

# 修理を伴う $m$ out of $N + 1$ システムの解析

## An Analysis for the $m$ out of $N + 1$ System with a Service Station

吉岡 良雄\*

Yoshio Yoshioka\*

\*弘前大学理工学部

\* Faculty of Science and Technology, Hirosaki University

キーワード :  $m$  out of  $n$  システム ( $m$  out of  $n$  system), 閉システム (closed loop system), 待ち行列システム (queueing system), 一般分布 (general distribution), 状態分布 (state probabilities)

連絡先 : 〒036-8561 弘前市文京町 3 弘前大学 理工学部 電子情報システム工学科 情報メディア工学講座  
吉岡良雄, Tel.: (0172)39-3667, Fax.: (0172)39-3513, E-mail: slyoshi@si.hirosaki-u.ac.jp

### 1. はじめに

インターネットおよびパソコンの普及に伴い, 待ち行列システムを利用したトラフィック解析やシステム設計が進められている。待ち行列システムは大きく分けて, 外部から到着した客を窓口で処理し退却する開システムと, 外部からの客の出入りがまったくない閉システムがある。前者のモデルは一般的なモデルであり様々なモデルが取り上げられ, 解析が進められている。しかし, 後者のモデルについては, 文献を調査してもあまり取り上げられていないのが現状である<sup>1) 2) 3) 4) 5)</sup>。後者のモデルとしては, 故障と修理のモデルがよく適合している<sup>6) 7)</sup>。この場合, 各要素の故障時間分布および修理時間分布がともに指数分布の場合において解析が進められている。また, 全要素数が  $n$  個からなるシステムにおいて, 最低  $m$  個の要素が正常に稼動していれば, システム全体が

正常稼動であるという  $m$  out of  $n$  システムの振る舞いも, このようなモデルとなる。ただし, 故障した要素は修理され, 修理終了後システムに戻され稼動するものとする。

本論文は, このようにモデル化できる情報システムが数多く存在するものと考え, 故障要素を修理する  $m$  out of  $n$  システムにおいて, 修理時間分布が一般分布に拡張した場合の解析を進める。そして, 修理時間分布が  $k$  相アーラン分布に従う場合の数値計算を行い, このようなシステムの評価量について検討を加える。

### 2. 修理を有する $m$ out of $N + 1$ システムのモデル

本論文で取り扱う  $m$  out of  $N + 1$  システムは,  $N + 1$  個の要素のうち, 最低  $m$  個の要素が稼動していれば, システム全体が稼動状態であるとい

うシステムであり，図 1 に示すような閉ループ型待ち行列システムとしてモデル化できる。すなわち，図において，複数の要素  $N + 1$  はそれぞれ独立に稼動しており，故障が発生しても他の要素への波及はなく，故障した要素は修理場 (Server) で修理されるモデルである。このようなモデルとしては，学校でのコンピュータ演習に利用するコンピュータシステムがもっともよい例である。すなわち， $N + 1$  台のパソコンを  $m$  人の学生で演習を行う場合である。そして，個々のパソコンが故障しても，他のパソコンには波及せず，別のパソコンを利用して演習を進めることが可能である。そして，故障したパソコンは修理に出される。修理が完了すれば，再び演習に利用されることになる。また，PC クラスタ並列処理システムもこのようなモデルとなる。

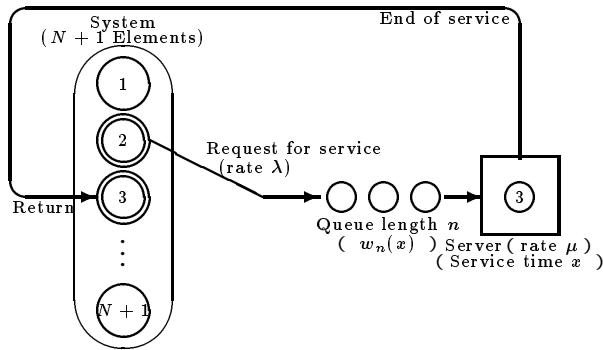


Fig.1 The  $m$  out of  $N + 1$  system in this paper.

