計測自動制御学会東北支部第 **221** 回研究集会 (**2005. 5. 30**)
資料番号 **221-7**

フィボナッチ数列を用いた 負の屈折率媒体中の光伝播シミュレーション

Computer simulation for optical propagation in Fibonacci series alleged negative refractive index medium

○米澤 隆一，大坊 真洋，田山 典男
○Takakazu Yonezawa, Masahiro Daibo, Norio Tayama

岩手大学　大学院
Iwate University

キーワード：負の屈折率媒質（negative refractive index），
フィボナッチ数列（Fibonacci series），
FDTD 法 (Finite Difference Time Domain method)

連絡先：〒 020 – 8551 岩手県盛岡市上田 **4-3-5**
岩手大学工学部電気電子工学科 大坊研究室
大坊　真洋　Tel/Fax **019-621-6983**　e-mail　daibo@pipe.iwate-u.ac.jp

1．　はじめに

光の屈折現象は，電磁気学における最も基本的な現象である．大部分の物質における屈折率は，正の値を持ち 1 よりも大きいことが知られている．しかし，適当な条件下では，屈折率が負の値を持つことがありえる[1].

約 **30** 年前，Veselago [2]によって，基本的には電磁気学の基本法則を破ることなく，負の屈折率媒質の物理現象が説明された.

近年，Smithら[3]は，マイクロ波領域で負の屈折率媒質を持つ人工的な媒質を作成することに成功した.

一般の屈折率媒質（正の屈折率媒質）における光（電磁波）伝播の研究は，フラクタル構造における電磁波伝播の研究や，フォトニック結晶における光伝播の研究など盛んに行われている.

一方，負の屈折率媒質では，平面レンズのような，一つの大きなかたまりの負の屈折率媒質における光（電磁波）伝播の研究が行われている．しかし，負の屈折率である特殊な構造を持った媒体中の電磁波伝播の研究は数少ない.

そこで本研究では，負の屈折率媒質に特殊な構造を持たせた場合の光伝播を調べている．また，光伝播シミュレーションとして，FDTD 法を用いる．FDTD 法とは，マクスウェルの微分方程式を差分化(Finite Deference)し，時間領域(Time Domain) で解く方法である[4].

本論文では，フィボナッチ数列に基づき，負の屈折率媒質を配置した場合の，光伝播シミュレーション結果について報告する．

2．　負の屈折率媒質

媒質の屈折率 $n(\omega)$ は，その比誘電率 $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$，比透磁率 $\mu_r = \mu/\mu_0$ を用いて

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)\mu_r(\omega)} \qquad (1)$$

と表せる．一般の媒質に対しては，ε_r も μ_r も正である．しかし，適当な条件下では，これらの量も負になりうる．ε_r と μ_r が同時に負になる場合，負の屈折率媒質特性を持つ．このような媒質を負の屈折率媒質または，DNG 媒質(Double Negative Medium) という．

一般に波動が伝播する場合，図１に示すようにポインティングベクトル $\boldsymbol{S}$ または位相速度 $\boldsymbol{v_p}$ の方向と群速度 $\boldsymbol{v_g}$ の方向は同じである．負の屈折率媒質 中では，位相速度と群速度の方向が 180 度異なる特性，負の群速度特性あるいは後退波特性を示す．このことから，一般の媒質を右手系媒質 (RHM) と呼ぶように，負の屈折率媒質を左手系媒質 (LHM) とも呼ぶ[5].

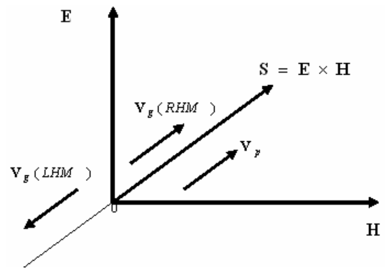

図１　負の群速度の定義

3．　FDTD 法

波源も物体の構造も z 軸方向に変化のないようなものは，2 次元問題として扱うことができる．そこで本論文では，E_z, H_x, H_y 成分のみをもち $H_z = 0$ の 2 次元TM 波を扱う．

初めに一般の屈折率媒質における FDTD 法について説明する．FDTD 法は，ファラデーの方程式と，アンペアの方程式（式 2）を基本の方程式として，計算する．

$$\left.\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon}\Delta\times\mathbf{H}, \\ \partial_t \mathbf{H} &= -\frac{1}{\mu}\Delta\times\mathbf{E} - \mathbf{J} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

FDTD 法では，電界と磁界が空間的・時間的に半ステップ分ずれて，差分化されている．電界と時間は交互に計算される（図 **2**）.

