

スミス法のロバスト安定性について

Robust Stability Of Smith Predictor

山形大学○呉守利 渡部慶二 村松鋭一 有我祐一 遠藤茂

Shouli Wu, Keiji Watanabe, Eiich Muramatsu Yuichi Ariga Sigeru Endo

Yamagata University

Abstract We study the stability of Smith predictor and approximate one. It is shown that the stability range of the latter is wider than that of the former.

キーワード：スミス法 (Smith predictor), 近似スミス法 (Smith predictor), 安定範囲, ロバスト安定, 危険区域。

連絡先：〒992-0062 山形大学理工学研究院システム情報工学専攻 渡部研究室

呉守利, Tel.: 090-6254-4614 E-mail: tr360@dip.yz.yamagata-u.ac.jp

1. まえがき

むだ時間系の制御としてよく知られている方法に図1に示されるスミス法がある。 $G_p(s)e^{-sL_p}$ は安定的な制御対象,

$G(s)(1-e^{-sL})$ はスミス予測器, $G_c(s)$ は制御器である。

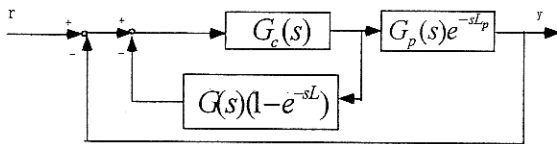


図1 実際のスミス法の構成

制御対象とそのモデルの間にミスマッチがあると, ロバスト安定という問題が出て来るが, 従来は制御構造を含めた十分な検討がなされていなかった¹⁾。本研究では $G_p = G, L_p \neq L$ ときのロバスト安定性の構造を検討する。

実際のむだ時間要素を組んだ制御器が実現できない場合, むだ時間 Pade 近似²⁾することがある。そのときのロバスト安定範囲についても検討する。

2. スミス法のロバスト安定性

図1のスミス法を考え, 制御系の伝達関数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{r(s)} &= \frac{G_c G e^{-sL_p}}{1 + G_c G (1 - e^{-sL}) + G_c G e^{-sL_p}} \quad \dots (1) \\ &= \frac{G_c G e^{-sL_p}}{1 + G_c G} \frac{1}{1 + f(s)} \end{aligned}$$

$$f(s) = \frac{G_c G}{1 + G_c G} (e^{-sL_p} - e^{-sL})$$

.....(2)

スミス法が安定であるための必要十分条件は, ナイキストの安定判別法により, $f(j\omega)$ のベクトル軌跡が (-1, 0) 点の右側を通ることである。

$$|f(j\omega)| = \left| \frac{G_c(j\omega)G(j\omega)}{1+G_c(j\omega)G(j\omega)} \right| \left| 2 \sin \frac{1}{2} \omega(L_p - L) \right| \dots\dots(3)$$

はすべての ω ($\omega \geq 0$) に対し, $|f(j\omega)| \leq 1$ とする, $|L_p - L|$ の最大値を A_{\max} とする。むだ時間の mismatch に対し, ロバスト安定にする L_p/L は

$$\begin{cases} \frac{L_p}{L} < 1 + \frac{A_{\max}}{L}, (L_p > L) \\ \frac{L_p}{L} > 1 - \frac{A_{\max}}{L}, (L_p < L) \end{cases} \dots\dots(4)$$

である。

$G_c = 5, G = 1/(1+s)$ の場合, $A_{\max} = 0.334$ であり, (4)式で求めた安定範囲と $f(j\omega)$ のベクトル軌跡から求めたものを図2に示す。

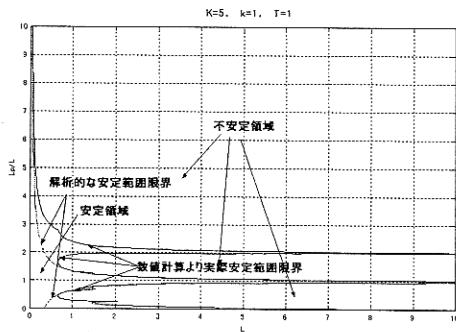


図2 むだ時間ロバスト安定の範囲 ($G_c G = 5/(1+s)$)

