

周波数変換に対する線形連続時間システムの 平衡形実現について

Balanced Realization of Linear Continuous-Time Systems under Frequency Transformation

○越田俊介, 阿部正英, 川又政征

○Shunsuke Koshita, Masahide Abe, Masayuki Kawamata

東北大学大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, Tohoku University

キーワード : 平衡形実現 (balanced realization), 可制御性グラミアン (controllability Gramian), 可観測性グラミアン (observability Gramian), 周波数変換 (frequency transformation), リアクタンス関数 (reactance function), ケーリー変換 (Cayley transform)

連絡先 : 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-05 東北大学大学院工学研究科 電子工学専攻 川又研究室
越田俊介, Tel.: (022)795-7095, Fax.: (022)263-9169, E-mail: kosita@mk.ecei.tohoku.ac.jp

1. はじめに

線形システムの平衡形実現は, システムの状態空間表現における可制御性グラミアンと可観測性グラミアンが互いに一致するような実現であり, モデルリダクションとよばれる線形システム近似理論の基礎となっている^{1, 2, 3, 4, 5}). また, 平衡形実現は線形システムの統計的感度最小構造と一致することが知られており, 信号処理の分野では, この理論によって高精度デジタルフィルタの合成法が与えられている⁶).

周波数変換は, 与えられたシステムの伝達関数に対して特定の変数変換を適用して別の伝達関数を得る手法である. この手法は主に信号処理の分野で重要な役割を果たしており, フィルタの簡易設計や可変デジタルフィルタ実現の基礎理論と

なっている^{7, 8, 9, 10, 11}).

本稿では, 線形連続時間システムを対象として, 周波数変換によって得られるシステムの平衡形実現を求めるための新しい手法を提案する. 具体的には, ある与えられたシステムの平衡形実現から, 伝達関数を介することなく別のシステムの平衡形実現を求める. すなわち, 平衡形実現を保存する新しい周波数変換を導出する.

2. 線形連続時間システムの状態空間表現と平衡形実現

2.1 状態空間表現

N 次の1入力1出力の安定な伝達関数 $H(s)$ をもつ線形連続時間システムの次の状態空間表現を考

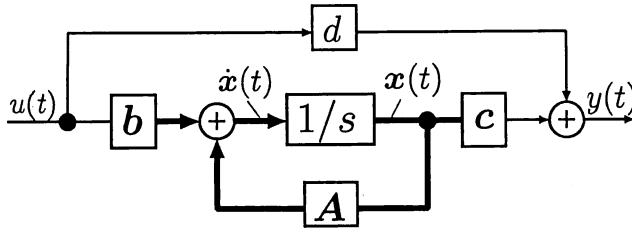


Fig. 1 線形連続時間システムの状態空間表現

える。

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t) \quad (1)$$

$$y(t) = cx(t) + du(t) \quad (2)$$

ここで、 $u(t), y(t)$ と $x(t)$ はそれぞれシステムの入力、出力および $N \times 1$ の状態ベクトルであり、 A, b, c, d は適当なサイズの係数行列である。また、システム (A, b, c, d) は最小実現であるとする。係数行列と伝達関数 $H(s)$ は

$$H(s) = d + c(sI - A)^{-1}b \quad (3)$$

の関係にある。このシステムのブロック図を図1に示す。

与えられた伝達関数 $H(s)$ を満足する状態空間表現の係数は無限に存在する。すなわち、システム (A, b, c, d) において、任意の $N \times N$ の正則行列 T を用いて状態ベクトル $x(t)$ を

$$x'(t) = T^{-1}x(t) \quad (4)$$

と変換したとき、新しい状態 $x'(t)$ を有するシステム $(A', b', c', d') = (T^{-1}AT, T^{-1}b, cT, d)$ もまた伝達関数 $H(s)$ を満足する。このように、状態空間表現の係数すなわちシステムの構造が T によって変化しても伝達関数は変化しないので、(4)式の変換は等価変換とよばれる。

