計測自動制御学会東北支部　第 209 回研究集会(2003.6.12)
資料番号　209-3

事前情報を活用する物理パラメータの同定

A Method of Identification for Physical Parameter using Advance Information

○黒沢忠輝*，大日方五郎**，川合忠雄**，佐藤勝俊*

〇Tadateru Kurosawa*，Goro Obinata**，Tadao Kawai**，Katsutoshi Sato*

*八戸工業高等専門学校，**名古屋大学大学院工学研究科

*Dept. Mechanical Eng., Hachinohe National College of Technology,

**Graduate School of Eng., Nagoya University

キーワード：同定(Identification), 線形分数変換(Linear Fractional Transformation), 左既約分解表現(Left Co-prime Factorization)

連絡先：〒039-1192　青森県八戸市大字田面木字上野平 16-1　八戸工業高等専門学校　機械工学科
黒沢忠輝，Tel:(0178)27-7272，Fax:(0178)27-7275，E-mail:kuro-m@hachinohe-ct.ac.jp

----

1．はじめに

対象とするシステムの動特性を正確に表す数式モデルを得ることは，故障診断，制御系設計，状態量の推定・予測などのモデルベースの多くの技術の前提として重要である．これは，モデリングやシステム同定と呼ばれる問題として，非常に多くの研究の中で取り上げられてきた(1)~(3)．これらで提案された同定法には，それを使用する様々な状況に対応できる方法が揃っているが，その中で質量や電気抵抗値などの物理パラメータの推定にターゲットを絞った方法は多くない．機械システムの故障診断や経年変化の把握では，特定の物理パラメータの変動値を知りたいし，車の積載量のように使用状況で変化する物理パラメータを把握したいということがある．さらに従来の方法には，次に述べるような事態に対応できる方法がないように思われる．例えば，力学系の運動方程式中の物理パラメータを同定する問題を考える時，同定をする前に質量の値は正確に知られているが粘性係数は漠然としか存在範囲しかわからないというように，推定しようとするパラメータごとに事前情報が異なる場合が多くある．ところが従来，このような事前情報を陽に活用し推定の精度を上げるための一般的な方法は知られていない．

本論文では，線形連続時間系の従来用いられてきた同定の枠組のひとつ(4)(5)を示し，その構造を利用して指定したパラメータだけを同定する新しい同定方法を提案する．また，この手法が故障診断などに有効であることを示す．

2．同定問題の定式化

本章では，まず 2.1 節で基準対象システムが知られているという条件下で，その基準対象からの変動分を同定する方法を記述し，そのあとの 2.2 節で本論文の目的である指定したパラメータだけを同定する方法を説明する．

2.1　既約分解に基づくパラメータ表現

同定の対象となるシステムは同定しようとするパラメータを係数として含む 1 入出力の伝達関数で表現できると仮定する．このモデルに含まれるパラメータをベクトル p で表し, 対象システムを $G_p(s)$と表すこととする. 物理パラメータの基準値が事前に知られており，これを p_0 とする．$G_p(s)$ と $G_{p0}(s)$はともに漸近安定であるとし，は次のように表現できると仮定する．

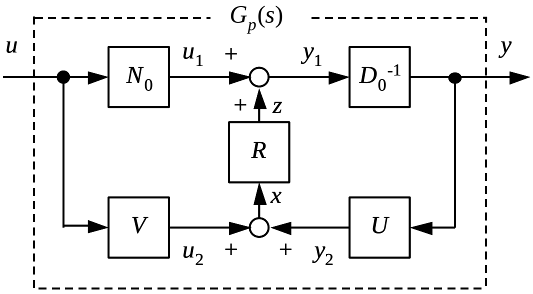
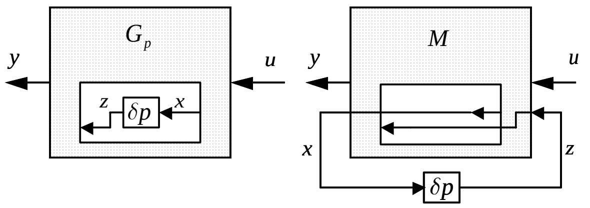