### 3. 解析

ここでは，図 1 に示す  $m$  out of  $N + 1$  システム (閉ループ型待ち行列モデル) を中心として，文献 6) 7) で示した  $M/G/1(N+1)$  待ち行列システムの解析手法を用いて解析を進める。この解析を行うため，以下の設定を行う。

- (1) システムは定常状態であり，先着順処理 (修理) である。
- (2) 要素数は解析を容易に進めるため  $N + 1$  とする。また，各要素はそれぞれ稼動状態に入っ

た後，次に故障が発生するまでの時間分布を故障率  $\lambda$  の指数分布とする。この故障率  $\lambda$  は，各要素の平均故障時間 (MTBF: Mean Time Between Failures) が分かれば，その逆数として与えられる。

- (3) 修理場での修理時間分布の確率密度関数を  $f(x)$  とする。そして，この分布の平均修理時間を  $T_s$  とおく。さらに，修理時間が  $x$  時間経過して次の  $\Delta$  時間内に修理が終了する条件付き確率を  $\mu(x)\Delta + o(\Delta^2)$  とおくと，以下の関係が成立する 6) 7)。

$$f(x) = \mu(x) \cdot e^{-\int_0^x \mu(y) dy} \quad (1)$$

- (4) 任意時刻において，行列長が  $n$ ，修理時間が  $x$  である同時確率密度関数を  $w_n(x)$  とおく。また，故障中の要素が  $n + 1$  である確率 (状態確率という) を  $p_{n+1}$  とおく。このとき，次の関係が成立する。

$$p_{n+1} = \int_0^\infty w_n(x) dx \quad (N \geq n \geq 0) \quad (2)$$

また，任意時刻において修理場に故障している要素がない確率 (状態確率) を  $p_0$  とする。

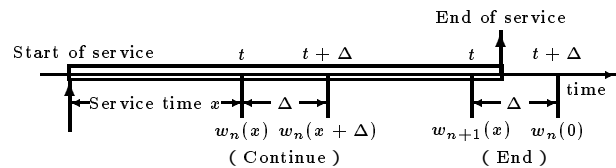


Fig.2 The relationship between  $t + \Delta$  and  $\Delta$

以上の設定の下で，確率密度関数  $w_n(x)$  について，任意時刻とその  $\Delta$  時間後との関係式は図 2 の修理継続 (Continue) において次式となる。

$$w_0(x + \Delta) = \{1 - N\lambda\Delta\}\{1 - \mu(x)\Delta\}w_0(x) + o(\Delta^2) \quad (3)$$

$$w_n(x + \Delta) = \{1 - (N - n)\lambda\Delta\}\{1 - \mu(x)\Delta\}w_n(x) + (N - n + 1)\lambda\Delta w_{n-1}(x) + o(\Delta^2) \quad (N \geq n \geq 1) \quad (4)$$

$$w_N(x + \Delta) = \{1 - \mu(x)\Delta\}w_N(x) + \lambda\Delta w_{N-1}(x) + o(\Delta^2) \quad (5)$$

なお，上式 (5) は式 (4) に含まれるが，以後の展開において表現式が簡単になるため，記載した。ここで， $\Delta \rightarrow 0$  とおけば，上式は以下の差分微分方程式（状態方程式）となる。

$$\frac{d}{dx}w_0(x) + \{N\lambda + \mu(x)\}w_0(x) = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}w_n(x) + \{(N-n)\lambda + \mu(x)\}w_n(x) \\ = (N-n+1)\lambda w_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (7)$$

$(N \geq n \geq 1)$

$$\frac{d}{dx}w_N(x) + \mu(x)w_N(x) = \lambda w_{N-1}(x) \quad (8)$$

これらの差分微分方程式の一般解は以下のようになる。

$$w_0(x) = C_0 \cdot e^{-N\lambda x - \int_0^x \mu(y)dy} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} w_n(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_{n-i} X_{n,i} e^{-(N-n+i)\lambda x - \int_0^x \mu(y)dy} \\ (N \geq n \geq 1) \end{aligned} \quad (10)$$

$$w_N(x) = \sum_{i=0}^N (-1)^i C_{N-i} e^{-i\lambda x - \int_0^x \mu(y)dy} \quad (11)$$

ここで， $C_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) は修理終了や修理開始という境界条件で決まる積分定数である。また， $X_{n,i}$  は次式である。

$$\begin{aligned} X_{n,i} &= 1 \quad (i = 0) \\ &= \frac{(N-n+i) \cdots (N-n+1)}{i!} \\ &\quad (N > n \geq i \geq 1) \end{aligned} \quad (12)$$

