計測自動制御学会東北支部 第206回研究集会 (2002.12.10)
資料番号 206-8

時系列信号のリアプノフスペクトル解析手法に関する一考察

A Method for Lyapunov Spectrum Analysis of Observed Time Series

○矢野 操, 本間経康, 酒井正夫, 阿部健一

○M. Yano, N. Homma, M. Sakai, K. Abe

東北大学

Tohoku University

キーワード： リアプノフスペクトル(Lyapunov spectrum), 冗長次元(Spurious dimensions), 時系列解析(Time series analysis)

連絡先： 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉05 東北大学 大学院 工学研究科 電気・通信工学専攻 阿部研究室
矢野 操, Tel.: (022)217-7074, Fax.: (022)263-9290, E-mail: yano@abe.ecei.tohoku.ac.jp

1. はじめに

カオス力学系では，初期値の微小な違いが時間とともに急激に拡大する性質を有している．n次元空間におけるこの軌道不安定性はn個のリアプノフ指数を用いて表され，これらn個の指数の集合をリアプノフスペクトルと呼ぶ．未知システムの場合は，観測した時系列信号からアトラクタを再構成してリアプノフスペクトルを推定することになるが，一般的な再構成次元の決定法はまだ確立されておらず，したがってリアプノフスペクトルの推定法も確立されていない．

本稿では，再構成次元mを元のシステムの次元nより大きくとった場合に現れる$(m-n)$個の冗長な擬似リアプノフ指数の挙動を理論的に解析し，真のスペクトルと擬似スペクトルの関係を明らかにする．解析結果より，(i)m個のリアプノフ指数には，n個の真の指数が含まれており，これを特定することが可能であること，したがって(ii)未知システムの次元nも推定可能であることを示す．

2. リアプノフスペクトル解析

2.1 アトラクタの再構成

実験などにより現実の多変数システムを観測する場合，全変数の同時観測ができないことは珍しくない．例えば，最悪の場合，1変数の時系列$y(t)$, $t=1,2,\cdots$が観測できるのみである．このとき得られた時系列データから元のシステムのダイナミクスを解析するには，高次元空間におけるアトラクタ軌道の再構成を行う必要がある．再構成の手法として最も多く用いられているのは，時間遅れ座標系への変換である[1)4)]．

具体的な時間遅れ座標系への変換は，時間遅れの大きさをτとして，m次元再構成状態空間において，(1)式のようなm次元ベクトルを構成すれば

よい．

$$v(t) = [y(t)\, y(t-\tau)\, \cdots\, y(t-(m-1)\tau)]^T \in \Re^m \quad (1)$$

(1)式で示されるベクトルは，m次元再構成状態空間$\Re^m$の一点に対応する．mを十分大きくとれば，(1)式のような形式の再構成状態空間への変換が，元の決定論的力学系の埋め込みになる．つまり，元の力学系のアトラクタの位相構造が保存されることを意味する．

また，この次元mは元の力学系の状態空間の次元をnとしたとき，

$$m \geq 2n+1 \quad (2)$$

であれば十分であることがTakensにより証明されている[3]．

2.2 リアプノフスペクトル

(3)式で表されるn次元離散時間力学系を考える．

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t)), \quad t = 1, 2, \cdots \quad (3)$$

ただし，$\boldsymbol{x}(t) \in \Re^n$は時刻$t$における力学系の状態ベクトル，$\boldsymbol{f}$は$n$次元非線形関数である．(3)式における$\boldsymbol{x}(t)$からの微小変位を$\Delta\boldsymbol{x}(t)$とすると，

$$\boldsymbol{x}(t+1) + \Delta\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t) + \Delta\boldsymbol{x}(t)) \quad (4)$$

と書ける．テイラー展開して線形近似することにより，

$$\Delta\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{J}(t)\Delta\boldsymbol{x}(t) \quad (5)$$

を得る．ここで，$\boldsymbol{J}(t)$は点$\boldsymbol{x}(t)$における$\boldsymbol{f}$のヤコビ行列である．n個のリアプノフスペクトルは，次式の正定値行列の固有値の自然対数をとって定義される．

$$\lim_{N\to\infty} [\{\boldsymbol{J}^N\}^T \{\boldsymbol{J}^N\}]^{1/2N} \quad (6)$$