Fig.1 Left-coprime factorization-based description of G_p



(a) Uncertain System　　(b) LFT

Fig.2 Pulling out Uncertain Parameter

$$G_p(s)=\frac{N_0(s)+V(s)R(s)}{D_0(s)-U(s)R(s)} \tag{1}$$

ここに，$N_0(s)$，$D_0(s)$，$U(s)$，$V(s)$ は安定プロパな伝達関数であり，$N_0(s)$，$D_0(s)$ は $G_{p0}(s)$の既約因子である．すなわち，

$$G_{p0}(s)=\frac{N_0(s)}{D_0(s)} \tag{2}$$

である．もし$U(s)$，$V(s)$ が次の Bezout 方程式を満たすなら，

$$N_0(s)U(s)+D_0(s)V(s)=1 \tag{3}$$

式(1)は，$R(s)$ が安定プロパであるとき，コントローラ $U(s)/V(s)$ によって安定化される全てのシステムを表すことが知られており[6]，$N_0(s)$，$D_0(s)$，$U(s)$，$V(s)$ を既知として $R(s)$ を同定することは，システム $G_{p0}(s)$ がコントローラ $U(s)/V(s)$ によって制御されている閉ループの状態での同定法の表現として用いられてきた．しかしこの論文では，$U(s)$，$V(s)$ が式(3)を満たすことは仮定せず，また閉ループ系での同定問題をあつかうものでもない．ただし対象システムの左既約分解表現は利用する．ここで，既約分解と線形分数変換についての知られている結果をまとめておく．

結果１　$R(s)$ が安定であるとき，式(1)の $G_p(s)$は $U(s)/V(s)$ によって安定化されるすべての伝達関数のクラスを表す．

結果２　下線形分数変換（Lower Linear Fractional Transformation，以後，下 LFT または $\mathcal{F}_\ell$ と記述する）は次式で表される．

$$\mathcal{F}_\ell(M,R)=M_{11}+M_{12}R(I-M_{22}R)^{-1}M_{21} \tag{4}$$

ここで，

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{5}$$

である．Fig.1 のブロック線図は，

$$G_p(R)=\mathcal{F}_\ell(M,R) \tag{6}$$

で表すことができる．

2.2　同定問題とその解法

未知パラメータを推定する方法の仮定と手順を以下に示す．

仮定１　対象システムは１入力１出力系とする．

仮定２　G_{p0} は安定とする．すなわち未知パラメータの基準値 p_0 を G_{p0} が安定になるように選べる．

仮定３　パラメータ p の同定には G_{p0} の左既約分解に対応した表現(Fig.1)を用いるが，$U(s)$，$V(s)$ は式(1)を満足することは求めない．また$U(s)$，$V(s)$ は安定プロパであるとするが，$V^{-1}(s)$ が安定プロパであることは求めない．

（Step1）　未知パラメータベクトルの基準値 p_0 は与えられ, 仮定 2 は満足されるとする(仮定 2 は後の例でわかるように，それほど厳しい条件ではない)．未知パラメータベクトル p に対しての偏差 $\delta p_i=p_i-p_{0i}$ は，ほとんど全てのパラメータについて Fig.2 のように LFT を用いて整理できることは知られている[7]．対象システム G_p から未知パラメータの基準値 p_0 からの偏差 $\delta p_i=p_i-p_{0i}$ を分離する．

$$G_p(\delta p)=\mathcal{F}_\ell(M,\Sigma) \tag{7}$$

ここで，M，Σ は次のような行列である．

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} &= M\begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix} \\ z=\Sigma x &= \begin{bmatrix} \delta p_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \delta p_n \end{bmatrix} x \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

（Step2）　次に，Fig.2(b)を Fig.1 に書き換える．本論文では，簡単のため行列 Σ の対角項に δp_i が 1 度しか現れないと仮定する(一般には δp_i が繰り返し現れ，Σ のサイズは未知パラメータ数より大きくなる)．式(8)中の伝達関数を用いて，Fig.1 中の伝達関数は、

$$\left.\begin{aligned} &N_0=M_{11}M_{21}^{-1},\quad D_0=M_{21}^{-1},\quad U=M_{21}^{-1}M_{22} \\ &V=M_{12}-M_{11}M_{21}^{-1}M_{22},\quad R=-\delta p_i \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