2.2 可制御性・可観測性グラミアンと平衡形実現

システム (A, b, c, d) に対して次のリアプノフ方程式の解 K と W は可制御性グラミアンおよび可

観測性グラミアンとよばれる。

$$AK + KA^t = -bb^t \quad (5)$$

$$A^tW + WA = -c^tc \quad (6)$$

(A, b, c, d) が最小実現であれば、この K と W は対称正定行列となる。また、(4)式の等価変換に対して、 K と W は次式のように変化する。

$$K' = T^{-1}KT^{-t} \quad (7)$$

$$W' = T^tWT \quad (8)$$

以下に述べるように、線形システムの平衡形実現は、可制御性グラミアンと可観測性グラミアンが同一となるような構造として定義される。

定義 1 次式のように、可制御性グラミアンと可観測性グラミアンが一致し、かつそれぞれが対角であるとき、システム (A, b, c, d) は平衡形実現であるという。

$$K = W = \Theta \quad (9)$$

$$\Theta = \text{diag}(\theta_i), \quad \theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \theta_N > 0 \quad (10)$$

ここで、 θ_i は2次モードまたはハンケル特異値とよばれ、行列積 KW の固有値の正の平方根として定義される。

2次モードは、(4)式の等価変換に対して不変な量である。これは、(7)-(8)式より $K'W' = T^{-1}KWT$ となることから容易に示される。

3. 周波数変換

本章では、線形連続時間システムの周波数変換について述べる。また、周波数変換において用いられるリアクタンス関数について述べ、リアクタンス関数が厳密にプロパーである場合に成立する補題を導入する。さらに、周波数変換によって得られるシステムの状態空間表現における係数と可制御性・可観測性グラミアンに関する補題および定理を導入する。

Table 1 周波数変換の代表例

周波数変換	関数 $1/F(s)$
低域-低域変換	$\frac{\omega_c}{s}$
低域-高域変換	$\frac{s}{\omega_c}$
低域-帯域変換	$\frac{\Delta}{\Omega_0} \frac{\Omega_0 s}{s^2 + \Omega_0^2}$
低域-帯域阻止変換	$\frac{\Omega_0}{\Delta} \frac{s^2 + \Omega_0^2}{\Omega_0 s}$

3.1 周波数変換とリアクタンス関数

線形連続時間システムの周波数変換は、与えられた N 次の伝達関数 $H(s)$ に対して $1/s \leftarrow 1/F(s)$ の変数変換を適用することにより、新しい伝達関数 $H(F(s))$ を得る手法である。ここで、 $1/F(s)$ は次式で与えられる M 次のリアクタンス関数^{12, 13)} である。

$$\frac{1}{F(s)} = \frac{A_0}{s} + \sum_{k=1}^l \frac{2A_k s}{s^2 + \omega_k^2} + A_\infty s \quad (11)$$

周波数変換の代表例として、低域-低域変換・低域-高域変換・低域-帯域変換・低域-帯域阻止変換において用いられる関数 $1/F(s)$ を表 1 に示す。表 1 において、 $\omega_c, \Omega_0, \Delta$ は変換後のシステム $H(F(s))$ の遮断周波数、中心周波数、帯域幅をそれぞれ決定する変数である。

(11) 式において、 $A_\infty = 0$ となるときリアクタンス関数 $1/F(s)$ は厳密にプロパーとなり、逆に $A_\infty \neq 0$ のときはインプロパーとなる。表 1 の周波数変換では、低域-低域変換および低域-帯域変換における $1/F(s)$ が厳密にプロパーであり、低域-高域変換および低域-帯域阻止変換における $1/F(s)$ がインプロパーである。本稿では、リアクタンス関数 $1/F(s)$ は厳密にプロパーであると仮定して議論する。

3.2 厳密にプロパーなリアクタンス関数の状態空間表現

M 次の厳密にプロパーなリアクタンス関数 $1/F(s)$ の状態空間表現の係数を $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ とする。すな

わち、 $1/F(s)$ が次式のように表されているとする。

$$\frac{1}{F(s)} = \delta + \gamma(sI_M - \alpha)^{-1}\beta \quad (12)$$

ここで、 $1/F(s)$ が厳密にプロパーであることから $\delta = 0$ となる。また、 $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ は最小実現であるとする。このとき、次の補題が成立する¹³⁾。

