

時変な振幅の正弦的信号に対するフーリエ係数推定法の性能解析

Performance Analysis of an LMS based Fourier Analyzer  
for Sinusoidal Signals with Time-varying Amplitude

工藤憲昌  
Norimasa Kudoh  
八戸高専  
Hachinohe National College of Tech.

+ 田所嘉昭  
+ Yoshiaki Tadokoro  
+ 豊橋技科大 工学部  
+ Toyohashi University of Tech.

キーワード: LMS 形適応アルゴリズム(LMS Algorithm), 非定常信号(Non-stationary Signal), フーリエ係数(Discrete Fourier Coefficient), 時変システム(Time-variant System)

連絡先: 〒039-1192 八戸市田面木上野平 16-1 八戸高専 電気工学科  
tel:0178-27-7281, e-mail:kudohk-e@hachinohe-ct.ac.jp

## 1. はじめに

分析対象に含まれる周波数が既知である場合でも信号の振幅と位相(フーリエ係数)を正確に推定することは多くの分野で非常に重要である[1-2]. 離散的フーリエ変換(DFT)はフーリエ係数を求めるツールとして重要な役割を持っている. しかし, 分析信号の周波数配置が非調和である場合や非定常な信号である場合には, 正確に分析できないという問題点がある.

前者の問題を解決するために, 多くのスライディング形式の方法[3-4]や適応アルゴリズム[5-7]が提案されている. これらの方法はサンプル毎の処理であるため, 分析対象の信号の統計量が緩やかに変化する場合には, その変化に追従できるという特徴をも有している. しかし, 管楽器の演奏音の採譜やインバータ回路が存在する電源系の高調波ノイズ除去などの応用では, 高い追従能力が要求されるため, これまでに提案された方法では, 十分とはいえないと考えられる. また, 追従特性が良いといわれる RLS やカルマンフィルタは, このような応用の場合には存在しない周波数があると相関行列のランクが下がるため, 数値演算上, 逆行列の算出のため, 周到な対策が必要となるという問題点がある.

よく知られているように, 時変の程度が時間変数  $n$  の  $(q-1)$  乗までの場合, 適応制御ループ内に  $(1-z^{-1})^{-q}$  を含ませることで, その時変性を収容できる. つまり, 定常偏差を十分に小さくできる.

同様な考えに基づいて, 時変な波高値をもつサイン

信号のフーリエ係数を LMS 形のアルゴリズムで推定する方法が提案されている[8]. 提案法では, フーリエ係数が適応パラメータである LMS 形アルゴリズムを用いている.

本稿では, そのフーリエ係数推定法の特性の近似解析を行ってその妥当性と限界を検証すると共に, 採譜への応用について述べる. 以下に, 本稿の構成を示す.

2. では, 本稿で取り扱うフーリエ係数の推定法について述べる. 3. では, 推定特性の近似解析を行い, 計算機シミュレーションによりその妥当性と限界を確認する. 4. では, ビブラート演奏により周波数が変動した状況で採譜を試みる. 5. はまとめである.

## 2. フーリエ係数の推定法

特性解析の対象である LMS 形のアルゴリズムを用いたフーリエ係数推定法について概説する. 分析対象の信号は式(1)に示すように,  $p$  個の正弦波と平均零で分散  $\sigma_\phi^2$  の加法性雑音  $\phi(n)$  から構成されている. ここで, 取り得る  $\omega_i$  と  $p$  は既知とする.

$$x(n) = \sum_{i=1}^p a_i(n) \cos \omega_i n + b_i(n) \sin \omega_i n + \phi(n) \quad (1)$$

正弦波の波高値  $a_i(n)$ ,  $b_i(n)$  は時変で式(2), (3)のように, 時間変数  $n$  の項も含んでいるものとする.

$$a_i(n) = a_i + \alpha_i n \quad (2)$$

$$b_i(n) = b_i + \beta_i n \quad (3)$$

よく知られているように, 式(2), (3)のように時変

の程度が時間変数  $n$  の 1 次までの場合、適応制御ループ内に  $(1-z^{-1})^{-2}$  を含ませることで、その時変性を収容できる。つまり、定常偏差を十分に小さくできる。楽音等の実際の信号は、 $n$  までの時変性で短期間では十分に近似できると考えられるため、本稿では  $n$  までを考慮することにする。時変な波高値  $a_i(n)$ 、 $b_i(n)$  を正確にかつ迅速に求めることが目的である。

