモニックな多項式であり, 外乱のモードを与える. よって, $\dot{\alpha} \equiv \mathbf{0}, \ddot{\alpha} \equiv \mathbf{0}, \dots$ を考慮すれば,

$$\begin{aligned}D_d(p)v(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p) &= \\ D_d(p)C(\alpha)\text{adj}\{pI - A(\alpha)\}d(t) &+ \\ + D_d(p)D(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)d_o(t) &= \\ = [C(\alpha)\text{adj}\{pI - A(\alpha)\}D_d(p) &+ \\ + \Delta_d(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)]d(t) \\ + \{D(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)D_d(p) + \Delta_{d_o}(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)\}d_o(t) &= \\ = \Delta_d(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)d(t) + \Delta_{d_o}(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)d_o(t) &= \\ \mathbf{0}\end{aligned}\quad (21)$$

次に, ρ 次 ($\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \eta_i$) の p に関する最高次数項の係数が $D(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)$ のそれと同じである安定な多項式 $T(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)$ を選び, 次式より p に関する多項式 $R(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)$ と $S(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)$ を求める.

$$\begin{aligned}T(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)D_m(p) &= \\ R(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)D_d(p)D(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p) &+ \\ + S(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)\end{aligned}\quad (22)$$

ここで, 各 p に関する多項式の次数は $\partial T(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p) = \rho$, $\partial D_m(p) = n_m$, $\partial D_d(p) = n_d$, $\partial D(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p) = n$, $\partial R(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p) = \rho + n_m - n_d - n$, $\partial S(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p) \leq n_d + n - 1$ である.

式(10), (22), (16)および式(15), (21)を考慮すれば, $e(t)$ は次のように求められる.

$$\begin{aligned}T(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)D_m(p)e(t) &= \\ R(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)D_d(p)D(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)y(t) &+ \\ + S(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)y(t) - T(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)N_m(p)r_m(t) &= \\ \{R(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)D_d(p)N(\alpha, \dot{\alpha}, p) &- \\ - N_r(\alpha)Q(p)\}u(t) + N_r(\alpha)Q(p)u(t) &+ \\ + S(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)y(t) - T(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)N_m(p)r_m(t)\end{aligned}\quad (23)$$

ここで, $Q(p)$ は $|Q(p)|$ が安定な多項式であるような多項式行列であり, 次式のように表す.

$$Q(p) = \text{diag}(p^{\rho+n_m-n+\eta_i}) + \tilde{Q}(p) \quad (i = 1, 2, \dots, l) \quad (24)$$

ただし, $\partial_{\eta_i} \tilde{Q}(p) < \rho + n_m - n + \eta_i$ である. 式(23)において, $T(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)D_m(p)e(t) = \mathbf{0}$ となるように右辺をゼロとおけば, $u(t)$ は次式のように求められる.

$$\begin{aligned}
u(t) &\equiv -Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1} \\
&\cdot \{R(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)D_d(p)N(\alpha, \dot{\alpha}, p) \\
&- N_r(\alpha)Q(p)\}u(t) \\
&- Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1}S(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)y(t) \\
&+ Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1}T(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)N_m(p)r_m(t)
\end{aligned} \tag{25}$$

式(25)の各行列要素の分数式がプロパーとなるためには、次の条件を満足しなければならない。

$$\begin{aligned}
\rho &\geq n_d + 2n - n_m - 1 - \eta_i, \\
n_m - \eta_{m_i} &\geq n - \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, l)
\end{aligned} \tag{26}$$

さらに次の関係式

$$\begin{aligned}
Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1}\{R(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p)D_d(p)N(\alpha, \dot{\alpha}, p) \\
- N_r(\alpha)Q(p)\} &= H_1(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)(pI - F_1)^{-1}G_1, \\
Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1}S(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, p) \\
&= J_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots) + H_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)(pI - F_2)^{-1}G_2, \\
Q(p)^{-1}N_r(\alpha)^{-1}T(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)N_m(p) \\
&= J_3(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots) + H_3(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)(pI - F_3)^{-1}G_3
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\xi_1(t) &= F_1\xi_1(t) + G_1u(t), \\
\xi_2(t) &= F_2\xi_2(t) + G_2y(t), \\
\xi_3(t) &= F_3\xi_3(t) + G_3r_m(t),
\end{aligned} \tag{28}$$

$$|pI - F_i| = |Q(p)| \quad (i = 1, 2, 3)$$

を利用すれば、式(25)は状態変数フィルタ ξ_i ($i = 1, 2, 3$) を用いて次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}
u(t) &\equiv -H_1(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)\xi_1(t) - J_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)y(t) \\
&- H_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)\xi_2(t) + u_m(t),
\end{aligned} \tag{29}$$

$$u_m(t) = J_3(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)r_m(t) + H_3(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)\xi_3(t)$$

