

スケーリングを考慮した状態空間デジタルフィルタの L_2 感度最小化問題の新しい解法

A Novel Solution to L_2 -Sensitivity Minimization of State-Space Digital Filters Subject to L_2 -Scaling Constraints

八巻俊輔*, 阿部正英*, 川又政征*,

Shunsuke Yamaki*, Masahide Abe*, Masayuki Kawamata*

*東北大学大学院工学研究科電子工学専攻

*Department of Electronic Engineering, School of Engineering, Tohoku University

キーワード : 状態空間デジタルフィルタ (state-space digital filter), L_2 感度 (L_2 -sensitivity), L_2 スケーリング
制約 (L_2 -scaling constraint),

連絡先 : 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-05 東北大学大学院 工学研究科 電子工学専攻 川又研究室
八巻俊輔, Tel.: (022)795-7095, Fax.: (022)263-9169, E-mail: yamaki@mk.ecei.tohoku.ac.jp

1. はじめに

線形システムを表現する方法として、伝達関数による方法と状態空間表現による方法がある。伝達関数による方法は、システムの入力と出力のみに着目し、入力と出力との関係を周波数領域での伝達関数で表すものである。それに対して、状態空間表現による方法は、システムの入力と出力だけではなく、内部状態を記述する状態変数というものを導入し、入力と出力、状態変数の相互関係を時間領域の方程式で表すものである。この状態空間表現では、システムの内部状態まで記述するため、システムの性質をより詳細に知ることができ、システムの合成や誤差評価などの理論的な解析に適している。

状態空間デジタルフィルタの係数感度を評価するための評価関数がこれまでにいくつか提案

されている^{1, 2, 3)}。その代表的な評価関数として、 L_1/L_2 混合感度と L_2 感度がある。このうち L_1/L_2 混合感度は、平衡実現というフィルタ構造のときに最小値をとることがすでに知られている⁴⁾。一方、 L_2 感度は、係数量子化誤差の評価量としては L_1/L_2 混合感度よりも妥当な評価量とされており、低係数感度フィルタの合成等に有用であるため、 L_2 感度の最小化がこれまでに検討されてきた。 L_2 感度最小化問題は非線形方程式を解く問題に帰着するため、解析的な解を導出するのは非常に困難である。これまで提案されてきた手法としては、非線形方程式を差分方程式化して逐次的計算で最小値に近づける方法^{5, 6)}や2次のデジタルフィルタのみを対象として非線形方程式を代数方程式化して閉じた形で最適解を得る方法⁷⁾がある。これらの方法はすべて、内部状態のオーバーフローを考慮しない、いわゆるスケーリングを考慮しない

L_2 感度最小化である．

そして近年，内部状態のオーバーフローを抑制するための制約条件を組み込んだ L_2 感度最小化問題がとりあげられ，その問題に対する解法が難元らによって提案された^{8, 9)}．彼らの提案法は，スケーリング制約条件を座標変換行列に組み込み，準ニュートン法を用いて逐次的に最適解を得る方法である．しかし，この方法は線形探索などの複雑な計算を必要とし，かつ，最適な L_2 感度最小構造に収束するまでに多くの繰り返し計算を要するため，改善の余地がある．

本論文では，スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題に対する新たな解法を提案する．まず，状態空間デジタルフィルタの L_2 感度の定義を示し，スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題が定式化される．次に，変換行列に制約条件を組み込むことにより，スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題がスケーリングを考慮しない L_2 感度最小化問題と同じ形式になることが示される．そして，スケーリングを考慮しない L_2 感度最小化問題の解法⁶⁾を利用して最適化を行う．最後に，計算例を用いて本提案法の有効性を示す．本提案法は，準ニュートン法を用いた従来法^{8, 9)}とはアプローチが全く異なり，かつ準ニュートン法を用いた従来法よりもはるかによい収束特性を実現する．