フーリエ係数推定法の構成を図 1 に示す[8]。  $a_i(n)$ 、 $b_i(n)$  の推定値  $\hat{a}_i(n)$ 、 $\hat{b}_i(n)$  は式(4)、(5)で算出される。ここで、

$$\hat{a}_i(n+1) = \hat{a}_i(n) + \frac{\mu}{1-\gamma z^{-1}} e(n) \cos \omega_i n \quad (4)$$

$$\hat{b}_i(n+1) = \hat{b}_i(n) + \frac{\mu}{1-\gamma z^{-1}} e(n) \sin \omega_i n \quad (5)$$

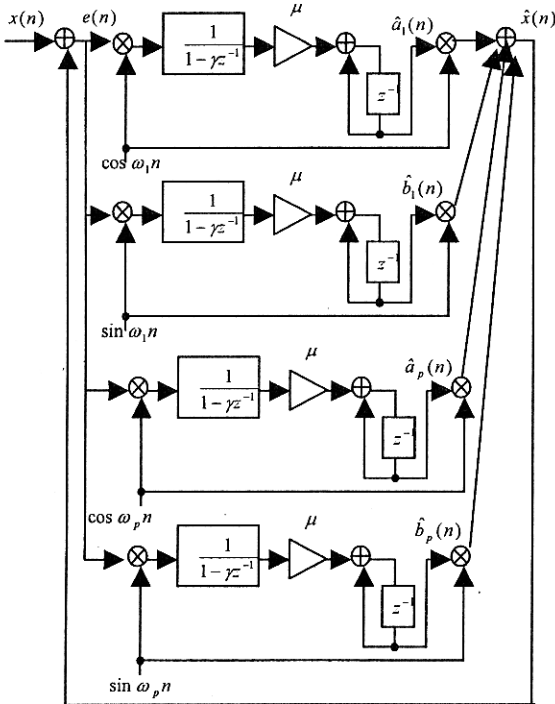


図 1. 推定法の構成

Fig.1 Flow diagram of the estimation method

$$e(n) = x(n) - \hat{x}(n) \\ = x(n) - \sum_{i=1}^p \hat{a}_i(n) \cos \omega_i n + \hat{b}_i(n) \sin \omega_i n \quad (6)$$

$\mu$  はステップサイズ、 $\gamma < 1$  で安定性を保証するために導入する。  $x(n)$  とその推定値  $\hat{x}(n)$  の差  $e(n)$  は式(6)で算出される。従来の LMS 法[5]はこの推定法の  $\gamma=0$  に相当する。

式(7)式に示す 4 周波からなる信号に対する追従特性を示す。ここで、 $(a_i, \alpha_i)$  と  $(b_i, \beta_i)$  という記述法を用いると、時間が経過する毎に、図 2 に示すように

$(0.0, 0.0) \rightarrow (4.0, -0.003) \rightarrow (0.0, 0.0) \rightarrow (4.0, -0.003) \rightarrow (0.0, 0.0)$  と変化させている。図 3 に推定結果を示す ( $\hat{a}_i(n)$  のみ示している)。この推定法が従来の LMS に比べ迅速に時変性に追従していることがわかる。

$$x(n) = \sum_{i=1}^4 a_i(n) \cos\left(\frac{\pi}{5} in\right) + b_i(n) \sin\left(\frac{\pi}{5} in\right) + \phi(n) \quad (7)$$

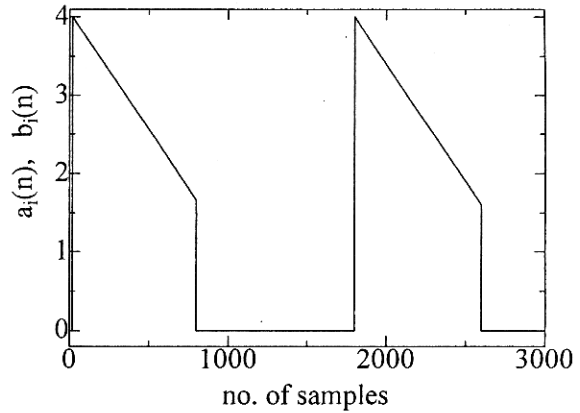


図 2. 時変な  $a_i(n)$  と  $b_i(n)$

Fig.2 Time-varying  $a_i(n)$  and  $b_i(n)$ .