補題 1 関数 $1/F(s) = \gamma(sI_M - \alpha)^{-1}\beta$ がリアクタンス関数であるための必要十分条件は、次式の関係を満足する対称正定行列 Q が存在することである。

$$\alpha Q + Q \alpha^t = 0_M \quad (13)$$

$$\beta = Q \gamma^t \quad (14)$$

ここで、 0_M は $M \times M$ の零行列である。

3.3 周波数変換によって得られる線形連続時間システムの状態空間表現

ここでは、周波数変換によって得られるシステム $H(F(s))$ の状態空間表現の係数と可制御性・可観測性グラミアンについて述べる。

まず、 $H(F(s))$ の状態空間表現の係数に関する次の補題を導入する¹⁴⁾。

補題 2 N 次の安定な伝達関数 $H(s)$ および M 次の厳密にプロパーなリアクタンス関数 $1/F(s)$ の状態空間表現の係数をそれぞれ (A, b, c, d) および $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ とする。このとき、周波数変換 $1/s \leftarrow 1/F(s)$ によって得られるシステム $H(F(s))$ は

$$H(F(s)) = \bar{d} + \bar{c}(sI_{MN} - \bar{A})^{-1}\bar{b} \quad (15)$$

と表され、 $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ は次式で与えられる。

$$\bar{A} = I_N \otimes \alpha + A \otimes (\beta \gamma) \quad (16)$$

$$\bar{b} = b \otimes \beta \quad (17)$$

$$\bar{c} = c \otimes \gamma \quad (18)$$

$$\bar{d} = d \quad (19)$$

補題 1 と補題 2 を利用すると、システム $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ の可制御性・可観測性グラミアンに関する次の定理が得られる^{15, 16)}。

がいえるので、上式を(13)-(14)式に代入して整理することにより、(27)-(28)式が得られる。(29)式は自明である。以上より、2)が示される。3)は、(27)-(28)式の関係から容易に導かれる。1)は、(27)-(29)式が無損失有界実関数の必要十分条件となることから得られる。□

補題3より、 $H(F(s))$ の平衡形実現の条件 $Q = I_M$ は、リアクタンス関数 $1/F(s)$ にケーリー変換を適用して得られるシステム $F_b(s)$ の状態空間表現が平衡形実現となるときに満足される。すなわち、 $(\alpha_b, \beta_b, \gamma_b, \delta_b)$ と等価なシステム $(S^{-1}\alpha_b S, S^{-1}\beta_b, \gamma_b S, \delta_b)$ が平衡形となるような正則行列 S を用いてリアクタンス関数 $1/F(s)$ の状態空間表現を $(S^{-1}\alpha S, S^{-1}\beta, \gamma S, 0)$ と等価変換することにより、 $Q = I_M$ が満足される。

以上の結果より、周波数変換によって得られるシステム $H(F(s))$ の平衡形実現は、以下の手順によって得られる。

- 1) $H(s)$ の状態空間表現 (A, b, c, d) に対して適当な正則行列 T を用いて等価変換を適用し、 $H(s)$ の平衡形実現 $(T^{-1}AT, T^{-1}b, cT, d)$ を求める。
- 2) 周波数変換に用いるリアクタンス関数 $1/F(s)$ の状態空間表現 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ に対して(23)-(26)式のケーリー変換を適用し、全域通過関数 $F_b(s)$ の状態空間表現 $(\alpha_b, \beta_b, \gamma_b, \delta_b)$ を得る。
- 3) 手順2)で求めた $(\alpha_b, \beta_b, \gamma_b, \delta_b)$ の等価変換 $(S^{-1}\alpha_b S, S^{-1}\beta_b, \gamma_b S, \delta_b)$ が平衡形となるような正則行列 S を求める。
- 4) 手順3)で求めた正則行列 S を用いて、リアクタンス関数 $1/F(s)$ の状態空間表現 $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$ を $(S^{-1}\alpha S, S^{-1}\beta, \gamma S, 0)$ に等価変換する。
- 5) 手順1)と手順4)で求めた係数 $(T^{-1}AT, T^{-1}b, cT, d)$ および $(S^{-1}\alpha S, S^{-1}\beta, \gamma S, 0)$ を用いて(16)-(19)式の周波数変換を行い、係数 $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$