さらに，式 (2) から状態確率  $p_{n+1}$  は次式となる。

$$\begin{aligned} p_{n+1} = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_{n-i} X_{n,i} \frac{1 - f^*((N-n+i)\lambda)}{(N-n+i)\lambda} \\ (N > n \geq 0) \end{aligned} \quad (13)$$

$$p_{N+1} = C_N T_s + \sum_{i=1}^N (-1)^i C_{N-i} \frac{1 - f^*(i\lambda)}{i\lambda} \quad (14)$$

ここで， $f^*(i\lambda)$  は確率密度関数  $f(x)$  のラプラス変換であり，次式である。

$$f^*(i\lambda) = \int_0^\infty f(x) e^{-i\lambda x} dx \quad (N \geq i \geq 0) \quad (15)$$

一方，修理が終了（End of service）し，次の修理が開始される時点（境界条件）での関係は以下

のようになる。

$$\begin{aligned} p_0 &= \{1 - (N+1)\lambda\Delta\}p_0 \\ &+ \int_0^\infty \mu(x)\Delta w_0(x) dx + o(\Delta^2) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} w_0(0)\Delta &= \int_0^\infty \mu(x)\Delta w_1(x) dx \\ &+ (N+1)\lambda\Delta p_0 + o(\Delta^2) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} w_n(0)\Delta &= \int_0^\infty \mu(x)\Delta w_{n+1}(x) dx + o(\Delta^2) \\ &\quad (N > n \geq 1) \end{aligned} \quad (18)$$

これらを整理し， $\Delta \rightarrow 0$  とおけば，以下の関係式を得る。

$$(N+1)\lambda \cdot p_0 = \int_0^\infty \mu(x)w_0(x) dx \quad (19)$$

$$w_0(0) = \int_0^\infty \mu(x)w_1(x) dx + (N+1)\lambda p_0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} w_n(0) = \int_0^\infty \mu(x)w_{n+1}(x) dx \\ (N > n \geq 1) \end{aligned} \quad (21)$$

これらに，式 (9) (10) (11) を代入すれば，次の関係式（漸化式）を得る。

$$C_0 = \frac{(N+1)\lambda \cdot p_0}{f^*(N\lambda)} \quad (22)$$

$$C_1 = C_0 \cdot \frac{1 + (N-1)f^*(N\lambda)}{f^*((N-1)\lambda)} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i X_{n,i} C_{n-i} \\ &\cdot \frac{1 + \frac{N-n}{i+1} f^*((N-n+i)\lambda)}{f^*((N-n-1)\lambda)} \\ &\quad (N > n \geq 1) \end{aligned} \quad (24)$$

$$C_N = \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} \{i + f^*(i\lambda)\} C_{N-i} \quad (25)$$

式 (22) から (25) で求まる積分定数  $C_n$  を式 (13) および (14) に代入すれば，状態確率  $p_{n+1}$  ( $N \geq n \geq 0$ ) が求まる。なお，状態確率  $p_0$  は次式の全確率の和から求まる。

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_{N+1} = 1 \quad (26)$$

以上に示した解析手法は，文献 6) 7) で示した M/G/1(N+1) 待ち行列システムの解析手法と同じ方法であるが，行列への故障要素の到着率を要素

個々の故障の発生率で与えているため、式 (9) ~ (11) の一般解が  $M/G/1(N+1)$  待ち行列システムの場合より複雑なものになっている。さらに、その後の展開においても、より複雑な式となっている。なお、 $N = 0$  の場合の解析は要素数が 1 個であるため、本システムでは意味がない。また、 $N = 1$  の場合の解析は上述の解析に含まれている。

## 4. 数値計算

前章において、理論的に状態確率を求めた。この章では、修理時間分布が  $k$  相アーラン分布に従う場合における状態確率の数値計算を行う。まず、修理時間分布が  $k$  相アーラン分布の場合式 (15) は以下ようになる。