図2からわかるように, (4)式で $|G_c(j\omega)G(j\omega)/(1+G_c(j\omega)G(j\omega))| < 1$ でも, $L_p > L$ と $L_p < L$ の両側で不安定になる。これは図3に示すように $e^{-j\omega L_p} - e^{-j\omega L}$ のベクトルの向きが左向きで, 大きさが1を超える状態が生じるからである。

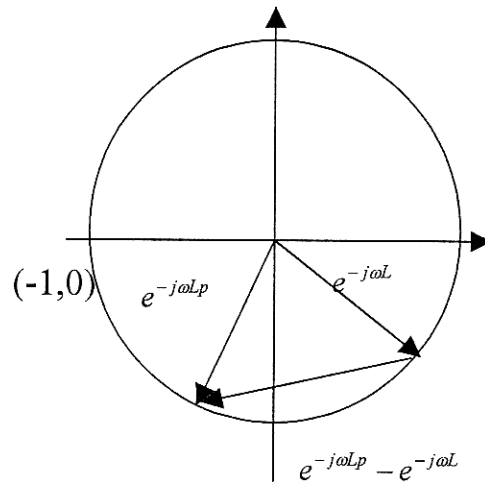


図3

3. 近似スミス法のロバスト安定性

スミス法予測器の e^{-sL} を $(1-0.5s)/(1+0.5s)$ に置き換えると, 近似スミス法になる。開ループ伝達関数は次式となる。

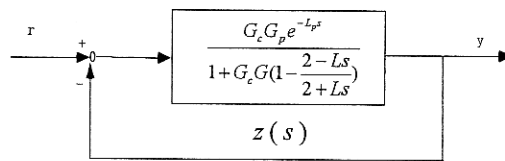


図4

$$f(s) = \frac{e^{-L_p s}}{\frac{1}{G_c(s)G(s)} + \frac{2Ls}{2 + Ls}}$$

$$f(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)} + \frac{2j\omega L}{2 + j\omega L}} e^{-j\omega L_p}$$

任意の ω , L に対して $|f(j\omega)| < 1$ を

満足する場合はもちろんシステム安定である。次に, この条件を満足しない場合

について検討しよう。

ある $G_c(s)G(s)$ に対して $f(j\omega)$ の軌跡が L と ω によって違うが、同じ ωL の $\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)} + \frac{2j\omega L}{2+j\omega L}$ の軌跡が曲線ひとつになる。 ωL によってちがう曲線の間に $\frac{2j\omega L}{2+j\omega L}$ の軌跡(円の半分)に沿って平行移動している。

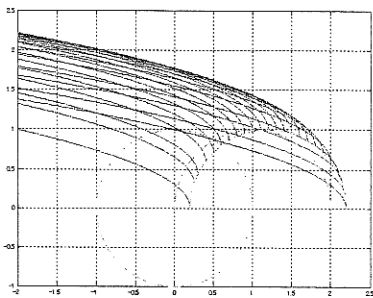


図 5

$\omega L=0$ の時 $\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)}$ である。

システム十分安定は次のように考えしよう。

$\alpha = 2 \tan^{-1}(\frac{\omega L}{2})$ とすると

1. $\alpha > \frac{\pi}{3}$ のとき, $|f(j\omega)| < 1$ とする。
2. $\alpha > \frac{\pi}{3}$ のとき, 位相が 1 より小さくにする。

まず $\alpha > \frac{\pi}{3}$ のとき, 任意的な $G_c(s)G(s)$ に対して $\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)} + \frac{2j\omega L}{2+j\omega L}$ の軌跡が単位円に入らなくにする。

単位円より違う ωL の曲線集合はバラバラになってしまったが, 曲線集合と

単位円の相対位置は代表的な $\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)}$ から見るとひとつ区域になる。

この区域は単位円が円心(-1,0), 半径 1 の円に沿って移動しており, 覆う範囲が安定のために入られない危険区域と呼ばれる。(図 6)。これに対し, $G_c(j\omega)G(j\omega)$ が入られない危険区域が求められる(図 7)(曲線の上の区域)。

危険区域図

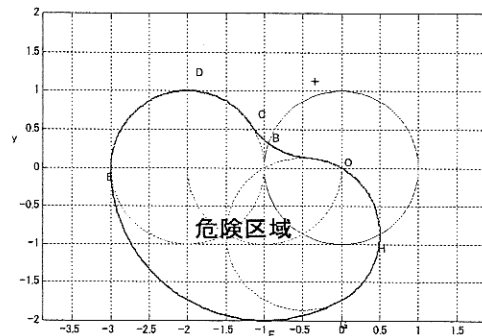


図 6

危険区域図($G_c(j\omega)G(j\omega)$ ナイキスト線図に対して)