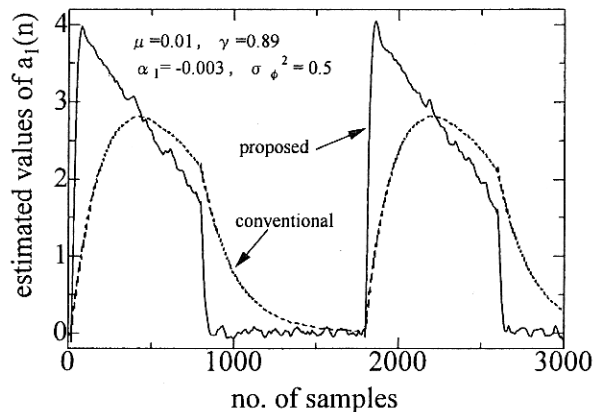


図 3. 加法的雑音がある 4 つの調和成分の波高値の推定特性 ( $\hat{a}_i(n)$  のみ図示)

Fig.3 Estimated values of 4 harmonic components in noise (only  $\hat{a}_i(n)$  is shown).

### 3. フーリエ係数推定法の特性解析

ここでは、式の記述の容易さから、まず、単一周波数の場合について説明し、その後で多周波の場合に拡張する。

#### 3.1 $p=1$ の場合

定常誤差を推定するために、推定法の定常状態にお

ける周波数特性を導出することは重要である。また、その導出により極の位置がわかるため、時間領域における振る舞いの直感的な理解を深めることができる。推定法が十分に収束している定常状態では、図1の  $x(n)$  から  $e(n)$  の経路は図4のようなシステムで記述できる。

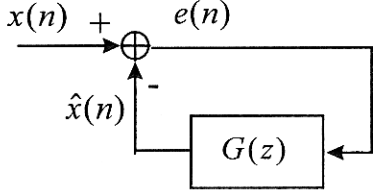


図4. 提案法の周波数領域での解釈

Fig.4 Interpretation of the estimation method in the frequency domain

図4の  $G(z)$  は文献[7]の方法を用いることにより式(8)のようになる。ここで、 $G_D(z)$  は式(9)で与えられる。

$$G(z) = \mu \frac{\cos \omega_1 z^{-1} - (1 + \gamma)z^{-2} + \gamma \cos \omega_1 z^{-3}}{G_D(z)}, \quad (8)$$

$$G_D(z) = 1 - 2(1 + \gamma) \cos \omega_1 z^{-1} + \{4\gamma \cos^2 \omega_1 + (1 + \gamma^2)\}z^{-2} - 2\gamma(1 + \gamma) \cos \omega_1 z^{-3} + \gamma^2 z^{-4} \quad (9)$$

更に、 $x(n)$  から  $\hat{x}(n)$  の経路の伝達関数  $F(z)$  は、式(10)で与えられ、 $F_D(z)$  は式(11)に示すものである。LMS法の  $x(n)$  から  $\hat{x}(n)$  の経路の伝達関数の振幅特性 ( $\mu=0.01$ ) と推定法の  $F(z)$  の振幅特性 ( $\mu=0.01, \gamma=0.8$ ) を図5に示す。同一のステップサイズ  $\mu$  では、LMS法が推定法より鋭い帯域通過特性を持ち、迅速な適応ができないことがわかる。

$$F(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{\cos \omega_1 z^{-1} - (1 + \gamma)z^{-2} + \gamma \cos \omega_1 z^{-3}}{F_D(z)} \quad (10)$$

$$F_D(z) = 1 + \{\mu - 2(1 + \gamma)\} \cos \omega_1 z^{-1} + \{4\gamma \cos^2 \omega_1 + (1 + \gamma^2) - \mu(1 + \gamma)\}z^{-2} + \gamma\{\mu - 2(1 + \gamma)\} \cos \omega_1 z^{-3} + \gamma^2 z^{-4} \quad (11)$$