$$\begin{aligned} f^*(i\lambda) &= \int_0^{\infty} f(x)e^{-i\lambda x} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{(k\mu)^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-k\mu x} e^{-i\lambda x} dx \\ &= \left( \frac{k\mu}{i\lambda + k\mu} \right)^k \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 $\mu = 1/T_s$  である。表 1 および図 3 は要素数が 6、平均修理時間を 1 (基準時間)、 $k = 5$  として、故障率  $\lambda$  に対する状態確率を計算したものである。この表および図から、 $p_0$  は単調減少し、 $p_{N+1}$  は単調増加することがわかる。ただし、他の状態確率は故障率  $\lambda$  が大きくなるにつれ、 $p_1, p_2, \dots, p_N$  の順に極大値をとる。さらに、アーラン分布の相  $k$  の値について種々の数値計算を行った結果、 $k$  の値が大きくなるにつれて、極大点の確率が高くなっている。例えば、 $p_4$  の極大値は、 $k = 2$  で  $\lambda = 0.51$  のとき  $p_4 = 0.3118$ 、 $k = 5$  で  $\lambda = 0.52$  のとき  $p_4 = 0.3466$ 、 $k = 10$  で  $\lambda = 0.52$  のとき  $p_4 = 0.3611$ 、 $k = 100$  で  $\lambda = 0.53$  のとき  $p_4 = 0.3759$  のように順に高くなっている。しかしながら、全体的な傾向は同じである。このため、他の数値計算結果については割愛した。なお、個々の要素の故障率  $\lambda$  は、システムが有限であるため、さらに大きな値で数値計算を行ってもよい。

なお、数値計算結果の詳細については、口頭発表時に行う。

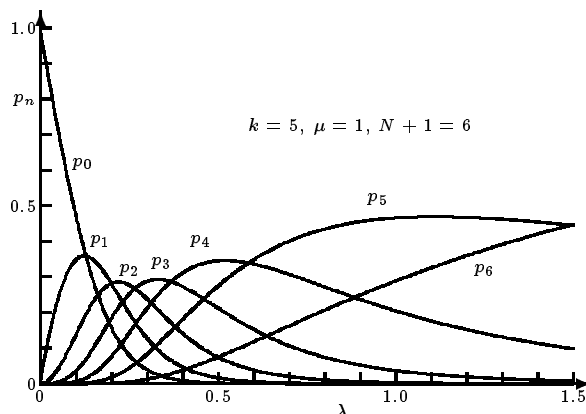


Fig.3 The probabilities  $p_n$  vs.  $\lambda$ .

## 5. 検討

前章で求めた状態確率  $p_n$  ( $N+1 \geq n \geq 0$ ) が与えられれば、各種評価量が導出できる。そこで、このようなシステムを評価するための量 (評価量) を以下に示し検討する。

### (1) 状態確率から求まる評価量

まず、状態確率から評価できる量として、全要素が稼動状態である確率およびすべての要素が修理中である確率があり、それぞれ  $p_0$  および  $p_{N+1}$  で与えられる。表 1 および図 3 においては、 $p_0$  および  $p_6$  がこの場合の評価量となる。

### (2) 修理に出されている平均要素数および平均待ち行列長

修理に出されている平均要素数  $L$  や平均待ち行列長  $L_q$  はそれぞれ次式で与えられる。

$$L = \sum_{n=1}^{N+1} n \cdot p_n \quad (28)$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{N+1} (n-1) \cdot p_n \quad (29)$$

表 1 に修理に出されている平均要素数  $L$  の値を示した。この表から分かるように、 $\lambda$  が

増加するにつれて単調増加し，系内数である  $N + 1$  に近づく。このようなシステム設計を行う場合，1 窓口の待ち行列システムの最適化 6) 7) から修理に出されている平均要素数が 1 であるとき，修理場としてもっとも効率的である。そこで，表 1 および図 3 において， $L = 1$  となる故障率は  $\lambda = 0.124$  である。このとき， $p_1$  がほぼ極大値をとる点となっている。

### (3) 平均滞在時間

故障要素が修理に出されて戻ってくるまでの平均滞在時間  $W$  の関係式を求める。まず，図 2 に示す修理継続時点  $x$  に到着し， $y$  時間経過後にその修理が終了する。そして，行列に並んでいる要素数  $n + 1$  の修理がすべて終了するまでにかかった時間が平均滞在時間  $W$  となる。従って，平均滞在時間  $W$  および平均待ち時間  $W_q$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 W &= W_q + T_s & (30) \\
 W_q &= \sum_{n=0}^N \int_0^{\infty} w_n(x) \{ nT_s \\
 &\quad + \int_0^{\infty} y \frac{f(x+y)}{1-F(x)} dy \} \cdot dx \\
 &= \sum_{n=0}^N \{ p_{n+1} \cdot nT_s \\
 &\quad + \sum_{i=0}^n (-1)^i C_{n-i} \cdot X_{n,i} \frac{f^*((N-n+i)\lambda)}{((N-n+i)\lambda)^2} \} \\
 & & (31)
 \end{aligned}$$