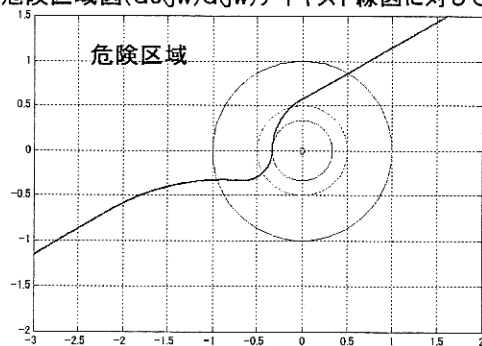


図 7

一方, $\alpha < \frac{\pi}{3}$ のとき

$\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)} + \frac{2j\omega L}{2+j\omega L}$ のベクトルは単

位円から出ていくときの位相と ωL_p の和

が 180° より小さいにすると, L_p/L の関係を求めよう。

ある $G_c(s)G(s)$ に対して $f(j\omega)$ の軌跡は単位円から出ていくときの ωL と ωL_p が求められる。 $G_c(s)G(s)$ によって ωL_p は違

うが, 一番小さい ωL_p は $\frac{1}{G_c(j\omega)G(j\omega)}$ が危険境界に沿っているときである(図 6)。これによって ωL は 0 から $\frac{2}{\sqrt{3}}$ まで変化して, 対応の ωL_p が求められる。ついに L_p/L と

L の関係は図 8 のように示された。

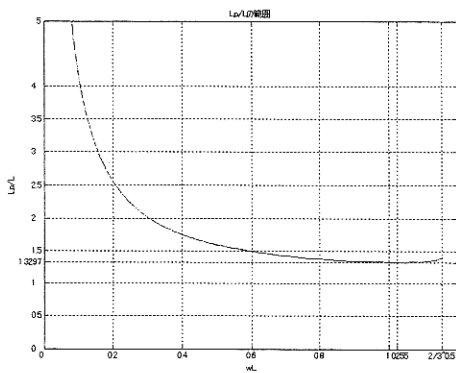


図 8

図 8 から見ると, 任意的な $G_c(s)G(s)$ に対してナイキスト線図が図 7 の危険区域に入らなければ $\frac{L_p}{L} < 1.3297$ の範囲で安定である。

余裕があれば, $\frac{L_p}{L} < M$ の範囲で安定させる条件も求められる。

$M=2.22$ のとき $G_c(j\omega)G(j\omega)$ が入られない危険区域が図 9 に示される。

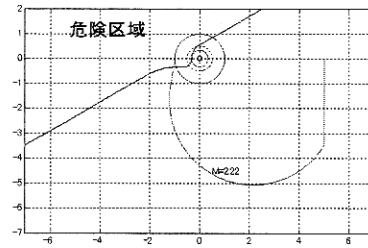


図 9

上記の例の近似スミス法とスミス法と比較を図 10 に表す。スミス法と異なり, $L_p/L < 2.22$ で安定であることがわかった。

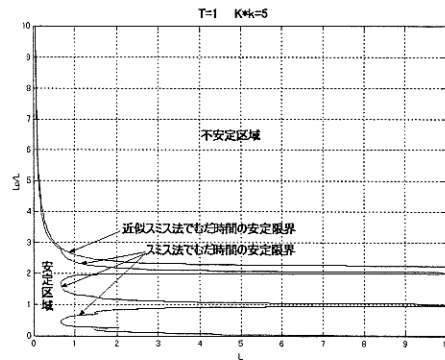


図 10 スミス法と近似スミス法の比較

4. あとかき

本研究では, むだ時間系でスミス法のむだ時間ミスマッチに対するロバスト安定領域を求める方法が明らかになった。このほかに, 近似スミス法によってスミス法より広い安定領域を得られる条件が明らかになった。

5. 文献

- 1, 渡部慶二, むだ時間システムの制御, 計測自動制御学会, 1993年
- 2, 茅陽一, 自動制御工学, 共立出版社, 1969年