図5において帯域通過特性の鋭さの理由を理解するために  $F(z)$  の極を求めることが必要である。Brownの方法[9]により式(10)式の極  $\rho_k, k=1 \sim 4$  を求める(付録参照)。式(A7)を満たす時、極の偏角が対象周波数と一致する。 $\mu=0.01$  に対して、この条件を満たす範囲で  $\gamma$  をかえた時の  $F(z)$  の極半径を図6に示す。LMS法が収束した時の  $x(n)$  から  $\hat{x}(n)$  の経路の伝達関数の極半径は約  $1 - \mu/2$  である[7]。これは、ほぼ  $\rho_1, \rho_2$  に相当する。図6から  $\gamma$  が1に近づくと  $\rho_1, \rho_2$  の極半径が小さくなり、逆に  $\rho_3, \rho_4$  の極半径は大きくなっていくことが分かる。

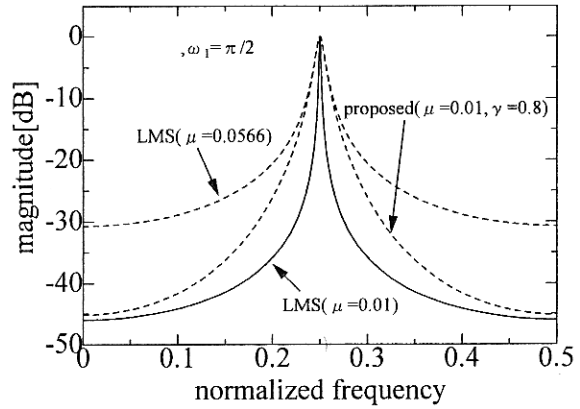


図5. LMS法と提案法の振幅特性(p=1)

Fig.5 Magnitude characteristics of the LMS and the estimation method in case that p=1

この推定法において、 $\mu=0.01, \gamma=0.8$  の場合、 $\rho_1, \rho_2$  の極半径は 0.9717 である。LMS法で極半径がこの値になるのは、 $\mu=0.0566$  であり、この振幅特性も図5に示す。同一の極半径の場合、付加された極  $\rho_3, \rho_4$  があるため、この推定法はLMS法よりより鋭い帯域通過特性を持つことが図5から分かる。結果として、推定法は、LMS法と比べ、同一のステップサイズ  $\mu$  の場合はより良い追従特性を持ち、同一の極半径の場合は加法性雑音に対しより耐性があるという中間的な特性をもつことが理解できる。

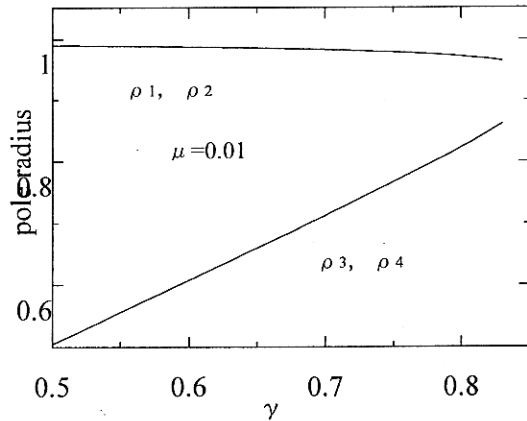


図6.  $\gamma$  と極半径との関係

Fig.6 Relationship between  $\gamma$  and pole radius

ここでは、次式に定義するフーリエ係数の推定値の2乗誤差  $\varepsilon_1(n)$  を推定精度の測度として用いる。

$$\varepsilon_1(n) = E[\{a_1(n) - \hat{a}_1(n)\}^2 + \{b_1(n) - \hat{b}_1(n)\}^2] \quad (12)$$

加法性雑音と正弦波は統計的に独立であるため、それぞれ、加法性雑音  $\phi(n)$  による  $\varepsilon_{\phi, \infty}$  と適応動作の遅れによる  $\varepsilon_{lag, \infty}$  を単独に求め、それらの和を求めればよい。

まず、時変性がないものとして、 $\varepsilon_{\phi, \infty}$ を求める。適応動作が十分収束している定常状態においては、式(13)に示すように、 $\hat{x}(n)$ は真値と有色化した雑音 $F(z)\phi(n)$ の和で近似できる。

$$\hat{x}(n) = \hat{a}_1(n) \cos \omega_1 n + \hat{b}_1(n) \sin \omega_1 n \\ \approx a_1(n) \cos \omega_1 n + b_1(n) \sin \omega_1 n + F_1 \phi(n) \quad (13)$$