2. 状態空間デジタルフィルタの L_2 感度解析

本章では，状態空間フィルタについて解説し，係数量子化誤差の評価量である L_2 感度について説明する．

2.1 状態空間デジタルフィルタ

状態空間デジタルフィルタのブロック図をFig. 1に示す．一般に， N 次の離散時間線形システムの

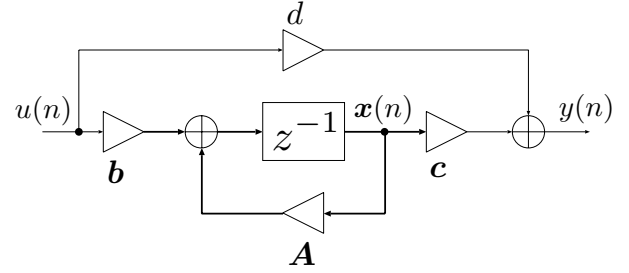


Fig. 1 状態空間デジタルフィルタ

状態方程式は，

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(n) + \mathbf{b}u(n) \quad (1)$$

$$y(n) = \mathbf{c}\mathbf{x}(n) + du(n) \quad (2)$$

と表わされる．ここで， $u(n)$ は入力信号， $y(n)$ は出力信号， $\mathbf{x}(n) \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ は状態変数である．また， $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ， $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^{N \times 1}$ ， $\mathbf{c} \in \mathbf{R}^{1 \times N}$ ， $d \in \mathbf{R}$ はシステムの係数行列である．このように状態空間表現されたシステムの伝達関数 $H(z)$ は，

$$H(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d \quad (3)$$

である．ここで， \mathbf{I} は N 次の単位行列である．

2.2 L_2 感度

状態空間デジタルフィルタの係数量子化誤差の大きさを評価する評価関数として， L_2 感度が定義されている．状態空間デジタルフィルタの L_2 感度 $S(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ は以下のように定義されている^{5, 6)}．

$$S(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \left\| \frac{\partial H(z)}{\partial \mathbf{A}} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\partial H(z)}{\partial \mathbf{b}} \right\|_2^2 + \left\| \frac{\partial H(z)}{\partial \mathbf{c}} \right\|_2^2 \quad (4)$$

ただし，一般に伝達関数行列 $G(z)$ の L_2 ノルムは式(5)で定義される．

$$\|G(z)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} G(z)G^T(z^{-1}) \frac{dz}{z}} \quad (5)$$

また，以下のリアプノフ方程式

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{A}\mathbf{K}_i\mathbf{A}^T + \frac{1}{2} \left(\mathbf{A}^i \mathbf{b} \mathbf{b}^T + \mathbf{b} \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^T)^i \right) \quad (6)$$

$$\mathbf{W}_i = \mathbf{A}^T \mathbf{W}_i \mathbf{A} + \frac{1}{2} \left(\mathbf{c}^T \mathbf{c} \mathbf{A}^i + (\mathbf{A}^T)^i \mathbf{c}^T \mathbf{c} \right) \quad (7)$$

を解いて得られる K_i と W_i をそれぞれ一般化可制御性グラミアン，一般化可観測性グラミアンという⁶⁾．特に， K_0, W_0 は

$$K_0 = AK_0A^T + bb^T \quad (8)$$

$$W_0 = A^T W_0 A + c^T c \quad (9)$$

と書くことができ，それぞれ可制御性グラミアン，可観測性グラミアンと呼ばれている．一般化可制御性グラミアンと一般化可観測性グラミアンは，式(6)と式(7)から，

$$K_i = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A^n \left(A^i bb^T + bb^T (A^T)^i \right) (A^T)^n \quad (10)$$

$$W_i = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (A^T)^n \left(c^T c A^i + (A^T)^i c^T c \right) A^n \quad (11)$$

と求めることができる．これらの一般化グラミアンを用いると， L_2 感度は

$$S(A, b, c) = \text{tr}(W_0) \text{tr}(K_0) + \text{tr}(W_0) + \text{tr}(K_0) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{tr}(W_i) \text{tr}(K_i) \quad (12)$$

と表せる⁶⁾．

2.3 座標変換

状態空間デジタルフィルタにおいて，状態変数ベクトル $x(n)$ の選び方は一通りではない．例えば，状態変数ベクトル $x(n)$ に正則行列をかけたベクトルも状態変数となる．今，状態空間デジタルフィルタ (A, b, c, d) に対して，次の座標変換を施す．