表 1 および図 4 に平均待ち時間  $W_q$  と平均修理要素数  $L$  を示した。平均滞在時間  $W$  はこれに  $T_s = 1$  を加えた値となる。この表から，故障率  $\lambda$  の増加とともに， $W_q = N \cdot T_s = 5$  に近づくことが分かる。

### (4) $m$ out of $N + 1$ システムの稼働率

図 1 に示すモデルがこのような  $m$  out of  $N + 1$  システムである場合，システム全体が正常に動作している確率（稼働率） $P_x$  は次

式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 P_x &= p_0 + p_1 + \cdots + p_{N+1-m} \\
 &= \sum_{n=0}^{N+1-m} p_n & (32)
 \end{aligned}$$

表 1 において，4 out of 6 システムが正常に動作する確率は  $P_x = p_0 + p_1 + p_2$  で求められ，図 5 に示すグラフおよび表 1 となる。なお，この  $m$  out of  $N + 1$  システムは，全要素数が  $N + 1$  個のうち，最低  $m$  個の要素が正常に稼働していれば，システム全体として正常であるため，多数決冗長システムということもある。

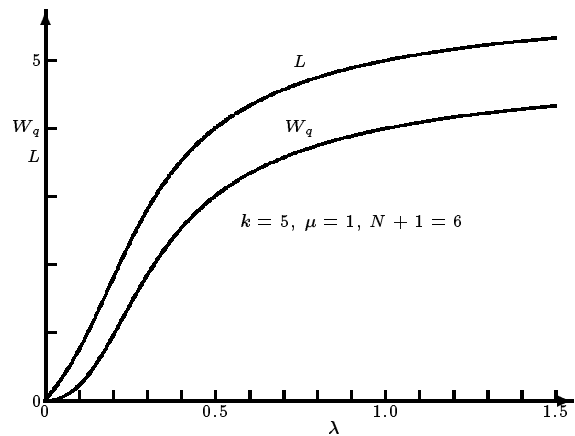


Fig.4 The average waiting time  $W_q$  and the average queue length  $L$  vs.  $\lambda$ .

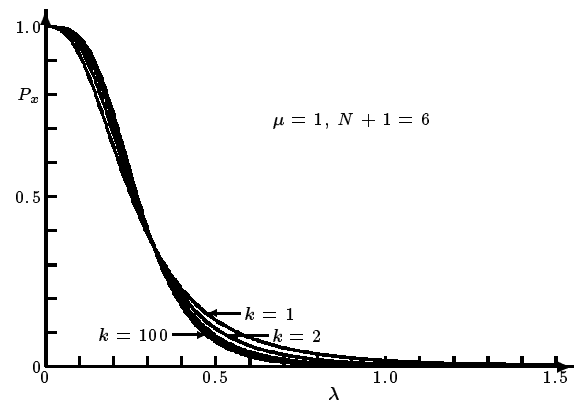


Fig.5 The probability  $P_x$  vs.  $\lambda$ .

以上，図 1 に示すような  $m$  out of  $N + 1$  システム（閉ループ型待ち行列システム）における評価量を示してきた。情報システムの展開とともに，このような閉ループ型待ち行列モデルが数多く存

在するものと考え，その解析手法および評価量を示した。

## 6. まとめ

本論文では， $m$  out of  $N+1$  システム（閉ループ型待ち行列システム）のモデルを取り上げ，修理時間分布が一般分布に拡張した場合の状態確率を求めた。この状態確率について，修理時間分布が  $k$  相アーラン分布に従う場合の数値計算を行い検討を行った。さらに，この状態確率から求められる評価量について検討を行った。今後，このようなモデルとなる具体的なシステムに適用し，システム設計・評価について検討を行う。