ただし，$\boldsymbol{J}^N$はNステップにわたるヤコビ行列の積$\boldsymbol{J}^N = \boldsymbol{J}(N)\boldsymbol{J}(N-1)\cdots\boldsymbol{J}(1)$である．

2.3 ヤコビ行列の推定

直接ヤコビ行列を求めることができない未知システムに対しては，観測時系列から何らかの方法でヤコビ行列を推定するのが一般的であり，これまでにいくつかの推定方法が提案されている．以下に本研究で用いた方法[2)4)]を示す．

まず，m次元再構成アトラクタ軌道上の1点を$\boldsymbol{v}(t)$とする．このとき，$\boldsymbol{v}(t)$を中心として微小半径εのm次元超球（以下ε球）に入るアトラクタ上の他の点$\boldsymbol{v}(k_i)$をM個選び出す．ここで，$\boldsymbol{v}(t)$から見たε球内のM個の点に対する変位ベクトル$\boldsymbol{y}_i \in \Re^m$は，

$$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{v}(k_i) - \boldsymbol{v}(t) \quad (7)$$

となり，これが(5)式の微小変位ベクトル$\Delta\boldsymbol{x}(t)$と対応する．

時間がsだけ経過した後，ε球の中心$\boldsymbol{v}(t)$は$\boldsymbol{v}(t+s)$に，$\boldsymbol{v}(k_i)$は$\boldsymbol{v}(k_i+s)$に，各々変化する．したがって，時間$t+s$での変位ベクトル$\boldsymbol{z}_i \in \Re^m$は，

$$\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{v}(k_i+s) - \boldsymbol{v}(t+s) \quad (8)$$

となる．ε球の半径と時間sが十分に小さいと仮定すると，(7)，(8)式の$\boldsymbol{y}_i$と$\boldsymbol{z}_i$の関係は線形近似可能であり，ある行列$\boldsymbol{G}(t)$を用いて，

$$\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{y}_i \quad (9)$$

と近似的に表すことができる．この$\boldsymbol{G}(t)$は，(5)式のヤコビ行列の近似と考えることができる．本研究では$\boldsymbol{G}(t)$の決定方法の一つとして，次式で表される距離，

$$S_d = \sum_{i=1}^{M} |\boldsymbol{z}_i - \boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{y}_i|^2 \quad (10)$$

を最小にするように，すなわち，最小二乗法により$\boldsymbol{G}(t)$を決定する．

一方，(5)式のヤコビ行列を高次オーダで近似することにより，その近似精度が向上した結果が報

告されており[1]，本稿でも高次近似手法を用いる．以下にヤコビ行列を2次のオーダで近似する場合の例を示す．

(5)式で表される微小変位に関する写像のなかで，$\Delta\boldsymbol{x}(t)$の第1成分$\Delta x_1(t)$が$\Delta x_1(t+1)$に時間発展するとき，その変化はヤコビ行列の各成分を用いて，

$$\begin{aligned}\Delta x_1(t+1) &= G_1\Delta x_1(t)+\cdots+G_n\Delta x_n(t)\\ &+ G_{11}\Delta x_1^2(t)+\cdots\\ &+ G_{1n}\Delta x_1(t)\Delta x_n(t)\\ &\vdots\\ &+ G_{n1}\Delta x_n(t)\Delta x_1(t)+\cdots\\ &+ G_{nn}\Delta x_n^2(t)\end{aligned} \tag{11}$$

と2次のオーダで近似することができる．さらに，(11)式をつぎのように変形すると，

$$\begin{aligned}&\Delta x_1(t+1)\\ &= \big(G_1+G_{11}\Delta x_1(t)+\cdots+G_{1n}\Delta x_n(t)\big)\Delta x_1(t)\\ &+ \big(G_2+G_{21}\Delta x_1(t)+\cdots+G_{2n}\Delta x_n(t)\big)\Delta x_2(t)\\ &\vdots\\ &+ \big(G_n+G_{n1}\Delta x_1(t)+\cdots+G_{nn}\Delta x_n(t)\big)\Delta x_n(t)\\ &= J_{11}\Delta x_1(t)+J_{12}\Delta x_2(t)+\cdots+J_{1n}\Delta x_n(t)\end{aligned} \tag{12}$$

となり，2次の要素を含んだヤコビ行列の各要素が求まる．3次以上のオーダでヤコビ行列を推定する場合にも同様にテイラー展開を行えばよい．ただし，ヤコビ行列の高次近似を行う場合には，線形近似を行う時に比べてより多くのデータ数を必要とする[1]．