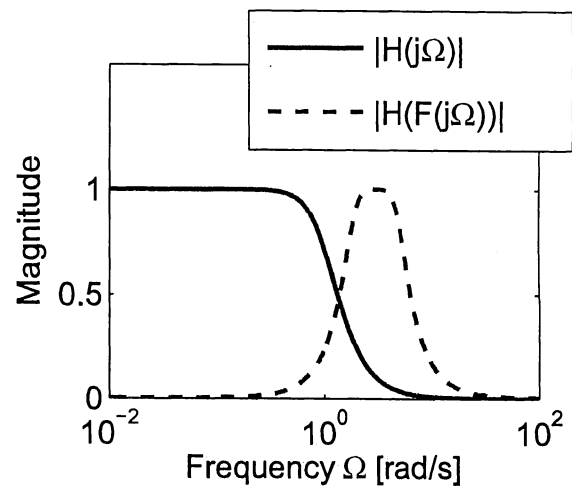


Fig. 2 システム $H(s)$ と $H(F(s))$ の振幅特性

を得る。このようにして得られた $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})$ が、 $H(F(s))$ の平衡形実現となる。

5. 計算例

伝達関数 $H(s)$ が次式で与えられる2次の線形連続時間システムを考える。

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 1.4142s + 1} \quad (35)$$

このシステムに対して、次式の厳密にプロパーなリアクタンス関数 $1/F(s)$ による周波数変換を適用する。

$$\frac{1}{F(s)} = \frac{4s}{s^2 + 9} \quad (36)$$

上式の関数を用いた周波数変換によって得られるシステムの伝達関数 $H(F(s))$ は次のように求まる。

$$H(F(s)) = \frac{16s^2}{s^4 + 5.6569s^3 + 34s^2 + 50.9117s + 81} \quad (37)$$

$H(s)$ と $H(F(s))$ の振幅特性を図2に示す。伝達関数 $H(F(s))$ が(37)式で与えられるシステムの平衡形実現を、前章で述べた手順に従って求める。

まず、(35)式の伝達関数 $H(s)$ の状態空間表現において、標準形の係数 (A, b, c, d) は次のように与えられる。

$$A = \begin{pmatrix} -1.4142 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, d = 0 \quad (38)$$

上式のシステムに対して

$$T = \begin{pmatrix} 0.3307 & -1.2343 \\ 0.6389 & 0.6389 \end{pmatrix} \quad (39)$$

による等価変換を適用すると、以下のシステムが得られる。

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} -0.2989 & -0.8165 \\ 0.8165 & -1.1154 \end{pmatrix}, b' = \begin{pmatrix} 0.6389 \\ -0.6389 \end{pmatrix} \\ c' &= \begin{pmatrix} 0.6389 & 0.6389 \end{pmatrix}, d' = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

上式のシステム(A', b', c', d')における可制御性グラミアン K' と可観測性グラミアン W' は

$$K' = W' = \text{diag}(0.6830, 0.1830) \quad (41)$$

となるので、(40)式のシステムは平衡形実現である。

次に、リアクタンス関数 $1/F(s)$ において、 $Q = I_M$ を満足させる状態空間表現の係数を求める。(36)式の伝達関数 $1/F(s)$ の状態空間表現において、標準形の係数は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \end{pmatrix}, \delta = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

上式のシステムにケーリー変換を適用すると、次の全域通過特性を有するシステムが得られる。

$$\begin{aligned} \alpha_b &= \begin{pmatrix} -4 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta_b = \begin{pmatrix} 1.4142 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma_b &= \begin{pmatrix} 5.6569 & 0 \end{pmatrix}, \delta_b = -1 \end{aligned} \quad (43)$$

このシステムを平衡形実現に等価変換するための正則行列 S は次式で与えられる。

$$S = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -0.1667 \end{pmatrix} \quad (44)$$

この S を用いて(42)式のシステムを等価変換すると、以下のシステムが得られる。

$$\begin{aligned} \alpha' &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \beta' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \gamma' &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}, \delta' = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