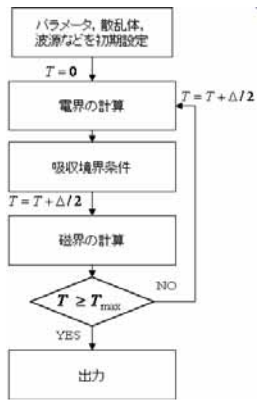

図 **2**　FDTD 法のアルゴリズム

また散乱解析では，計算領域を仮想的な境界で閉じておく必要がある．この仮想的な境界を吸収境界といい，その条件を吸収境界条件という．FDTD 法では計算領域が増大する欠点があるものの，現在のところ最も有効な境界条件は，Berenger[8]の PML (Perfectly Matched Layer) 法である

図 **3** は，正の屈折率媒質における FDTD のシミュレーション結果である．これは，自由空間に完全導体が **2** つ配置した場合の電界強度を示している．

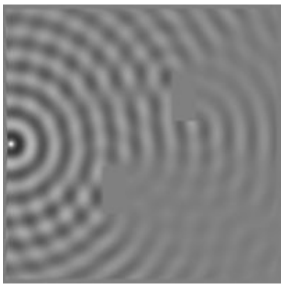

図 **3**　真空中に **2** つの完全導体を配置した場合の，FDTD シミュレーション

近年，W. Ziolkowski[6][7] らによって，負の屈折率媒質のFDTD シミュレーションが開発された．この方法では，負の屈折率媒質中のシミュレーションを行うため，誘電率，透磁率にDrude 分散を用いる．周波数領域にける，比誘電率，比透磁率は式 3 で表される．

$$\varepsilon_r(\omega)=\left(1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right), \qquad \mu_r(\omega)=\left(1-\frac{\omega_{pm}^2}{\omega^2}\right) \qquad (3)$$

式 3 において，ω_{pe} と ω_{pm} はそれぞれ，共鳴周波数である．簡単に $\omega_{pe} = \omega_{pm}$ とし，ω の値が $\omega = \omega_{pe}/\sqrt{2}$ である場合，$\varepsilon_r = \mu_r$ **=-1** となり，$n(\omega)$**=-1** の負の屈折率媒質となる．

Davi Correia ら[9]によって，負の屈折率媒質における FDTD の PML法 が開発された．

図 **4** は，本研究で作成した負の屈折率媒質における FDTD のシミュレーション結果を示す．この図から，単なる板状の負の屈折率媒質でレンズが実現できることがわかる．板の外部の一点から出た光線は板の内部の一点で交わる．さらに板から出るときの屈折により，外部で一点に収束する[10]．

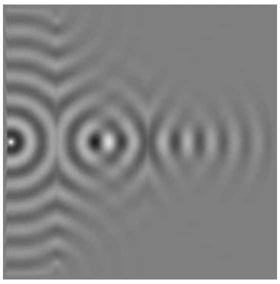

図 **4**　自由空間に負の屈折率媒質を配置した場合の，FDTD シミュレーション

4．　負の屈折率媒質モデル

空間に負の屈折率媒質を配置するために，本研究では，フィボナッチ数列を利用する．フィボナッチ数列とは次式のように，F_1, F_2 を **1** とし，その他の項はその前の **2** つの項の和となり，F_i の値の変化は表 **1** のようになる．

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_i &= F_{i-2} + F_{i-1} \qquad i \geq 3 \end{aligned} \qquad (4)$$

表 **1**　フィボナッチ数列

i	1	2	3	4	5	6	···
F_i	1	1	2	3	5	8	···

フィボナッチ数列の次数 i が，奇数の場合には自由空間（$\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$, $n = 1$）を，偶数の場合に負の屈折率媒質（$\mu = -\mu_0$, $\varepsilon = -\varepsilon_0$, $n = -1$）を配置した．そして，次数 i の媒

質に進入する波数をF_iとした．入射波源として，点電流源を用いた．屈折率の絶対値はどちらも **1** となるため, 波長 λ は等しい．よって負の屈折率媒質モデルは図 **5** のようになる．