2.4 観測時系列からのリアプノフスペクトルの推定例

(13)式で表される2次元離散時間力学系であるエノン写像を考える．

$$\left\{\begin{aligned} x(t+1) &= 1-ax(t)^2+y(t)\\ y(t+1) &= bx(t)\end{aligned}\right. \tag{13}$$

ここで，$a=1.4$，$b=0.3$としたときの，リアプノフスペクトルの真値は$\lambda_1=0.408$，$\lambda_2=-1.62$である[1]．Table 1はBrownら[1]により示されたエノン写像のリアプノフスペクトルの推定結果である．(13)式の$x(t)$のみを11,000ステップ用いて埋め込み次元$m=2$から6，遅れ時間$\tau=1$でアトラクタを再構成し推定を行っている．この結果より，埋め込み次元が元のシステムの次元より大きい場合には，冗長な擬似リアプノフ指数が現れることが分かる．一般に未知システムの場合は次元数も未知であることから，真のスペクトルと擬似的なものとの関係を明らかにすることは，未知ダイナミクスを解析する上で重要である．次節では，この関係を解析するため擬似リアプノフ指数の振舞について考察する．

3. 擬似リアプノフ指数解析

3.1 理論解析

エノン写像のように$y(t)$が$x(t)$の一変数のみで決まるつぎのような2次元離散時間力学系を考える．

$$\left\{\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t),y(t))\\ y(t+1) &= g(x(t))\end{aligned}\right. \tag{14}$$

いま，時系列$x(t)$，$t=1,2,\cdots$のみを用いて3次の時間遅れ座標系にアトラクタの再構成を行うと，再構成状態空間ベクトル$\boldsymbol{x}(t)$はつぎのように表せる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= [x(t)\ x(t-1)\ x(t-2)]^T\\ &= [x_1(t)\ x_2(t)\ x_3(t)]^T\in\Re^3\end{aligned} \tag{15}$$

ここで，遅れ時間τは1とする．このとき3次元再構成状態空間の力学系はつぎのように表される．

$$\left\{\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1(\boldsymbol{x}(t)) = f(x_1(t),g(x_2(t)))\\ x_2(t+1) &= f_2(\boldsymbol{x}(t)) = x_1(t)\\ x_3(t+1) &= f_3(\boldsymbol{x}(t)) = x_2(t)\end{aligned}\right. \tag{16}$$

このとき，(14)，(16)式のヤコビ行列はそれぞれ

$$\boldsymbol{J}_{\rm orig} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & 0\end{bmatrix} \tag{17}$$

Table 1: The Lyapunov exponents for the Hénon map by a local cubic (three-order) neighborhood-to-neighborhood map [1].

m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
2	0.44490	−1.6091				
3	0.44073	−0.89324	−1.6535			
4	0.44199	−0.30700	−0.80362	−1.6246		
5	0.46312	−0.049209	−0.38960	−0.76073	−1.6352	
6	0.46482	0.14395	−0.22719	−0.42457	−0.87154	−1.6449

Table 2: The Lyapunov exponents for the Hénon map by a local quadratic (two-order) neighborhood-to-neighborhood map.

m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
3	0.4172	−1.6211	−437.1507			
4	0.4172	−1.6209	−364.0131	−368.4830		
5	0.4172	−1.6208	−356.4162	−358.2021	−359.9549	
6	0.4172	−1.6206	−344.7103	−352.3531	−355.5636	−358.3531

$$\boldsymbol{J}_{3\text{-d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

となり，それぞれの特性方程式は以下で与えられる．

$$\det(\boldsymbol{J}_{\text{orig}} - \sigma \boldsymbol{I}) = \sigma^2 - \frac{\partial f}{\partial x}\sigma - \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} \tag{19}$$
$$= (\sigma - \alpha_1)(\sigma - \alpha_2) = 0 \tag{20}$$

$$\det(\boldsymbol{J}_{3\text{-d}} - \sigma \boldsymbol{I}) = -\sigma\left(\sigma^2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\sigma - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) \tag{21}$$
$$= -\sigma(\sigma - \beta_1)(\sigma - \beta_2) = 0 \tag{22}$$

(19)式と(21)式の係数を比較すると，次式の条件を満たせば(22)式の2つの固有値β_1，β_2は(20)式の2つの固有値α_1，α_2と一致し，残りの一つは0となる．