$$\bar{x}(n) = T^{-1} x(n) \quad (13)$$

この正則行列 T による座標変換に伴い，各係数行列 (A, b, c, d) は，

$$\bar{A} = T^{-1} A T \quad (14)$$

$$\bar{b} = T^{-1} b \quad (15)$$

$$\bar{c} = c T \quad (16)$$

$$\bar{d} = d \quad (17)$$

と変換され，一般化可制御性グラミアン K_i および一般化可観測性グラミアン W_i はそれぞれ

$$\bar{K}_i = T^{-1} K_i T^{-T} \quad (18)$$

$$\bar{W}_i = T^T W_i T \quad (19)$$

と変換される． L_2 感度は座標変換によって変化する量であり，座標変換後の L_2 感度 $S(T)$ は

$$S(T) = \text{tr}(T^T W_0 T) \text{tr}(T^{-1} K_0 T^{-T}) + \text{tr}(T^T W_0 T) + \text{tr}(T^{-1} K_0 T^{-T}) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{tr}(T^T W_i T) \text{tr}(T^{-1} K_i T^{-T}) \quad (20)$$

となる．

3. L_2 感度最小化問題

本章では， L_2 感度最小化問題について説明する．まず，スケーリングを考慮しない L_2 感度最小化問題について，これまでに提案された手法を紹介する．次に，スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題を取り上げ，離元の方法^{8, 9)}を紹介する．さらに，本章では，^{8, 9)}で提案された方法を改良し， L_2 感度最小化問題に対する新たな解法を提案する．

3.1 スケーリングを考慮しない L_2 感度最小化問題

式(20)において， $P = T T^T$ とおくことにより，座標変換後の L_2 感度は

$$S(P) = \text{tr}(W_0 P) \text{tr}(K_0 P^{-1}) + \text{tr}(W_0 P) + \text{tr}(K_0 P^{-1}) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{tr}(W_i P) \text{tr}(K_i P^{-1}) \quad (21)$$

と表せる． P はその定義から対称正定行列となる．ここで，与えられた K_i, W_i に対して，式(21)で表される L_2 感度 $S(P)$ が最小となるような変換行列 P を見つけることが L_2 感度最小化問題である．この L_2 感度最小化問題に対して，繰り返し計算を用

いて近似的に最適解を求めるアルゴリズムがYanら⁵⁾, 雛元ら⁶⁾によって提案されている. また, 2次の状態空間デジタルフィルタのみを対象として L_2 感度最小化問題の最適解を閉じた形で求める手法が八巻によって提案されている⁷⁾.

これまでに提案されてきた繰り返し計算による解法の中で最も新しい方法は雛元らの手法⁶⁾である. 彼らの手法は,

$$\frac{\partial S(P)}{\partial P} = 0 \quad (22)$$

を満たす正定対称な変換行列 P を反復計算によって求めるものである. すなわち,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S(P)}{\partial P} \\ &= W_0 - P^{-1}K_0P^{-1} \\ &+ \text{tr}(K_0P^{-1})W_0 - \text{tr}(W_0P)P^{-1}K_0P^{-1} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{\infty} (\text{tr}(K_iP^{-1})W_i) \\ &- 2 \sum_{i=1}^{\infty} (\text{tr}(W_iP)P^{-1}K_iP^{-1}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

を差分方程式化し, 繰り返し計算によって求める方法である. 雛元らの方法による最小化は, Yanの方法による最小化に比べて, 最適解への収束が速いことが特長である. 式(23)は, $H(P)$ と $G(P)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} H(P) &= (1 + \text{tr}(W_0P))K_0 \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{tr}(W_iP)K_i \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} G(P) &= (1 + \text{tr}(K_0P^{-1})W_0) \\ &+ 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{tr}(K_iP^{-1})W_i \end{aligned} \quad (25)$$

とおくことにより,

$$H(P) = PG(P)P \quad (26)$$

とまとめられる. ただし, ここで $H(P)$ および $G(P)$ は以下のリアプノフ方程式から求めることがで

きる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & bc \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{11}(P) & H_{12}(P) \\ H_{21}(P) & H_{22}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & bc \\ 0 & A \end{bmatrix}^T \\ - \begin{bmatrix} H_{11}(P) & H_{12}(P) \\ H_{21}(P) & H_{22}(P) \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} bb^T & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & 0 \\ bc & A \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G_{11}(P) & G_{12}(P) \\ G_{21}(P) & G_{22}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ bc & A \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} G_{11}(P) & G_{12}(P) \\ G_{21}(P) & G_{22}(P) \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} c^Tc & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

$$H(P) = H_{11}(P) \quad (29)$$

$$G(P) = G_{11}(P) \quad (30)$$

式(26)は行列 P に関する非線形方程式であるため, 解析的に解を導出するのは非常に困難である. そこで, 雛元らの方法では式(26)を

$$H(P_i) = P_{i+1}G(P_i)P_{i+1} \quad (31)$$

と差分方程式化し, 以下の式を用いて P_i を更新していく.