のように与えられる．この書き換えができるためには，M_{21} が可逆である必要がある．これは D_0 が可逆であることを意味することに注意しよう．

（Step3）　書き換えられた Fig.1 において $N_0(s)$, $D_0(s)$, $U(s)$ ， $V(s)$ が安定プロパであれば， u_1 ， y_1 ， u_2 ， y_2 が入出力 u ， y から計算できる．このとき，

$$x(s) = V(s)u + U(s)y \tag{10}$$

$$z(s) = D_0(s)y - N_0(s)u \tag{11}$$

である．したがって対象システムの入出力 u ， y を観測し，式(10)，(11)によって x ， z を算出し， x から z への伝達特性として通常の方法により $R = \mathrm{diag}(\delta p_i)$ を同定することができる．例えば未知パラメータ R の同定は次のような方法が考えられる．推定誤差の評価を

$$J = \int_0^T (z_i(t) - \delta p_i x(t))^2 dt \tag{12}$$

のように定義すると，最小化の必要条件

$$\frac{dJ}{d\delta p_i} = 2\delta p_i \int_0^T x_i^2(t)dt - 2\int_0^T z_i(t)x_i(t)dt = 0 \tag{13}$$

より次式が得られる．

$$\delta p_i = \frac{\int_0^T z_i(t)x_i(t)dt}{\int_0^T x_i^2(t)dt} \tag{14}$$

３．簡単な例

3.1　着目した１つのパラメータの同定

次式で表される簡単な 1 自由度系

$$G_p(s) = \frac{y}{u} = \frac{1}{ms^2 + ds + k} \tag{15}$$

の各パラメータのうち質量 m , 剛性 k の値はわかっているが，減衰 d が未知としよう．

既知パラメータ $m = m_0$ ， $k = k_0$ とし， d を基準値 $d_0 > 0$ と偏差 δd を用いて次のように表す．

$$d = d_0 + \delta d \tag{16}$$

式(16)を用いて式(15)をブロック線図で表すと Fig.3 のようになる．偏差 δd の入力と出力を x および z とすると，入出力関係より，次式のように表せる．

$$\left.\begin{aligned} y &= \mathcal{F}_\ell(G_{p0}, \delta d)u \\ z &= \delta d x \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ここで基準システム G_{p0} は

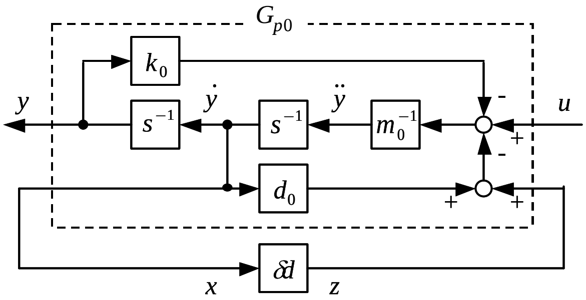


Fig.3　Block Diagram

$$G_{p0} = \frac{1}{m_0 s^2 + d_0 s + k_0} \tag{18}$$

であり，安定な系となっている．

次に $D_0(s)$ が可逆かつ安定プロパとなり，かつ式(2)を満足するような既約因子 $N_0(s)$, $D_0(s)$, $U(s)$, $V(s)$ を求める．これは唯一には定まらないが， D_0^{-1} が安定プロパとなるように例えば

$$\left.\begin{aligned} N_0(s) &= \frac{1}{(Ts+1)^2}, \quad & D_0(s) &= \frac{m_0 s^2 + d_0 s + k_0}{(Ts+1)^2} \\ V(s) &= 0, & U(s) &= \frac{s}{(Ts+1)^2} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

と選ぶことができる．ここで T は正の実数で任意であるが，ノイズなどの関わりで推定精度に影響を及ぼすので，適切に選択する必要がある(その選択方法は後述する)．以上の設計により，観測した入力 u と出力 y を用いて式(10)，(11)から偏差 δd への入力 x および出力 z が得られ，式(14)により δd が一意に求められる．