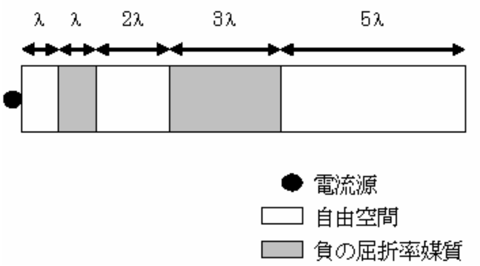

図 **5** フィボナッチ数列に基づく負の屈折率媒質の配置

このモデルの光の伝播について考える．このモデルにおいて，負の屈折率媒質は，平面レンズの役目を果たす(図 6)．図から，点 A から出た光は，負の屈折率媒質内部の点 C（焦点）で交わり．また，負の屈折率媒質を出た光は, 自由空間中の点 E（焦点）で交わる．

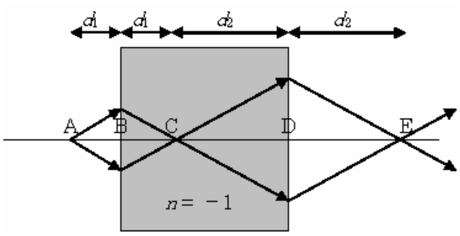

図 6　負の屈折率（n=-1)媒質を用いた平面レンズ

負の屈折率媒質でも，スネルの法則が成り立つ（式 5)．

$$\sin\theta_1 = \mathrm{n}\sin\theta_2 \quad (5)$$

つまり図 **6** において n **= -1** の場合, θ_2 **= -** θ_1 となる．そのため点 A から点 B までの距離と, 点 B から点 C までの距離は等しい（d_1)．そして，点 C から点 D までの距離と, 点 D から点 E までの距離は等しい（d_2)．

このモデルの場合，自由空間と負の屈折率媒質のインピーダンス整合条件 ($\sqrt{\varepsilon_1/\mu_1} = \sqrt{\varepsilon_2/\mu_2}$)が満たされているため，反射を考えなくてもよい．

よって，次数 i の各媒質で光が交差し，その焦点距離は図 **7** から求めることができる．

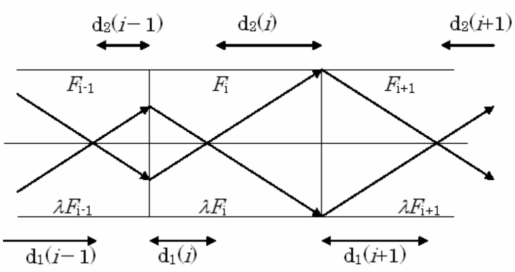

図 **7**　各媒質中の焦点距離

図 **7** より，各媒質のd_1(i)とd_2(i)は次の式が成立する．

$$\begin{aligned} d_1(i) &= d_2(i-1) \\ d_2(i) &= \lambda F_i - d_1(i) \end{aligned} \quad (6)$$

この次数 i と $d_1(i)$, $d_2(i)$の関係について，グラフ化してみる．しかし次数 i が大きくなると$d_1(i)$と$d_2(i)$は急激に値が大きくなるため，各媒質の幅 λF_i でノーマライズした（図 **8, 9**)．

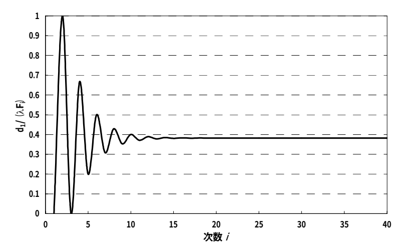

図 **8**　次数 i と $d_1/(\lambda F_i)$ の関係

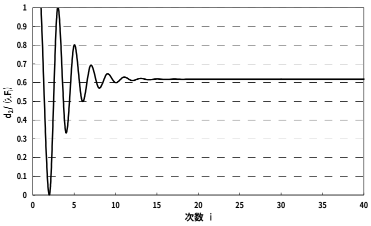

図 9　次数 i と $d_2/(\lambda F_i)$ の関係

これらの結果から，次数 i が大きくなるにつれて，$d_1(i)/(\lambda F_i)$=**0.382**, $d_2(i)/(\lambda F_i)$ =**0.618** に収束する．

フィボナッチ数列では，数列の初期項においては顕著ではないが，一般に隣り合う項は，常に黄金比 $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618$ となる．また，その黄金比の逆数（黄金分割比）が **0.618** である．よって，$d_2(i)/(\lambda F_i)$ の値は黄金分割比と考えられる．つまりこのモデルにおいて，自由空間や負の屈折率媒質に関係なく，次数 i の媒質 の焦点距離が黄金分割比によって決まると考えられる．