## 参考文献

- 1) 本間鶴千代：“待ち行列の理論”，理工学社，1966。
- 2) 牧野都治：“待ち行列の応用”，森北出版，1969。
- 3) L. Kleinrock: "Queueing Systems: Vol.1: Theory", John Wiley & Sons Inc. 1975.
- 4) H. Takagi: "Queueing Analysis, Vol.1, Vol.2, Vol.3", North Holland, 1991.
- 5) D. Gross and C. M. Harris: "Fundamentals of Queueing Theory", John Wiley & Sons Inc. 1998.
- 6) 吉岡良雄：“電子計算機システム設計（待ち行列システムによる）”，森北出版，pp.63-66（故障と修理のモデル），pp.76-82（M/G/1(N+1) 待ち行列システムの解析），p.82（式（1）の導出），pp.105-113（待ち行列システムの最適化），1988。
- 7) 吉岡良雄：“待ち行列と確率分布（情報システム解析への応用）”，森北出版，p.27-28（式（1）の導出），pp.46-64（待ち行列システムの最適化），pp.76-90（M/G/1(N+1) 待ち行列システムの解析），pp.100-107（故障と修理のモデル），2004。

Table 1 The state probabilities  $p_n$ ,  $L$  and  $W_q$  vs.  $\lambda$   
( $k = 5$ ,  $\mu = 1$ ,  $N + 1 = 6$ )

$\lambda$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$	$p_5$	$p_6$	$L$	$W_q$	$P_x$
0.00	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.000
0.05	0.7167	0.2376	0.0408	0.0045	0.0003	0.0000	0.0000	0.3341	0.0509	0.9951
0.10	0.4750	0.3480	0.1362	0.0346	0.0057	0.0006	0.0000	0.7498	0.2248	0.9592
0.15	0.2872	0.3485	0.2314	0.1003	0.0279	0.0044	0.0003	1.2477	0.5349	0.8671
0.20	0.1584	0.2828	0.2818	0.1830	0.0752	0.0172	0.0016	1.7918	0.9502	0.7230
0.25	0.0810	0.1994	0.2780	0.2515	0.1415	0.0433	0.0052	2.3240	1.4050	0.5584
0.30	0.0394	0.1283	0.2393	0.2874	0.2110	0.0823	0.0122	2.7981	1.8375	0.4070
0.35	0.0187	0.0783	0.1891	0.2914	0.2696	0.1297	0.0231	3.1964	2.2151	0.2861
0.40	0.0089	0.0465	0.1421	0.2738	0.3112	0.1800	0.0375	3.5221	2.5310	0.1975
0.45	0.0042	0.0274	0.1037	0.2451	0.3357	0.2290	0.0549	3.7872	2.7914	0.1353
0.50	0.0020	0.0162	0.0747	0.2128	0.3458	0.2741	0.0744	4.0041	2.0061	0.0929
0.55	0.0010	0.0096	0.0535	0.1814	0.3451	0.3140	0.0954	4.1837	3.1847	0.0641
0.60	0.0005	0.0058	0.0383	0.1529	0.3369	0.3483	0.1174	4.3342	3.3347	0.0446
0.65	0.0003	0.0035	0.0275	0.1281	0.3239	0.3771	0.1397	4.4619	3.4622	0.0313
0.70	0.0001	0.0022	0.0198	0.1069	0.3079	0.4008	0.1622	4.5716	3.5718	0.0221
0.75	0.0001	0.0013	0.0144	0.0892	0.2905	0.4200	0.1845	4.6668	3.6668	0.0158
0.80	0.0000	0.0009	0.0105	0.0744	0.2725	0.4352	0.2065	4.7501	3.7501	0.0114
0.85	0.0000	0.0005	0.0077	0.0621	0.2546	0.4470	0.2280	4.8236	3.8236	0.0082
0.90	0.0000	0.0004	0.0057	0.0520	0.2373	0.4558	0.2488	4.8889	3.8889	0.0061
0.95	0.0000	0.0002	0.0043	0.0436	0.2207	0.4621	0.2691	4.9474	3.9474	0.0045
1.00	0.0000	0.0001	0.0032	0.0367	0.2050	0.4663	0.2887	5.0000	4.0000	0.0033
1.20	0.0000	0.0000	0.0011	0.0189	0.1522	0.4678	0.3600	5.1667	4.1667	0.0011
1.50	0.0000	0.0000	0.0003	0.0076	0.0986	0.4458	0.4478	5.3333	4.3333	0.0003
1.90	0.0000	0.0000	0.0000	0.0026	0.0577	0.4030	0.5367	5.4737	4.4737	0.0000