式(29)の $u(t)$ は $e(t) \rightarrow \mathbf{0}$ ($t \rightarrow \infty$) を満足するから、制御系を構成する内部状態が有界であれば、モデル追従形制御系が構成できる。

4. 内部状態の安定性の解析

制御系に対して外部から入る信号は参照入力 $r_m(t)$ と外乱 $d(t)$ 、 $d_o(t)$ であるが、これらは全て有界であるものとする。制御系全体の挙動をまとめると次のようになる。

$$\begin{aligned}
E(\alpha)\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B(\alpha)u(t) + d(t), \\
\xi_1(t) &= F_1\xi_1(t) + G_1u(t), \\
\xi_2(t) &= F_2\xi_2(t) + G_2y(t), \\
\xi_3(t) &= F_3\xi_3(t) + G_3r_m(t), \\
u(t) &\equiv -H_1(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)\xi_1(t) - J_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)y(t) \\
&- H_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)\xi_2(t) + u_m(t), \\
u_m(t) &= J_3(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)r_m(t) + H_3(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)\xi_3(t), \\
y(t) &= C(\alpha)x(t) + d_o(t), \\
\dot{x}_m(t) &= A_m x_m(t) + B_m r_m(t), \\
y_m(t) &= C_m x_m(t)
\end{aligned} \tag{30}$$

$\xi_3(t)$ は有界となるため、

$z_s(t)^T = [x(t)^T, \xi_1(t)^T, \xi_2(t)^T, u(t)^T]$ において有界性の解析に必要な部分をまとめれば、次式を得る。

$$E_s(\alpha)\dot{z}_s(t) = A_s(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)z_s(t) + d_s(t) \tag{31}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
E_s(\alpha) &= \begin{bmatrix} E(\alpha) & O & O & O \\ O & I & O & O \\ O & O & I & O \\ O & O & O & O \end{bmatrix}, \\
A_s(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots) &= \begin{bmatrix} \{A(\alpha) - B(\alpha)J_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)C(\alpha)\} & -B(\alpha)H_1(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots) \\ -G_1J_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)C(\alpha) & \{F_1 - G_1H_1(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)\} \\ G_2C(\alpha) & O \\ -J_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)C(\alpha) & -H_1(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots) \\ -B(\alpha)H_1(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots) & O \\ -G_1H_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots) & O \\ F_2 & O \\ -H_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots) & I \end{bmatrix}, \\
d_s(t) &= \begin{bmatrix} B(\alpha) \\ G_1 \\ O \\ I \end{bmatrix} u_m(t) + \begin{bmatrix} d(t) - B(\alpha)J_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)d_o(t) \\ -G_1J_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)d_o(t) \\ G_2d_o(t) \\ -J_2(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)d_o(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{32}$$

式(31)の特性多項式を計算すると次式のようになる。

$$\begin{aligned}
|pE_s(\alpha) - A_s(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)| &= \\
|N_r(\alpha)|^{-1}|Q(p)|T(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)^l D_m(p)^l V(\alpha, \dot{\alpha}, p)
\end{aligned} \tag{33}$$

ここで、 $V(\alpha, \dot{\alpha}, p)$ は $C(\alpha)\{pE(\alpha) - A(\alpha)\}B(\alpha)$ の不変零点の多項式である。さらに、次の関係

$$|pE_s(\alpha) - A_s(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)| \neq 0 \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\text{rank } E_s(\alpha) &= \deg |pE_s(\alpha) - A_s(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)| \\
&= m + 2(p + n_m - m)l + 2 \sum_{i=1}^l \eta_i
\end{aligned} \tag{35}$$

を満足することが分かり、 $z_s(t)$ は指數関数モードのみで表される。式(33)において $|Q(p)|$ 、 $T(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, p)$ 、 $D_m(p)$ はいずれも安定多項式であるため、 $V(\alpha, \dot{\alpha}, p)$ が安定ならば、 $A_s(\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots)$ は安定なシステム行列となる。よって、 $z_s(t)$ の有界性が証明された。 $z_s(t)$ が有界ならば、式(4)から $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots \rightarrow \mathbf{0}$ ($t \rightarrow \infty$) となる。

5. 結 言

外乱を考慮し、ファジィ理論を用いたディスクリプタ表現のモデル追従形制御系の設計法を提案した。本設計法では、適合度に関する作用素ベクトル α と微分演算子 p を導入し、 $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots$ と p に関する多項式行列の代数演算で制御系が設計可能である。