従って、定常状態における $x(n)$ の推定誤差の分散 $\sigma_e^2$ は次式のように算出できる。

$$\sigma_e^2 = E[(x(n) - \hat{x}(n))^2] \approx E[(F_1(z)\phi(n))^2] \\ = \frac{\sigma_{\phi}^2}{2\pi j} \oint F_1(z) F_1(z) \frac{dz}{z} \\ = \frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu \sigma_{\phi}^2}{2-\mu} \frac{1+\gamma}{1+\gamma^2} \quad (14)$$

$\varepsilon_{\phi 1}(n) = 2E[(x(n) - \hat{x}(n))^2]$ であることに注意すると、時変性がない時の定常状態におけるフーリエ係数の推定値の平均2乗誤差 $\varepsilon_{\phi 1, \infty}$ は、式(15)のように算出できる。

$$\varepsilon_{\phi, \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{\phi 1}(n) = 2\sigma_e^2 = \frac{1}{1-\gamma} \frac{\mu \sigma_{\phi}^2}{2-\mu} \frac{1+\gamma}{1+\gamma^2} \quad (15)$$

### 3.2 p>1の場合

p=1の場合と同様、図1の定常状態における $e(n)$ から $\hat{x}(n)$ の経路の伝達関数 $G(z)$ を求めると以下のようになる。ここで、 $G_i(z)$ は式(8)で $\omega_1$ を $\omega_i$ に変えたものである。

$$G(z) = \sum_{i=1}^p G_i(z) \quad (16)$$

定常状態における $x(n)$ から $\hat{x}(n)$ の経路の伝達関数 $F(z)$ は式(17)で与えられる。

$$F(z) = \frac{\sum_{i=1}^p G_i(z)}{1 + \sum_{i=1}^p G_i(z)} \quad (17)$$

次に、式(18)に示すp>1の場合におけるフーリエ係数の推定値の平均2乗誤差 $\varepsilon_{\phi, \infty}$ を求める。

$$\varepsilon_{\phi, \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p E[\{a_i(n) - \hat{a}_i(n)\}^2 + \{b_i(n) - \hat{b}_i(n)\}^2] \quad (18)$$

$F(z)$ の複雑さのため、解析的に極が求められず、このままでは $\varepsilon_{\phi, \infty}$ の算出は困難である。従って、 $F(z)$ を式(19)のように近似する。式(19)の第2項は、 $\omega_i$ をノッチ各周波数とする低次ノッチフィルタを縦続接続したものであり、 $F(z)$ に関するこの近似は $\mu$ やpが小さい時妥当なものである。

$$F(z) = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^p G_i(z)} \approx 1 - \prod_{i=1}^p \frac{1}{1 + G_i(z)} \quad (19)$$

p=1の場合と同様に $\varepsilon_{\phi, \infty}$ を求めると、以下のようになる。

次に、加法性雑音がない状態で、時変なフーリエ係数に対して適応遅れによる推定値の平均2乗誤差を求

$$\varepsilon_{\phi, \infty} \approx \frac{2\sigma_{\phi}^2}{2\pi j} \oint F(z) F(z^{-1}) \frac{dz}{z} \approx \frac{1}{1-\gamma} \frac{2p\mu\sigma_{\phi}^2}{2-\mu} \frac{1+\gamma}{1+\gamma^2} \quad (20)$$

める。式(19)の共振特性を有する $F(z)$ に正弦波を入力した時の定常状態における出力を求めればよいため、z変換、逆z変換を介して、適応の遅れによる平均2乗誤差 $\varepsilon_{lag, \infty}$ は式(21)のように求められる。

$$\varepsilon_{lag, \infty} = \frac{4}{\mu^2} \sum_{i=1}^p \{\alpha_i + \beta_i\} \quad (21)$$

従って、フーリエ係数の推定値の平均2乗誤差 $\varepsilon_{\infty}$ は、式(20)と式(21)の和により次式のように求めることができる。この近似式の妥当性については、3.3の数値例で述べる。

$$\varepsilon_{\infty} \approx \frac{1}{1-\gamma} \frac{2p\mu\sigma_{\phi}^2}{2-\mu} \frac{1+\gamma}{1+\gamma^2} + \frac{4}{\mu^2} \sum_{i=1}^p \{\alpha_i + \beta_i\} \quad (22)$$

なお、 $\gamma$ が式(A7)を満足している場合には、正規化した対象角周波数と極の偏角が一致するが、式(A7)を超えて1に近づけると正規化した対象周波数の周りに極の偏角が広がることが分かっている。このことにより、周波数が多少変動しても提案法が有効であることが分かる。この場合については、4.で述べる。