$$\begin{aligned} & P_{i+1} \\ &= G^{-\frac{1}{2}}(P_i) \left[G^{\frac{1}{2}}(P_i)H(P_i)G^{\frac{1}{2}}(P_i) \right]^{\frac{1}{2}} G^{-\frac{1}{2}}(P_i) \end{aligned} \quad (32)$$

P_i の更新は, 以下の条件が満たされるまで繰り返される.

$$|S(P_{i+1}) - S(P_i)| \leq \epsilon \quad (33)$$

式(33)において, ϵ は設計者によって予め設定される許容誤差である.

3.2 スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題

本節では, スケーリングを考慮しない L_2 感度最小化問題を応用し, スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題を取り上げる. スケーリングを考慮

した L_2 感度最小化問題とは、従来の L_2 感度最小化問題に対して L_2 スケーリング制約を設けたものである。すなわち、 L_2 スケーリング制約条件を満たした上で、 L_2 感度が最小となるフィルタ構造を見つける問題である。

3.2.1 L_2 スケーリング制約

L_2 スケーリング制約とは、状態変数のオーバーフローを抑制するための制約条件である。具体的には、ガウス性白色雑音を入力信号としたとき、状態変数の分散が入力信号の分散を越えないように制約する。かつ、ダイナミックレンジを最も有効に活用できるように、入力信号の振幅はダイナミックレンジ内でとりうる最大値とし、状態変数の振幅もダイナミックレンジ内でとりうる最大値になるように制約する。すなわち、入力信号の分散を1としたとき、状態変数の分散も1になるようにする。この制約条件を満たすためには、可制御性グラミアンの対角成分がすべて1であればよいことが知られている。すなわち、

$$T^{-1}K_0T^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & * \\ & \ddots \\ * & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

となればよいことが示されている^{1, 2)}。これらのことから、スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題は、以下のように定式化される。

$$\begin{cases} \text{minimize } S(T) \\ \text{subject to } (T^{-1}K_0T^{-T})_{ii} = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, N \end{cases}$$

このスケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題に対して、準ニュートン法を用いて L_2 感度最小化を行う手法が雛元らによって提案されている^{8, 9)}。しかし、この方法は線形探索などの複雑な計算を必要とし、かつ、最適な L_2 感度最小構造に収束するまでに多くの繰り返し計算を要する。

3.2.2 提案法

本節では、準ニュートン法による解法^{8, 9)}とはアプローチが全く異なる新たな解法を提案する。この提案法においては、適切な初期条件のもとで、制約条件を変換行列 P に組み込む。その結果、スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題はスケーリングを考慮しない L_2 感度最小化問題と同じ形式になる。そのため、収束特性のよい雛元の方法⁶⁾が適用できる。今回提案する手法は、従来法よりも計算量が少なく、かつよりよい収束特性を実現する。今回の提案法の概要は以下の通りである。

Step0: 初期構造を入力正規形とする。

Step1: $\text{tr}(P) = N$ を満たす P の中から最適解 P_{opt} を見つける。

Step2: $TT^T = P_{\text{opt}}$ を満たす T の中で、

$$T_s^{-1}T_s^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & * \\ & \ddots \\ * & 1 \end{bmatrix} \text{を満たす正則行列 } T_s \text{が最適解。}$$

Step0 :

まず、 L_2 感度最小化問題の前準備として、繰り返し計算の出発点を入力正規形というフィルタ構造とする。入力正規形とは、可制御性グラミアンおよび可観測性グラミアンが以下のような形になるフィルタ構造である。

$$K_0 = I \quad (35)$$

$$W_0 = \Theta^2 \quad (36)$$

ここで、 $\Theta = \text{diag}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ であり、 $\theta_i (i = 1, 2, \dots, N)$ は2次モードと呼ばれるシステムに固有のパラメータである。任意のフィルタ構造を入力正規形に変換することは解析的に可能である。

Step1 :

初期構造を入力正規形と仮定することにより、 L_2 スケーリング制約条件は

$$(T^{-1}T^{-T})_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (37)$$

と簡単化される．制約条件式(37)が満たされる場合，以下の条件が成り立つ．

$$\text{tr}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}^{-T}) = N \quad (38)$$

