

## 倒立振子の製作と制御系設計

### Design of Control System and Product of an Inverted Pendulum

○佐藤諭\*,大久保重範\*,及川一美\*,高橋達也\*

○Satoru SATO\*,Shigenori OKUBO \*,Kazumi OIKAWA\*,Tatsuya TATAHASHI\*

\*山形大学

\*Yamagata University

キーワード： 倒立振子 (Inverted pendulum), 非線形モデル追従制御 (Nonlinear Model following control system)

連絡先： 〒992-8510 米沢市城南4-3-16 山形大学工学部機械システム工学科 大久保研究室  
大久保重範, Tel.(0238)26-3245: , Fax.(0238)26-3245: E-mail: sokubo@yz.yamagata-u.ac.jp

## 1. はしがき

倒立振子とは振子を倒立にさせたものである。傾いた状態から倒立状態にすることを目的とする。本研究では、倒立振子を製作し、安定制御の理論を開発とする。シミュレーションと実験機への制御方式を適用し、それぞれの制御方式の有効性を確認する。

## 2. 倒立振子

本研究では、レール式倒立振子を考える。レールの上に台車が固定され、レールが動くことによって台車についている振り子が動きます。以下にそのモデル図を示します。

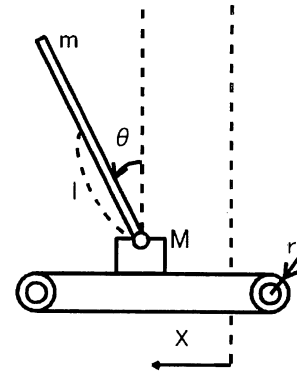


Fig. 1 Model of an inverted pendulum

$M$  : 台車の質量[kg]  $m$  : 振子の質量[kg]

$l$  : 振子の重心までの距離[m]  $r$  : プーリー半径[m]

$x$  : 台車の変位[m]  $\theta$  : 振子の傾き[deg]

このシミュレーションで用いている運動方程式を以下に示す。

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \ddot{\theta} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 = \\ \frac{KmKg}{rR}u - \frac{Km^2Kg^2}{r^2R}\dot{x} \\ ml\ddot{x}\cos\theta + \frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$Km$  : モータトルク定数[Nm/A]  $Kg$  : ギア比

$R$  : モータ直流抵抗[Ω]  $g$  : 重力加速度[m/s<sup>2</sup>]

$u$  : モータの入力電位[V]

### 3. サーボ系

運動方程式を線形化したものを次式に示す。

$$x_1 = \Delta x, x_2 = \Delta \dot{x}, x_3 = \Delta \theta, x_4 = \Delta \dot{\theta} \text{ とする。}$$

出力は

$$y = \theta = x_3 \quad (2)$$

拡大系をつくる。

$$\dot{v} = y - r = x_3 - r \quad (3)$$

$r$ :  $\theta$  の目標値

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-4Km^2Kg^2}{(4M+m)r^2R} & \frac{-3mg}{4M+m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3Km^2Kg^2}{(4M+m)lr^2R} & \frac{3g(M+m)}{(4M+m)l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4KmKg}{(4M+m)rR} \\ 0 \\ \frac{-3KmKg}{(4M+m)lrR} \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \quad (4)$$

システムの安定化のため極配置法を用いる。極配置法の方法として足田の方法を用いてフィードバック係数を求める

各種パラメータは実験機の値を用い、次のように設定した。

$$M = 0.165[Kg] \quad m = 0.12[Kg] \quad l = 0.25[m]$$

$$g = 9.8[m/s^2] \quad r = 0.021[m]$$

$$Km = 0.00338[Nm/A]$$

$$Kg = 76.5 \quad R = 1[\Omega]$$

これを用いたシミュレーション結果を以下に示す。

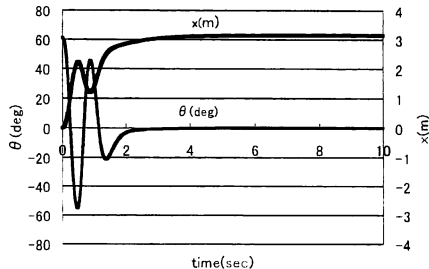


Fig. 2 Responses of a servo system

初期値  $\theta = 61.0(\text{degree})$ ,  $x = 0.0[m]$

### 4. 非線形モデル追従形制御系の設計

制御対象式は次式で表される。

$$\ddot{x} = \frac{4ml^2KmKg}{3rR}u + \varphi_2(x) \quad (5)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-ml \cos \theta \frac{KmKg}{rR}u + \varphi_3(x)}{\varphi_1(x)} \quad (6)$$

$$y = \theta + d_0(t) \quad (7)$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = (m+M)\frac{4}{3}ml^2 + m^2l^2 \cos^2 \theta \\ \varphi_2(x) = \frac{4}{3}ml^2 \left( -\frac{Km^2Kg^2}{r^2R} \dot{x} + ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \\ \quad - m^2l^2 \sin \theta \cos \theta \\ \varphi_3(x) = (M+m)mgl \sin \theta \\ \quad - ml \cos \theta \left( -\frac{Km^2Kg^2}{r^2R} \dot{x} - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \right) \end{cases} \quad (8)$$