### 3.3 数値例

ここでは、導出した推定値の平均2乗誤差の近似式(式(22))の妥当性について、 $\mu$ と $\gamma$ 等を変えた計算機シミュレーションによって確認する。比較は全て独立な30回のシミュレーション結果の集合平均によって行っており、 $\varepsilon_{\infty}$ は十分に収束している5000から8000サンプルまでの平均で算出した。シミュレーション結果を図7、図8に、その条件を以下に示す。

シミュレーション条件：

$$p : 4, 8, \quad \omega_i : \pi(p+1), \quad i=1 \sim p$$

$$\sigma_{\phi}^2 : 0.2, 0.5, \quad a_i, b_i : \text{全て} 5$$

$$\alpha_i, \beta_i : -0.003, -0.005$$

表1.  $\mu$ と $\gamma$ の組合せ

$\mu$	0.005	0.006	0.008	0.01	0.02
$\gamma$	0.90	0.89	0.87	0.86	0.80
$\mu$	0.04	0.06	0.08	0.1	
$\gamma$	0.73	0.68	0.63	0.6	

また、 $\mu$ と $\gamma$ は、式(A7)を満たすよう表1に示す組合せで用いた。図7、図8において、時変性の程度が大きくなると、 $\mu$ が小さい場合、急速に推定特性が劣化することが、近似値とシミュレーション値の双方で確認できる。加えて、 $\mu$ が小さい範囲では、近似値はシミュレーションをよく捉えている。しかし、p=8の場合、 $\mu$

が大きくなると、シミュレーション値からのズレは極めて大きい。これは、式(19)のように、低次のノッチフィルタの縦続接続と近似したためと考えられる。

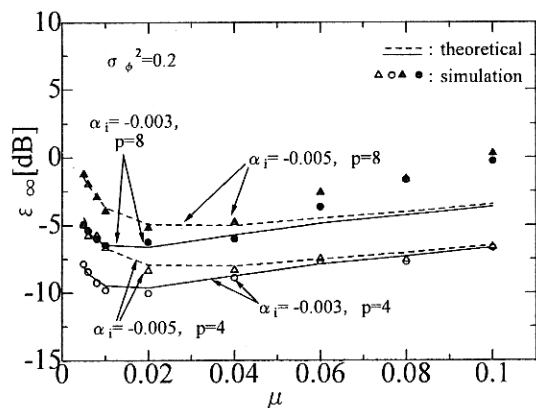


図7.  $\epsilon_{\infty}$ の近似値とシミュレーション値との比較1  
Fig.7 Comparison of theoretical and simulation values of  $\epsilon_{\infty}$ .

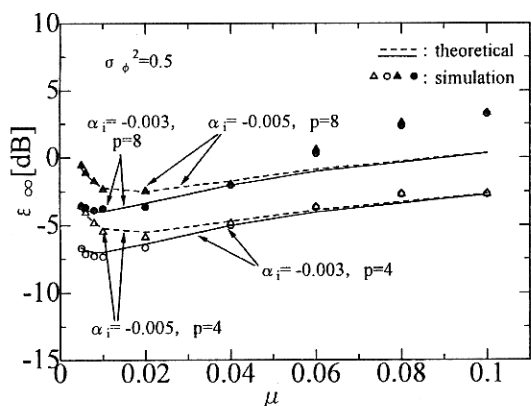


図8.  $\epsilon_{\infty}$ の近似値とシミュレーション値との比較2  
Fig.8 Comparison of theoretical and simulation values of  $\epsilon_{\infty}$ .

#### 4. 採譜への応用

楽音は基本波とその多くの高調波から構成され、かつ同一オクターブ上の音高は調和関係にない。各音高の基本波の振幅を推定することで採譜が可能であるため、演算量を減らすこととステップサイズの多様な選択ができるようにする目的で、式(23)式で示す各音高を中心周波数とする狭帯域BPFにより各成分に分解する。BPFの出力  $x_i(n)$  に対して、この推定法を用いて振幅の推定値  $\hat{a}_i(n), \hat{b}_i(n)$  を算出する。つまり、適応動作部分では  $p=1$  となっている。

$$H_i(z) = 1 - \frac{1 - 2 \cos \omega_i z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\lambda \cos \omega_i z^{-1} + \lambda^2 z^{-2}} \quad (23)$$