また，式(38)は，以下のように展開される．

$$\text{tr}(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}^{-T}) = \text{tr}(\mathbf{T}^{-T}\mathbf{T}^{-1}) = \text{tr}(\mathbf{P}^{-1}) = N \quad (39)$$

まず， $\text{tr}(\mathbf{P}^{-1}) = N$ を満たす全ての \mathbf{P} について

$$S(\mathbf{P}_{\text{opt}}) \leq S(\mathbf{P}) \quad (40)$$

が成り立つような正則行列 \mathbf{P}_{opt} を求める．

Step2 :

この \mathbf{P}_{opt} が求められたとして，

$$\mathbf{T}\mathbf{T}^T = \mathbf{P}_{\text{opt}} \quad (41)$$

を満たす正則行列 \mathbf{T} を考えると，

$$\mathbf{T}_{\text{opt}} = \mathbf{P}_{\text{opt}}^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\text{opt}}\mathbf{U} \quad (43)$$

となる．ここで， \mathbf{U} は任意の直交行列である．直交行列の任意性より，式(43)を満たす正則行列 \mathbf{T} は無限に存在することになる．その中で，スケーリングの制約条件式(37)を満たす正則行列 \mathbf{T}_s を見つければよい．すなわち， $\mathbf{T}_s = \mathbf{T}_{\text{opt}}\mathbf{U}$ としたときに，

$$(\mathbf{T}_s^{-1}\mathbf{T}_s^{-T})_{ii} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (44)$$

を満たす直交行列 \mathbf{U} を求めればよい． L_2 感度は直交行列による座標変換に対して不変であるという重要な性質がある^{5, 6, 8, 9)}．この性質は，

$$S(\mathbf{T}_{\text{opt}}) = S(\mathbf{T}_s) \quad (45)$$

であることを意味する．すなわち，Step1で求めた \mathbf{T}_{opt} が式(40)を満たすならば，制約条件式(37)を満たす全ての正則行列 \mathbf{T} に対して

$$S(\mathbf{T}_s) \leq S(\mathbf{T}) \quad (46)$$

が成り立つ．すなわち，Step2で求められる \mathbf{T}_s はスケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題の最適解となる．

以上が各ステップの概要である．今回の提案法の最も重要な点は，Step1における制約条件の変換行列への組み込み，およびそれに基づく最適化手法である．以下，Step1における新たな解法の詳細について述べる．

Step1で行う操作は，以下の最適化問題に定式化される．

$$\begin{cases} \text{minimize } S(\mathbf{P}) \\ \text{subject to } \text{tr}(\mathbf{P}^{-1}) = N \end{cases} \quad (47)$$

変換行列 \mathbf{P} が必ず $\text{tr}(\mathbf{P}^{-1}) = N$ を満たすように，本提案法では，以下のような変換行列 \mathbf{P} の形式を仮定する．

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{N}{\text{tr}(\mathbf{Q}^{-1})}\mathbf{Q}^{-1} \quad (48)$$

$$\mathbf{P} = \frac{\text{tr}(\mathbf{Q}^{-1})}{N}\mathbf{Q} \quad (49)$$

ここで， \mathbf{Q} は任意の正定対称行列である．上記の仮定によれば， \mathbf{Q} がどんな正定対称行列であろうと， $\text{tr}(\mathbf{P}^{-1}) = N$ は必ず満たされる．式(48)と式(49)を式(21)に代入することにより，以下のように新しい L_2 感度の形式 $\bar{S}(\mathbf{Q})$ を得る．

$$\begin{aligned} \bar{S}(\mathbf{Q}) &= \text{tr}(\mathbf{W}_0\mathbf{Q})\text{tr}(\mathbf{K}_0\mathbf{Q}^{-1}) \\ &\quad + \frac{\text{tr}(\mathbf{Q}^{-1})}{N}\text{tr}(\mathbf{W}_0\mathbf{Q}) + \frac{N}{\text{tr}(\mathbf{Q}^{-1})}(\mathbf{K}_0\mathbf{Q}^{-1}) \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{\infty}\text{tr}(\mathbf{W}_i\mathbf{Q})\text{tr}(\mathbf{K}_i\mathbf{Q}^{-1}) \end{aligned} \quad (50)$$