続いて，観測ノイズの影響を考慮した場合について検討する．入力 u または出力 y に観測ノイズが含まれる場合，x および z にノイズが含まれ，δp は不変推定量とならない．そこで式(19)における設計パラメータ T の効果をシミュレーションにより明らかにする．対象システムは式(15)で表され, 既知パラメータを $m_0 = 1$, $k_0 = 1$ とし，また推定するパラメータの真値 $d = 0.2$ とする．本システムの固有角周波数は $\omega_0 = 1$ であることは自明である．推定値を $\hat{d} = d_0 + \delta d$ とし，真値に対し 10％の誤差をもつ基準値 $d_0 = 0.18$ からの偏差 δd を

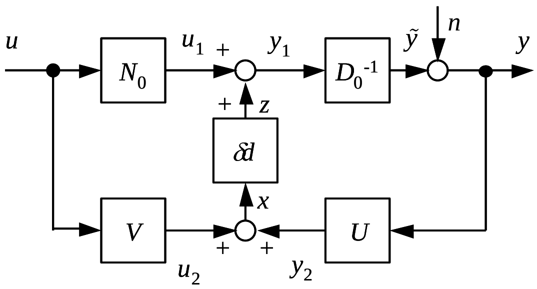


Fig.4　Measurement Noise

推定する. 対象システムへの入力 u は白色ノイズとし，出力 y には Fig.4 に示すようにノイズ n が含まれる．ここで n は白色ノイズとする．Fig.5 に，S/N 比を

$$S/N = \frac{E\{n^2\}}{E\{\tilde{y}^2\}} \tag{20}$$

とし，S/N ＝0.01 となる入力 u と出力 y の 100 組のデータを作り，これらのデータについて，推定結果に及ぼす設計パラメータ T の影響を示す．シミュレーションでの微分方程式の解法では，固有角周波数に対して十分に連続系としての性質が現れ，かつ計算精度が保たれるように配慮して，時間刻みを１[msec]とした．また, 式(14)を用いて δd を計算する際の時間間隔 T は 10[sec]として，１[msec]刻みのデータを加算して積分値を近似した．横軸は式(19)における $1/T$，すなわち２次のローパスフィルタ $1/(Ts+1)^2$ の遮断周波数であり，縦軸は真値に対する推定値の誤差を表す．また，Fig.5 中, Ave.は推定値 100 事例の誤差の平均値を表し，Max.，Min.は 100 事例中の誤差の最大および最小値である. 図より対象システムの固有角周波数 ω_0 の前後に良好な範囲があり, ±1%未満の推定結果を得ることができる．また，$1/T$ ＝3[rad/sec]あたりまで，ほぼ推定値の不偏性が成立していることがわかる．このように既約分解について，事前情報に基づく基準システムに対して適切なフィルタリング要素を既約因子として与えることにより，推定の向上が見込まれる．

3.2 他パラメータの変化による着目したパラメータ推定への影響

着目した以外のパラメータの変化による影響を調べるため，以下のような検証を行った．対象システムは式(15)とし，Fig.6 のように m，d，k それぞれの推定器を設計し，同時にそれぞれの推定を行う．基準シス