該当角周波数の正弦波の振幅が、前もって規定した閾値よりも大きい場合にその音高が検出される。

この実験では従来のLMS法では難しかった周波数変動を伴う楽音、具体的には、ビブラート演奏したギターの新演奏音を用いた。図9に楽譜を、図10に出力波形を示す。サウンドボードの制約から、標準化周波数は8[kHz]、16bit量子化してwav形式で録音する。線形位相のLPFで2[kHz]に帯域制限し1/2ダウンサンプリングした後、上述の処理を行って採譜を行った。

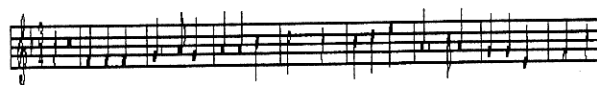


図9. テスト用の楽譜 (ふるさと)

Fig.9 A test piece

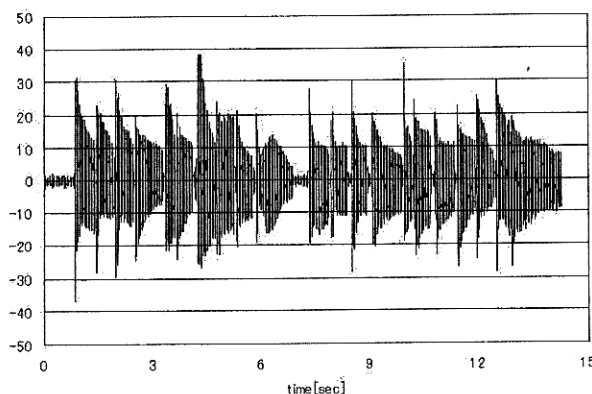


図10. 出力波形

Fig.10 Output waveform

図10の波形に対し、各音高の基本周波数の振幅を推定した後、各振幅を閾値と比較し音高の有無を判定した結果を図11に示す。なお、各パラメータの設定は以下の通りである。

- (1)  $\mu=0.01, \gamma=0.905$
- (2) 入力信号の電力判定を行い、閾値より小さい場合には  $\lambda$  を零に初期化する。それ以外は  $x_i(n)$  の過渡期間を短縮するため、式(24)により時変制御を行う。  $\lambda$  の最終値  $\lambda_{\infty}=0.995$ 、その時定数  $\tau_{\lambda}=0.93$  とした。

$$\lambda(n+1) = (1 - \tau_{\lambda})\lambda_{\infty} + \tau_{\lambda}\lambda(n) \quad (24)$$

図11より音高が正しく検出できており、電力検出の情報と楽音自体のテンポ情報を組み合わせることで採譜が可能であると考えられる。

#### 5. まとめ

本稿では、時変は振幅の正弦的信号に対するフーリエ係数推定法の特性解析を行い、近似の妥当な範囲と

限界を示した。また、定常状態における等価的なフィルタの偏角が対象周波数とほぼ一致する条件をもとめた。最後に、共振特性を広げることで、ビブラート程度の周波数変動を許容させ、楽音の採譜の可能性を示した。