ここで， $\mathbf{K}_0 = \mathbf{I}$ であることから，

$$\begin{aligned} \bar{S}(\mathbf{Q}) &= \text{tr}(\mathbf{W}_0\mathbf{Q})\text{tr}(\mathbf{I}\mathbf{Q}^{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{N}\text{tr}(\mathbf{W}_0\mathbf{Q})\text{tr}(\mathbf{I}\mathbf{Q}^{-1}) + N \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{\infty}\text{tr}(\mathbf{W}_i\mathbf{Q})\text{tr}(\mathbf{K}_i\mathbf{Q}^{-1}) \\ &= N + \frac{N+1}{N}\text{tr}(\mathbf{W}_0\mathbf{Q})\text{tr}(\mathbf{I}\mathbf{Q}^{-1}) \\ &\quad + 2\sum_{i=1}^{\infty}\text{tr}(\mathbf{W}_i\mathbf{Q})\text{tr}(\mathbf{K}_i\mathbf{Q}^{-1}) \end{aligned} \quad (51)$$

この提案式を用いて、スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題は以下のように定式化される。

$$\begin{cases} \text{minimize } \bar{S}(Q) \\ \text{ただし } Q \text{ は任意の正定対称行列} \end{cases} \quad (52)$$

この $\bar{S}(Q)$ を変換行列 Q で微分し、その微分係数が0になるような Q を求めたい。すなわち、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \bar{S}(Q)}{\partial Q} \\ &= \frac{N+1}{N} \text{tr}(IQ^{-1})W_0 - \frac{N+1}{N} \text{tr}(W_0Q)Q^{-1}IQ^{-1} \\ & \quad + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{W}_i \text{tr}(K_i Q^{-1}) - \text{tr}(\mathbf{W}_i Q)Q^{-1}K_i Q^{-1}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (53)$$

となる Q を求める。ここで、

$$\mathcal{H}(Q) = \frac{N+1}{N} \text{tr}(W_0Q)I + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{tr}(W_i Q)K_i \quad (54)$$

$$\mathcal{G}(Q) = \frac{N+1}{N} \text{tr}(IQ^{-1})W_0 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{tr}(K_i Q^{-1})W_i \quad (55)$$

とおくことにより、式(53)は、

$$\mathcal{H}(Q) = Q\mathcal{G}(Q)Q \quad (56)$$

とまとめられる。式(56)はスケーリングを考慮しない L_2 感度最小化問題で使う式(26)と全く同じ形式である。また、式(54)と式(55)はそれぞれ、

$$\mathcal{H}(Q) = H(Q) - \left(1 - \frac{\text{tr}(W_0Q)}{N}\right)I \quad (57)$$

$$\mathcal{G}(Q) = G(Q) - \left(1 - \frac{\text{tr}(IQ^{-1})}{N}\right)W_0 \quad (58)$$

と簡単化することができ、 $H(Q)$ および $G(Q)$ はそれぞれ式(27)と式(28)を用いて求められるため、 $\mathcal{H}(Q)$ および $\mathcal{G}(Q)$ いずれも容易に計算できる。式(56)に対して式(31)と同様な差分方程式化を行い、式(32)と同様な更新式を用いて最適解を求める方法が適用できる。すなわち、式(56)を

$$\mathcal{H}(Q_i) = Q_{i+1}\mathcal{G}(Q_i)Q_{i+1} \quad (59)$$

と差分方程式化して、

$$\begin{aligned} & Q_{i+1} \\ &= \mathcal{G}^{-\frac{1}{2}}(Q_i)[\mathcal{G}^{\frac{1}{2}}(Q_i)\mathcal{H}(Q_i)\mathcal{G}^{-\frac{1}{2}}(Q_i)]^{-\frac{1}{2}}\mathcal{G}^{-\frac{1}{2}}(Q_i) \end{aligned} \quad (60)$$

により Q_i を繰り返し更新していく。繰り返し計算により得られた Q_{opt} から、以下の式により P_{opt} が得られる。

$$P_{\text{opt}} = \frac{\text{tr}(Q_{\text{opt}}^{-1})}{N}Q_{\text{opt}} \quad (61)$$