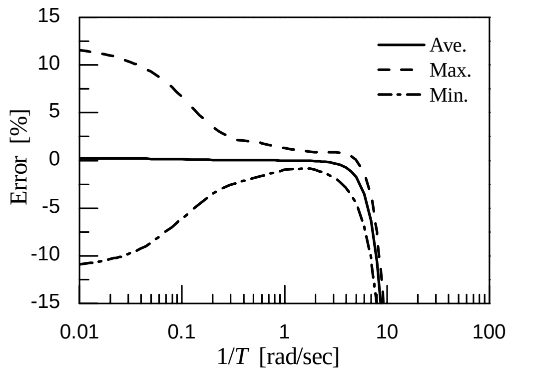


Fig.5　Identification to d

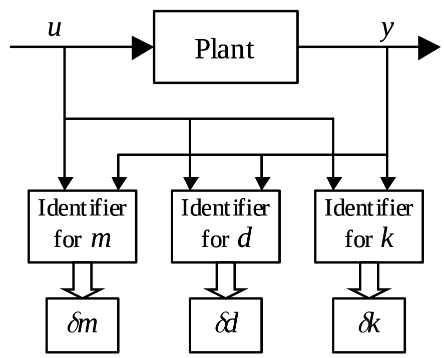
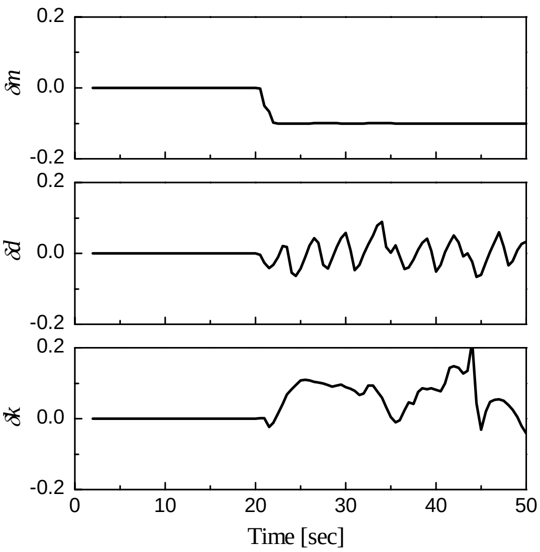
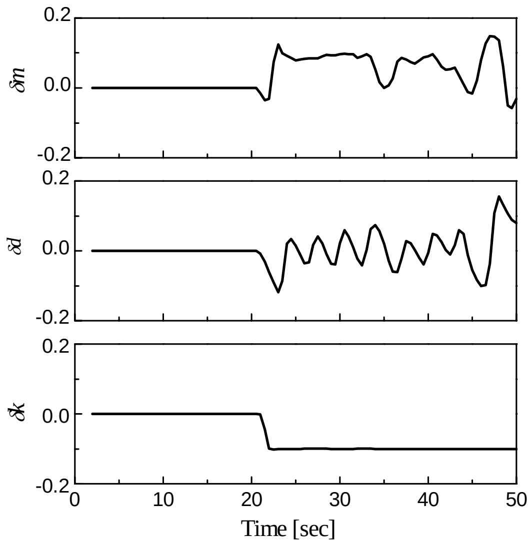


Fig.6　Real Time Identification



(a)　Parameter Varying to m



(b)　Parameter Varying to k

Fig.7　Identification Result

テム G_{p0} を $G_{p0}=G_p$, すなわち実システム初期値と同一とした場合の逐次推定結果を Fig.7 に示す．同定の計算は，1 組の(x, z)の離散値が追加されるごとに 2[sec]前の離散値を 1 組捨てるようにして δm，δd，δk を計算し（2[sec]の時間窓），各パラメータの時間変化もつかまえるようにした． Fig7 では，0.5[sec]毎の各推定値を時系列に表示している(直線補間表示)． Fig.7(a)は $t=20$[sec]においてパラメータ m をステップ状に変化させた場合，Fig.7(b)は $t=20$[sec] においてパラメータ k をステップ状に変化させた場合である．どちらの場合においても変化したパラメータに対する推定器は変化に追従した推定を行っているが，それ以外の推定器では推定値が変動することがわかる．この結果は，着目していないパラメータ変化が起きたときに推定結果が影響を受けることを示している．着目していないパラメータの変動では不規則な変化が見られるので，あらかじめ変化パターンが知られている場合には，その変化パターンと比較することによって想定しているうちどのパラメータに変化がおきたかを知ることができると思われる．

4．多自由度系の構造パラメータ同定

前章までに未知パラメータが１つの項に存在する場合について，１自由度系を例として同定法を述べた．しかし実際には多自由度系のようにパラメータが状態方程式や伝達関数の複数項に存在する場合が多い．そこでこのような対象に本手法を用いた場合について例を示す．多自由度系の例として，建築構造物モデル(8)を用い，Fig.8 に示す．文献では地震等に対する構造物の振動制御問題を扱っているが，本研究ではアクチュエータを同定のための入力装置とし，構造パラメータのみを文献のものと同一とし，Table.1 に示す．文献より対象システム $p_f(s)$は

$$P_f(s)=\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & 0 \end{array}\right] \tag{21}$$