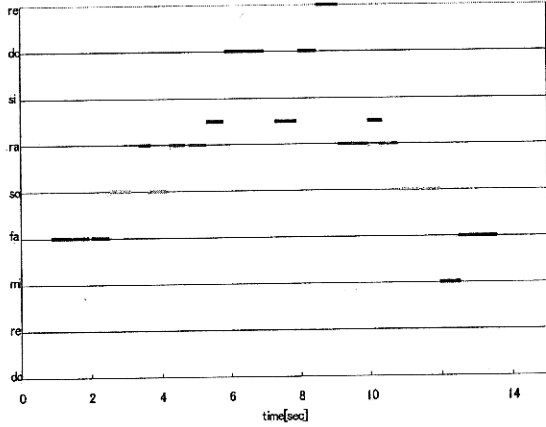


図 11. 推定結果  
Fig.11 Results of scale estimation

参考文献：

[1]F.Q.Braun, "Nonrecursive digital filters for detecting multifrequency code signals," IEEE Trans. Speech, Signal Processing, Vol.ASSP-23 no.3, pp.250-256, 1975  
 [2]I.Koval and G.Gara, "Digital MF receiver using discrete Fourier transform," IEEE Trans. Commun., Vol.COM-21, no.12, pp.1331-1335, 1975  
 [3]Y.Tadokoro and K.Abe, "Notch Fourier transform," IEEE Trans. Acoust., Speech Signal processing, Vol.ASSP-35, no.9, pp.1282-1288, 1987  
 [4]M.T.Kilani and J.F.Chicharo, "A constrained notch Fourier transform," IEEE Trans. Signal Processing, Vol.43, no.9, pp.2058-2067, 1995  
 [5]梅本敏孝, 青島伸治, "適応技術を用いた採譜に有効な周波数解析," 計測自動制御学会論文集, Vol.28, no.5, pp.619-625, 1992  
 [6]工藤憲昌, 田所嘉昭, "ノッチフィルタと適応アルゴリズムによる雑音中の信号に対するフーリエ係数推定法," 信学論(A), Vol.J83-A, no.4, pp.1467-1476, Dec., 2000  
 [7] 工藤憲昌, 田所嘉昭, "IIR 形 BPF と LMS アルゴリズムを用いたフーリエ係数推定法の理論解析とその特性改善," 信学論(A), Vol.J84-A, no.10, pp.1233-1243, Oct., 2001  
 [9]N.Kudoh Y.Takeuchi and Y.Tadokoro "A new LMS based Fourier analyzer for sinusoidal signals with time-varying amplitude", proceedings of TENCON'02, Vol.2, pp.913-916, Oct., 2002

[10]清水沢, FORTRANIV/77 による数値演算プログラム, サイエンス社, 1992

付録 極半径と偏角

ここでは、極半径と偏角について求める。式(11)の係数から、A, B, C, D を以下のようにおくと、極  $\rho_k$  は式(A5), (A6)で与えられる。

$$A = \frac{\{\mu - 2(1 + \gamma)\}}{2} \cos \omega_1 \quad (A1)$$

$$B = \frac{(1 + \gamma^2) - \mu(1 + \gamma)}{2} \quad (A2)$$

$$C = -\sqrt{\frac{\{\mu - 2(1 + \gamma)\}^2 - 16\gamma}{4}} \cos \omega_1 \quad (A3)$$

$$D = \sqrt{\frac{\{(1 + \gamma^2) - \mu(1 + \gamma)\}^2 - 4\gamma^2}{4}} \quad (A4)$$

$$\rho_1, \rho_2 = \frac{-(A + C) \pm j\sqrt{4(B + D) - (A + C)^2}}{2} \quad (A5)$$

$$\rho_3, \rho_4 = \frac{-(A - C) \pm j\sqrt{4(B - D) - (A - C)^2}}{2} \quad (A6)$$

C, D が実数である条件は、式(A7)で与えられる。

$$\frac{(1 - \gamma)^2}{1 + \gamma} \geq \mu \quad (A7)$$

以下、この条件が満たされている場合の極半径と偏角を求める。極の偏角は実部と極半径の比の  $\cos^{-1}$  を求めることで算出できる。式(A5)より、これらの極半径は以下のようになる。

$$\begin{aligned} |\rho_1| &= |\rho_2| = \sqrt{B + D} \\ &\approx \left[ \frac{1 + \gamma^2 - \mu(1 + \gamma)}{2} + \frac{1 - \gamma^2}{2} - \frac{\mu(1 + \gamma^2)}{2(1 - \gamma)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 - \frac{\mu}{2(1 - \gamma)} \end{aligned} \quad (A8)$$

極の  $\rho_1, \rho_2$  の実部にういても式(A7)が満たされている場合、以下のように求められる。ここで、 $\text{Re}[\ ]$  は実部を示す。

$$\begin{aligned} \text{Re}[\rho_1] &= \text{Re}[\rho_2] = -\frac{A + C}{2} \\ &\approx \left( 1 - \frac{\mu}{2(1 - \gamma)} \right) \cos \omega_1 \end{aligned} \quad (A9)$$

式(A8)と式(A9)より偏角がほぼ  $\omega_1$  となることが分かる。同様に、 $\rho_3, \rho_4$  の極半径、偏角は以下のように求められる。

$$|\rho_3| = |\rho_4| = \gamma \left( 1 + \frac{\mu}{2(1 - \gamma)} \right) \quad (A10)$$

$$\text{Re}[\rho_3] = \text{Re}[\rho_4] = \gamma \left( 1 + \frac{\mu}{2(1 - \gamma)} \right) \cos \omega_1 \quad (A11)$$