式(61)が、最適化問題(47)に対する解となる。

続くStep2では、スケーリングの制約条件(37)を満たす正則行列 T_s を求める。Step1の結果得られた P_{opt} から、

$$T_{\text{opt}} = P_{\text{opt}}^{\frac{1}{2}} \quad (62)$$

により T_{opt} を求める。ここで求められた T_{opt} は、

$$\text{tr}(T_{\text{opt}}^{-1}K_0T_{\text{opt}}^{-T}) = N \quad (63)$$

を満たす。ここで適切な直交行列 U を選ぶことで、

$$U^T(T_{\text{opt}}^{-1}K_0T_{\text{opt}}^{-T})U = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \quad (64)$$

が満たされる²⁾。すなわち、

$$(T_{\text{opt}}U)^{-1}K_0(T_{\text{opt}}U)^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

となり、最終的に、スケーリングの制約条件を含めた場合に L_2 感度最小構造を与える変換行列 T_s は、 $T_s = T_{\text{opt}}U$ で与えられる。

4. 計算例

今回提案した手法でスケーリング制約条件付きの L_2 感度最小化を行った計算例を示す。次のよう

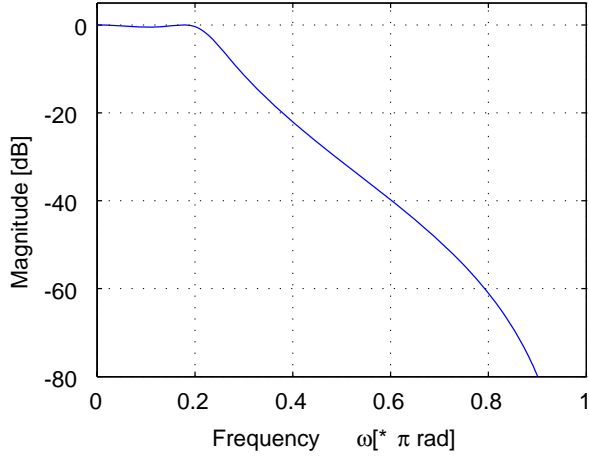


Fig. 2 3次デジタルフィルタの周波数振幅特性

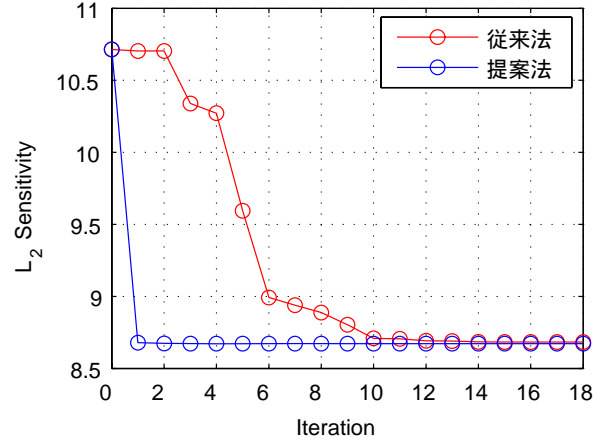


Fig. 3 L_2 感度の収束特性の比較

な3次の状態空間デジタルフィルタを考える．

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.45377 & -1.55616 & 1.97486 \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.24210 \end{bmatrix}^T \quad (67)$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.09571 & 0.09509 & 0.32756 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$d = 0.01594 \quad (69)$$

この状態空間表現で与えられるデジタルフィルタの周波数振幅特性をFig. 2に示す．このフィルタ構造を入力正規形 $(\mathbf{A}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0, d_0)$ に変換すると，

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0.82363 & 0.29396 & 0.00618 \\ -0.54414 & 0.59350 & -0.17499 \\ 0.04379 & 0.67020 & 0.55773 \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 0.48496 & 0.56661 & -0.48771 \end{bmatrix}^T \quad (71)$$

$$\mathbf{c}_0 = \begin{bmatrix} 0.40355 & -0.25472 & -0.05725 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$d_0 = 0.01594 \quad (73)$$

となる．このとき， L_2 感度は

$$S = 10.713463 \quad (74)$$

と計算される．このフィルタ構造 $(\mathbf{A}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0, d_0)$ を繰り返し計算における初期構造とする．提案法により，

$$\mathbf{T}_s = \begin{bmatrix} 0.27808 & 0.48143 & 0.50979 \\ 0.62519 & -0.78278 & 0.26437 \\ -1.09872 & -0.91151 & 1.43453 \end{bmatrix} \quad (75)$$