そこで, このモデルのシミュレーションを行った．

5．　実験方法

本実験では, 計算領域におけるセルサイズを $\lambda/50$ とした．よって，**1** 波長には **50** 個のセルが必要である．また，**16** 層の PML で計算領域を囲む．従って，計算領域は図 **10** のようになった．今回は次数 i =**6** までのシミュレーションを行う．

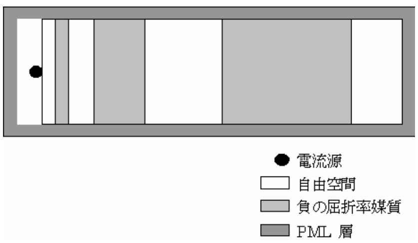

図 10 計算領域

6．　実験結果

このモデルに対し，t=**5000**Δt の電界強度分布は図 **11** のようになった．

図 **11** シミュレーション結果

この結果から，負の屈折率媒質は平面レンズの役目を果たしていることがわかる．また電界強度分布は，負の屈折率媒質と自由空間で対称的にリレーされる．

今回の実験モデルの焦点距離について表にまとめると表 **2** のようになる．

表 **2**　負の屈折率媒質モデルにおける $d_1(i)$ と $d_2(i)$

i =2, 4, 6 に負の屈折率媒質を配置する

F_i	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	・・・
d_1	0	λ	**0**	**2λ**	λ	**4λ**	・・・
d_2	λ	**0**	**2λ**	λ	**4λ**	**4λ**	・・・

この場合，F_1 では，光は広がるだけなので d_1(**1**)=0 を代入した．つまり自由空間 F_1 では光は F_1 の幅の距離だけ広がる（d_2(**1**)=λ）．F_2 は負の屈折率媒質であるため光が集光する（d_1(**2**)=λ）が，F_2 の幅が λ なので，光が媒質内では広がらない（d_2(**2**)=**0**）．自由空間 F_3 では光は集光せず（d_1(**3**)=**0**），光は F_3 の幅の距離だけ広がる（d_2(**3**)=**2**λ）．負の屈折率媒質 F_4 では，光が集光し（d_1(**4**)=**2**λ），残りの距離だけ光は広がる

（d_3(**4**)=**3**λ-**2**λ= λ）．それ以降は F_4 と同じように焦点距離が求まる．この表と，シミュレーション結果（図 **11**）は，ほぼ一致していると考えられる．

７．まとめ

本研究では，フィボナッチ数列に基づき，負の屈折率媒質を配置したモデルに対する，光伝播シミュレーションを行った．

このモデルにおいて負の屈折率媒質は，平面レンズの役目を果たす．そのため自由空間･負の屈折率媒質において，光は交差しながら伝播する．

このモデルの負の屈折率媒質は $n = -1$ なので，自由空間の波長の長さは等しく，反射も考えなくてもよい．そのため，各媒質の焦点距離を計算することが可能である．フィボナッチ数列の次数が大きい各媒質において，焦点距離と各媒質の幅には黄金分割比の関係がある．

本論文では次数が **6** までの媒質についてシミュレーションを行った．今後はもう少し次数を増やしたシミュレーションを行い，この関係について詳しく調べる必要がある．

８．参考文献

1. 北野正雄・中西俊博:風変わりな光たち，応用物理, 72 巻，第 6 号 (2003)
2. V.G. Veselago: The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of *e* and *m*, Soviet Phys Uspekhi 10 (1968)
3. D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz : Composite Medium with zimultaneously negative permeability and permittivity, Phys. Rev. Lett. 84, 4184-4187 (2000).
4. 宇野　亨: FDTD における電磁界およびアンテナ解析，コロナ社, (1998)
5. 堤誠：負の屈折率伝送媒質とマイクロ波回路への応用,電子情報学会誌 Vol. 88, No. 1 (2005)
6. R. W. Ziolkowski and E. Heyman : Wave propagation in media having negative permittivity and permeability, Phys. Rev. E 64, 056625 (2001).
7. Richard W. Ziolkowski; Pulsed and CW Gaussian beam interactions withdouble negative metamaterial slabs, OPTICS EXPRESS, Vol. 11, No. 7 (2003)
8. J.P. Berenger : A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetics waves, J Comput Phys 114 (1994), 185–200
9. Davi Correia , Jian-ming Jin : 3D-FDTD-PML analysis of left-handed metatarsals, Microwave and optical technology letters Vol.40, No. 3 (2004)
10. J. B. Pendry, “Negative Refraction Makes a Perfect Lens,” Phys. Rev. Lett. 85 (2000)