このシステムは、 $Q = I_2$ を満足させる。

(40)式と(45)式を用いて(16)–(19)式の周波数変換を行うと、以下のシステムが得られる。

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} -1.1954 & 3 & -3.2660 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3.2660 & 0 & -4.4614 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \\ \bar{b} &= \begin{pmatrix} 1.2779 & 0 & -1.2779 & 0 \end{pmatrix}^t \\ \bar{c} &= \begin{pmatrix} 1.2779 & 0 & 1.2779 & 0 \end{pmatrix} \\ \bar{d} &= 0 \end{aligned} \quad (46)$$

上式のシステムにおける可制御性グラミアン \bar{K} と可観測性グラミアン \bar{W} は次のように求まる。

$$\bar{K} = \bar{W} = \text{diag}(0.6830, 0.6830, 0.1830, 0.1830) \quad (47)$$

したがって、(46)式のシステムは $H(F(s))$ の平衡形実現である。この結果から、前章で述べた手順による手法が平衡形実現を保存する周波数変換であることが確認される。

6. おわりに

本稿では、リアクタンス関数が厳密にプロパーであるという仮定のもとで、線形連続時間システムの平衡形実現を保存する新しい周波数変換の手法を提案し、その計算例を示した。今後は、リアクタンス関数がインプロパーである場合において同様の議論を展開する予定である。さらに、平衡形実現に限らず、入力正規形・出力正規形・丸め誤差最小構造といった他の重要な実現を保存するような周波数変換の導出についても検討する予定である。

参考文献

- 1) B. C. Moore: Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-26**, 17/32 (1981)
- 2) L. Pernebo and L. M. Silverman: Model reduction via balanced state space representations, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-27**, 382/387 (1982)
- 3) D. F. Enns: Model reduction with balanced realizations: An error bound and a frequency weighted generalization, Proc. 23rd IEEE Conference on Decision and Control (1984)

- 4) K. Glover: All optimal hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds, *International Journal of Control*, **39**, 1115/1193 (1984)
- 5) 大日方五郎, B. アンダーソン: 制御システム設計 - コントローラの低次元化 -, 朝倉書店, (1999)
- 6) 川又政征, 岩月正見, 樋口龍雄: 線形システムにおける感度最小構造としての平衡形実現, 計測自動制御学会論文集, **21-9**, 900/906 (1985)
- 7) 樋口龍雄: デジタル信号処理の基礎, 昭晃堂 (1986)
- 8) 樋口龍雄, 川又政征: デジタル信号処理 - MATLAB対応 -, 昭晃堂 (2000)
- 9) G. Stoyanov and M. Kawamata: Variable digital filters, *Journal of Signal Processing*, 1-4, 275/290 (1997)
- 10) H. Matsukawa and M. Kawamata: Design of variable digital filters based on state-space realizations, *IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **E84-A**, 1822/1830 (2001)
- 11) H.-J. Jang and M. Kawamata: Realization of high accuracy 2-D variable IIR digital filters, *IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, **E85-A**, 2293/2301 (2002)
- 12) 前田肇: 線形システム, 朝倉書店 (2001)
- 13) 高橋進一, 有本卓: 回路網とシステム理論, コロナ社 (1974)
- 14) C. T. Mullis and R. A. Roberts: Roundoff Noise in Digital Filters: Frequency Transformations and Invariants, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, **ASSP-24**, 538/550 (1976)
- 15) 川又政征: 周波数変換に対する連続時間システムの2次モードの不変性について - リアクタンス関数に対する2次モードの不変性 -, 電子情報通信学会技術研究報告, **CAS2002-15**, **VLD2002-29**, **DSP2002-55**, 83/88 (2002)
- 16) M. Kawamata: On the Invariance of Second-Order Modes of Continuous-Time Systems under General Frequency Transformation, *Proc. IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 505/508 (2003)
- 17) P. C. Odenacker and E. A. Jonckheere: A contraction mapping preserving balanced reduction scheme and its infinity norm error bounds, *IEEE Trans. Circuits and Systems*, **CAS-35**, 184/189 (1988)
- 18) S. Gugercin and A. C. Antoulas: A survey of model reduction by balanced truncation and some new results, *International Journal of Control*, **77-8**, 748/766 (2004)
- 19) R. Ober: Balanced parametrization of classes of linear systems, *SIAM J. Control and Optimization*, **29-6**, 1251/1287 (1991)