と求められ，これに伴い，各係数行列は

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 0.60141 & 0.01248 & -0.32906 \\ 0.08506 & 0.63580 & 0.46093 \\ 0.38807 & -0.29184 & 0.73765 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} 0.86621 & 0.09833 & 0.38594 \end{bmatrix}^T \quad (77)$$

$$\mathbf{c}_s = \begin{bmatrix} 0.01587 & 0.44585 & 0.05627 \end{bmatrix} \quad (78)$$

$$d_s = 0.01594 \quad (79)$$

となり，このとき可制御性グラミアン \mathbf{K}_{0s} および可観測性グラミアン \mathbf{W}_{0s} は

$$\mathbf{K}_{0s} = \begin{bmatrix} 1 & 0.02856 & 0.54671 \\ 0.02856 & 1 & 0.54671 \\ 0.54671 & 0.54671 & 1 \end{bmatrix} \quad (80)$$

$$\mathbf{W}_{0s} = \begin{bmatrix} 0.14917 & 0.00760 & 0.10985 \\ 0.00760 & 0.29577 & 0.11011 \\ 0.10985 & 0.11011 & 0.22244 \end{bmatrix} \quad (81)$$

となり，確かに L_2 スケージングの制約条件を満たしている．このフィルタ構造において， L_2 感度の最小値 S_{\min} は，

$$S_{\min} = 8.672129 \quad (82)$$

と求められた．これまでの従来法^{8, 9)}を用いて L_2 感度最小化を行った結果と，今回の提案法を用いて L_2 感度最小化を行った結果をFig. 3に示す．本論文で提案した方法は従来法に比べてはるかに速く最適解に収束していることがわかる．

5. むすび

本論文では，スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題について検討した．本論文で提案した新たな解法は，初期構造を入力正規形とし，制約条件を変換行列に組み込むことにより，スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題をスケーリングを考慮しない L_2 感度最小化問題と同様の問題に置き換える．その結果，スケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題の解決において，スケーリングを考慮しない L_2 感度最小化問題の従来解法を利用できる．今回の提案法は，従来法をはるかに上回る収束特性を実現した．

今後の課題として，繰り返し計算を用いずに閉じた形でスケーリングを考慮した L_2 感度最小化問題に最適解を与える方法を検討する．

参考文献

- 1) C. T. Mullis, R. A. Roberts: Synthesis of Minimum Roundoff Noise Fixed Point Digital Filters, IEEE Trans. on Circuits and Systems, **CAS-23-9**, 551/562 (1976)
- 2) S. Y. Hwang: Minimum uncorrelated unit noise in state-space Digital Filtering, IEEE Trans. on Acoust., Speech, Signal Processing, **ASSP-25-4**, 273/281 (1977)
- 3) M. Kawamata and T. Higuchi: A Unified Approach to the Optimal Synthesis of Fixed-Point State-Space Digital Filters, IEEE Trans. on Acoust., Speech, and Signal Processings, **ASSP-33-4**, 911/920 (1985)
- 4) M. Iwatsuki, M. Kawamata and T. Higuchi: Statistical sensitivity and minimum sensitivity structures with fewer coefficients in discrete time linear systems, IEEE Trans. on Circuits and Systems, **CAS-37-1**, 72/80 (1990)
- 5) W. Y. Yan and J. B. Moore: On L^2 -Sensitivity Minimization of Linear State-Space Systems, IEEE Trans. CAS-I Fundamental theory and applications, **39-8**, 641/648 (1992)
- 6) T. Hinamoto and S. Yokoyama: A Novel Expression for L_2 Sensitivity Evaluation in State-Space Digital Filters and Its Minimization, Proc. IS-CAS'99 Orland, Florida, **3**, 331/334 (1999)
- 7) 八巻, 阿部, 川又: 2次状態空間デジタルフィルタの L_2 感度最小化問題の閉じた形の解法, 第18回回路とシステム軽井沢ワークショップ論文集, 491/496 (2005)
- 8) 雛元, 大西: スケーリングを考慮したデジタルフィルタの L_2 感度最小化, 電子情報通信学会, 信学技報CAS2002-132, 45/50 (2003)
- 9) T. Hinamoto, H. Ohnishi, W. S. Lu: Minimization Of L_2 -Sensitivity For State-Space Digital Filters Subject To L_2 -Scaling Constraints, Proc. IS-CAS2004, 137/140 (2004)