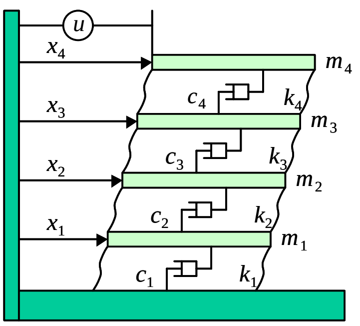


Fig.8 Dynamical model of 4-degree-freedom Structure

で表される．ここで，

$$\left.\begin{aligned}
&A=\begin{bmatrix} O_{4\times4} & I_{4\times4} \\ -M_f^{-1}K_f & -M_f^{-1}C_f \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} O_{4\times1} \\ M_f^{-1}F_f \end{bmatrix}, \\
&C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & O_{1\times4} \end{bmatrix}, \\
&M_f=\mathrm{diag}[m_1 \quad m_2 \quad m_3 \quad m_4], \\
&C_f=\begin{bmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 & -c_4 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4 \end{bmatrix}, \\
&K_f=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}, \\
&F_f=[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

である．

［問題設定］未知パラメータを k_3 とする． k_3 は式(22)中の K_f にあるように複数の行および列に存在する．

$k_3=k_{30}+\delta k$ とすると，式(21)は

$$P_f(s)=\left[\begin{array}{c|c} A_{f_0}+\delta A_f & B_f \\ \hline C_f & 0 \end{array}\right] \tag{23}$$

となる．よって式(22)は

$$\left.\begin{aligned}
&A_{f0}=\begin{bmatrix} O_{4\times4} & I_{4\times4} \\ -M_f^{-1}K_{f0} & -M_f^{-1}C_f \end{bmatrix}, \\
&\delta A_f=\begin{bmatrix} O_{4\times4} & O_{4\times4} \\ -M_f^{-1}\delta K_f & O_{4\times4} \end{bmatrix}, \\
&K_{f0}=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_{30} & -k_{30} & 0 \\ 0 & -k_{30} & k_{30}+k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix}, \\
&\delta K_f=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta k_3 & -\delta k_3 & 0 \\ 0 & -\delta k_3 & \delta k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

となる．次に式(24)中のδA_fを，次式のように表す．

$$\delta A_f=L\delta k_3 H \tag{25}$$

ここで，

Table.1 Primary Structure

m_1	1.62	[kg]
m_2	1.48	[kg]
m_3	1.48	[kg]
m_4	2.20	[kg]
k_i (i=1,…,4)	2600	[N/m]
c_i (i=1,…,4)	0.08	[Ns/m]

$$
\left.\begin{array}{l} L = \begin{bmatrix} O_{1\times4} & 0 & -\frac{1}{m_2} & \frac{1}{m_3} & 0 \end{bmatrix}^T \\ H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & O_{1\times4} \end{bmatrix} \end{array}\right\} \tag{26}
$$

である．すなわち

$$
\left.\begin{array}{r} \dot{x} = A_0 x + Bu + Lz \\ y = Cx \\ \tilde{x} = Hx, z = \delta k \tilde{x} \end{array}\right\} \tag{27}
$$

のように δk_3 をゲインとするフィードバックシステムに書き換えることができ，

$$
\begin{aligned} \begin{bmatrix} y \\ \tilde{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} C(sI - A_0)^{-1}B & C(sI - A_0)^{-1}L \\ H(sI - A_0)^{-1}B & H(sI - A_0)^{-1}L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ z \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{28}
$$

の LFT 表現に帰着する．式(28)を用いて式(9)を計算すると D_0^{-1} はプロパではない．そこで式(2)を満たすために，安定プロパな伝達関数 W を用い，$\tilde{N}_0$，$\tilde{D}_0$，$\tilde{U}$，$\tilde{V}$ が安定プロパで, かつ $\tilde{D}_0^{-1}$ が安定プロパとなるよう次式のような変換を行う．

$$
\begin{bmatrix} \tilde{N}_0 & \tilde{D}_0 & \tilde{U} & \tilde{V} \end{bmatrix} = W \begin{bmatrix} N_0 & D_0 & U & V \end{bmatrix} \tag{29}
$$