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & (23) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & (24) \end{array} \right.$$

(15)，(16)式より(23)式の条件が成り立つことは明らかである．一方(24)式の条件は一般的な2次元離散時間システムで成り立つものではないが，いま考えている(14)式のようなシステムでは$y(t) = g(x_2(t))$という関係が成り立つので，

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial g}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y(t)}{\partial x_2(t)} \tag{25}$$

となり，(14)，(15)式より次式が成り立つ．

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial y(t+1)}{\partial x(t)} = \frac{\partial y(t+1)}{\partial x_2(t+1)} \tag{26}$$

さらに(13)式のエノン写像のように，gが線形である場合には，$\partial y/\partial x_2$はx_2の値によらず一定となる．

$$\frac{\partial y(t)}{\partial x_2(t)} = \frac{\partial y(t+1)}{\partial x_2(t+1)} \tag{27}$$

よって，この場合，

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} \tag{28}$$

なので(24)式が成り立つことが示される．

リアプノフスペクトルは各時刻におけるヤコビ行列の固有値の自然対数をとり，その値を平均化したものであるので，再構成アトラクタより推定されるリアプノフスペクトルの値は，λ_1とλ_2は元のシステムの値と等しくλ_3は$-\infty$となる．また埋め込み次元が3以上の場合にも，2つの固有値はそれぞれ元のシステムの固有値と一致し，残りの固有値は全て0になる．したがって，(14)式で表され

Table 3: The Lyapunov exponents for the Hénon map by the proposed analysis.

m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
2	0.4082	−1.6122				
3	0.4095	−1.6135	−8.5757			
4	0.4014	−1.6066	−3.1022	−13.741		
5	0.4079	−1.6513	−2.3344	−2.6059	−15.959	
6	0.4087	−1.6206	−1.9271	−2.1818	−6.7029	−8.2029

Table 4: The Lyapunov exponents for the Hénon map by a local cubic (three-order) neighborhood-to-neighborhood map using six digits of accuracy in data.

m	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
2	0.4083	−1.6119				
3	0.4086	−1.1025	−1.6151			
4	0.4081	−0.6778	−0.9947	−1.6204		
5	0.4082	−0.5396	−0.6818	−0.9629	−1.6127	
6	0.4139	−0.4925	−0.5749	−0.7057	−1.0082	−1.6135

るシステムのうち，gが線形関数である場合には，$m(>2)$次元空間に再構成したときのリアプノフスペクトルの値は，λ_1とλ_2は元のシステムの値と一致し，残りは全て$-\infty$になる．すなわち，$(m-n)$個の擬似リアプノフ指数はn個の真のリアプノフ指数と識別可能であり，この関係から，未知システムの次元数nを推定可能である．

3.2 数値例

(13)式で表されるエノン写像の変数$x(t)$のみを用いた3次の時間遅れ座標系への再構成は

$$
\begin{aligned}
x_1(t+1) &= f_1(\boldsymbol{x}(t)) = 1 - a x_1(t)^2 + b x_2(t) \\
x_2(t+1) &= f_2(\boldsymbol{x}(t)) = x_1(t) \\
x_3(t+1) &= f_3(\boldsymbol{x}(t)) = x_2(t)
\end{aligned}
\tag{29}
$$

と表され，(18)式のヤコビ行列はつぎのようになる．

$$
\boldsymbol{J}_{3\text{-d}}(t) = \begin{bmatrix} -2ax_1(t) & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{30}
$$

このヤコビ行列を用いて10,000ステップの時系列$x(t)$からリアプノフスペクトルを求めると，それぞれ$\lambda_1 = 0.4172$，$\lambda_2 = -1.6211$，$\lambda_3 = -437.1507$となった．この結果は理論解析結果とほぼ一致している．Table 2は埋め込み次元を$m=3$から6まで変化させたときのリアプノフスペクトルの推定結果である．Table 3はエノン写像の$y(t)$のみを1,000ステップ用いて，埋め込み次元$m=2$から6でアトラクタの再構成を行い，ヤコビ行列を2次のオーダで近似し，リアプノフスペクトルを推定した結果である．これより，(13)式で表される力学系をm次元に再構成した場合の，元のシステムのリアプノフ指数と擬似リアプノフ指数の関係が理論解析と同じ傾向となり，両者は識別可能であることが数値例でも確認できた．