本問題の場合，式(9)から得られる D_0 は分母が 5 次，分子が 8 次となるため，W を

$$
W = \frac{1}{(Ts+1)^3} \tag{30}
$$

として，D_0^{-1} および D_0 が安定かつプロパになるようにした．シミュレーションは対象システムへの入力 u は白色ノイズとし, 出力 y に S/N ＝0.01 のノイズが含まれるものとして，100 組のデータについて推定を行った．微分方程式の解法では，4 次までの固有角周波数に対して十分に連続系としての性質が現れ，かつ計算精度が保たれるように配慮し，時間刻みを 0.1[msec]とした. また式(14)を用いて δk_3 を計算する際の時間間隔 T は 1[sec]として，0.1[msec]刻みのデータを加算して積分値を近似した．Fig.9 に，推定結果に及ぼす設計パラメータ T の影響を示す．実システムの 1 次の固有周波数は $\omega_1 = 13.2$ [rad/sec]であり, この付近以下に遮断周波数 $1/T$ を合わせることで，推定結果の 100 組の平均値 Ave.は不偏性を保っており，また $1/T$ が固有角周波数近辺のときに最も良い推定結果が得られる．しかしこれより大きな値を採用すると，推定値の不偏性が失われることがわかる．

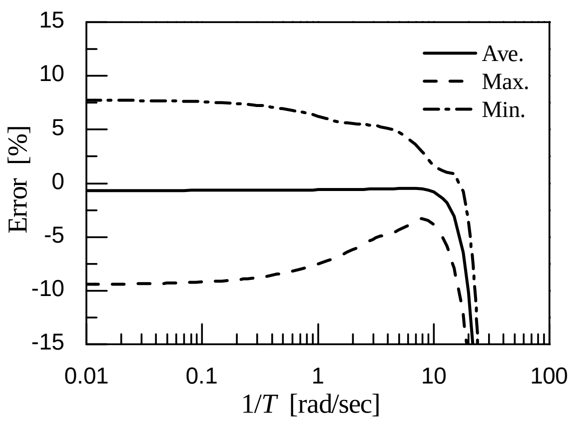


Fig.9　Identification to k_3

5．おわりに

本研究によって得られた結果をまとめる．

(1) 着目したパラメータだけを同定するための方法を提案した．

(2) 提案した同定法の枠組みを成立させるためには，定義するいくつかの伝達関数を安定プロパなものにする必要があるが，その際に導入する任意性のある伝達関数がフィルタとして働き推定結果に及ぼす影響を例題によって明らかにした．

(3) いくつかのパラメータに変化が起きるような状況で本同定法を使用した場合，パラメータ推定値は他のパラメータ変化の影響を受けるが，着目しているパラメータの変動パターンが知られている場合にはそのパラメータに変動が起きたかを識別することができることがわかった．

文　献

(1) L. Ljung, System Identification Theory for the User Second Edition, Prentice-Hall, (1999).

(2) 片山,システム同定入門，朝倉書店，(1994).

(3) 足立 修一：MATLAB による制御のためのシステム同定，東京電機大学出版局，(1996).

(4) P. M. J. Van den Hof, R. J. P. Schrama, Identification and Control -Closed Loop Issues, Vol.31, No.12, pp.1751-1770, (1995).

(5) S. Dasgupta, B. D. O. Anderson, A Parameterization for the closed-loop Identification of Nonlinear Time Varying Systems, Automatica, Vol.32, No.149, pp.1349-1360, (1996).

(6) K. Zhou, J. C. Doyle, K. Glover, Robust and Optimal Control, Prentice-Hall, (1996).

(7) S. Boyd, C. Barratt, Linear Controller Design - Limits of performance -, Prentice Hall, (1991).

(8) 西村，野波，中田，アクティブ動吸振器による多自由度構造物の極配置指定領域指定 H_∞ 制御，機論 C, Vol.61, No.584, pp.1351-1358, (1995).