3.3 数値例におけるデータ精度の影響

3.1節では冗長なリアプノフ指数の振舞を理論的に解析し，その結果擬似リアプノフ指数は全て$-\infty$に収束することが分かった．また，Table 3の2次近似推定結果の擬似リアプノフ指数の振舞もこの理論とほぼ一致している．しかし，Table 1にあげたBrownらの報告では，擬似リアプノフ指数

がエノン写像の2つのリアプノフ指数の真値とほぼ同じ値の間に挟まれるように出現している．この傾向は理論解析の結果とは大きく異なることから，Brownらの結果が誤りであることは明らかである．以下にその誤りの原因を検証する．Brownらの数値解析と本稿で行った数値解析との相違点を挙げると主につぎの3点が考えられる．

1. 対象時系列の長さ
2. 用いる変数の違い
3. データの精度

まず1.の時系列の長さに関しては，Brownらの数値解析では11,000点のエノン写像の時系列を用いているのに対して，我々のシミュレーションでは1,000点を用いているだけである．しかし，データを10,000点まで増やしてシミュレーションを行っても，結果に大きな違いが生じないことを確認しており，これは擬似リアプノフ指数の出現傾向が大きく異なる要因ではない．また，2.の変数選択に関しては，Brownらがエノン写像の$x(t)$を用いたのに対して，Table 3では$y(t)$を用いた．しかし，(13)式からも分かるように，$y(t)$は$x(t-1)$をb倍したものにすぎず，また，実際$x(t)$を用いてもTable 3と同様の傾向が得られることから，変数選択の違いは主原因ではない．最後に3.に関してであるが，本研究では有効数字15桁の精度を用いて数値解析を行っているが，Brownらは6桁の精度を用いている．両者のデータ精度は大きく異なっているため，リアプノフスペクトルの精度に差異が生まれることは予想される．しかし，擬似リアプノフ指数の出現傾向にどの程度影響があるかは未知数であるため，Brownらの精度を用いてこの傾向に再現性があるかを検証した．すなわち，Brownらと同様のデータ精度を用いてエノン写像の$x(t)$の時系列のリアプノフスペクトルを，埋め込み次元を$m=2$から6まで変化させて求めた．このときヤコビ行列は3次のオーダで近似し，他のパラメータは前の数値解析と同じものを用いた．Table 4は数値解析の結果である．これより，Table 1の傾向はデータ精度により再現可能であることがわかる．したがって，Table 1と3における擬似リアプノフ指数の出現傾向の違いは，主にデータ精度が原因であることが強く示唆された．

4. おわりに

本稿では，エノン写像を例に時系列から推定されるリアプノフスペクトルについて考察した．理論解析によるとm次元再構成アトラクタのリアプノフスペクトルは，2つの真値$\lambda_1 = 0.408$，$\lambda_2 = -1.62$と，$(m-2)$個の擬似リアプノフ指数$\lambda_i = -\infty$，$i = 3, 4, \cdots, m$になることが分かった．Table 3に示されるように，時系列からリアプノフスペクトルを求めた場合にも同様の結果が得られることから，未知システムの時系列に対しても，擬似リアプノフ指数を真のリアプノフ指数と識別することが可能である．したがって，本稿で提案した解析法により，未知システムの次元数推定が可能となる．

一方，データの精度によっては結果が大きく異なることがTable 4からも示されており，データの精度が結果にどのように影響するのか，そのメカニズムを定量的に明らかにすることは，比較的精度の低い生体データ等の実データ解析に本手法を適用する際に重要であり，今後の課題である．

参考文献

1) R.Brown, P.Bryant and H.D.I. Abarbanel: Computing the Lyapunov Spectrum of a Dynamical System from an Observed Time Series, Physical Review A, Vol. 43, No. 6, pp. 2787-2806, 1991.
2) 合原一幸，カオス時系列解析の基礎と応用，産業図書，2000.
3) F. Takens: Detecting Strange Attractors in Turbulence, In D.A. Rand and B.S. Young, editors, Dynamical Systems of Turbulence, Vol. 898 of Lecture Notes in Mathematics, pp. 366-381, Berlin, 1981. Springer-Verlag.
4) M. Yano, N. Homma, M. Sakai and K. Abe: Phase-space Reconstruction from Observed Time Series using Lyapunov Spectrum Analysis, Proceedings of SICE 2002 in Osaka, pp. 726-731, 2002.