モデル式は次式で表せる。

$$D_m(p)y_m = r_m \quad (9)$$

$$y_m = \text{frac}1D_m(p)r_m \quad (10)$$

微分演算子  $p = d/dt$  を用いて

$$D(p) = p^2 + a_1 + a_0 \quad (11)$$

相対次数:  $n_y = 2$

出力方程式  $y(t)$  は  $D(p)$  を用いて次のように変形できる

$$\begin{aligned} y &= D(p)^{-1}D(p)y \\ &= D(p)^{-1}\{g(x, u) + d_y\} \end{aligned} \quad (12)$$

$$D(p)y = g(x, u) + d_y \quad (13)$$

よって

$$\begin{aligned} D(p)y &= g(x, u) \\ &= \ddot{\theta} + a_1\dot{\theta} + a_0\theta \\ &= \frac{-ml \cos \theta \frac{KmKg}{rR}y + \varphi_3(x)}{\varphi_1(x)} + a_1\dot{\theta} + a_0\theta \end{aligned} \quad (14)$$

制御入力 $u(t)$ は次式のようになる

$$u = \frac{rR}{mlK_m K_g \cos \theta} \left( \varphi_3(x) - \varphi_1(x) \left( v - a_1 \dot{\theta} - a_0 \theta \right) \right) \quad (15)$$

外乱の定義

$$D_d(p)d(t) = 0, D_d(p)d_0(t) = 0, D_d(p) = n_d$$

$D_d(p)$ : 外乱の特性多項式

外乱の特性多項式は

$$D_d(p) = p \quad (16)$$

$n_m \geq n_y$ より $n_m = 2$ とし $D_m(p)$ を次式のようにおく

$$D_m(p) = p^2 + a_1 p + a_0 = D(p) \quad (17)$$

多項式による制御系の設計

$\rho$ 次( $\rho \geq 2n_y + n_d - n_m - 1$ )のモニックな安定な多項式 $T(p)$ を選ぶ。次式により $R(p), S(p)$ を求める。

$$T(p)D_m(p) = D_d(p)D(p)R(p) + S(p) \quad (18)$$

ここで、各 $p$ に関する多項式の次数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \partial T(p) &= \rho = 2, \partial D_m(p) = n_m = 2, \partial D_d(p) = n_d = 1, \\ \partial D(p) &= n_y = 2, \partial R(p) = \rho + n_m - n_d - n_y = 1, \\ \partial S(p) &\geq n_d + n_y - 1 = 2 \end{aligned} \quad (19)$$

誤差 $e(t) = y - y_m \rightarrow 0$ になるように制御する

$$\begin{aligned} T(p)D_m(p)e(t) &= Q(p)[g(x, u) + Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(p) \\ &- Q(p)\}g(x, u) + Q(p)^{-1}S(p)y - Q(p)^{-1}T(p)r_m] \end{aligned} \quad (20)$$

$T(p)D_m(p)e(t) = 0$ となるので次式のように $g(x, u)$ を得る。

$$\begin{aligned} g(x, u) &= -Q(p)^{-1}(D_d(p)R(p) - Q(p))g(x, u) \\ &- Q(p)^{-1}S(p)y + Q(p)^{-1}T(p)r_m \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $Q(p)$ は $|Q(p)|$ が安定な多項式であるような多項式行列であり次式を満たすように与える。

$$\partial Q(p) = \rho + n_m - n_y = 2 \text{ となり}$$

$$\begin{aligned} g(x, u) &= -D(p)^{-1}(D_d(p)(p + a_1) - D(p))g(x, u) \\ &- D(p)^{-1}D_d(p)a_0 y + D(p)^{-1}D(p)r_m \\ &= \frac{a_0}{p^2 + a_1 p + a_0}g(x, u) - a_0 y + r_m \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、状態変数フィルタを用いる

$$\dot{\zeta}_1 = F_1 \zeta_1 + G_1 v \quad (23)$$

$$\dot{\zeta}_2 = F_2 \zeta_2 + G_2 y \quad (24)$$

状態変数フィルタを用いて次のように書き換えられる。

$$v = -H_1 \zeta_1 - \alpha_2 y + r_m \quad (25)$$

$$H = [a_0 \quad 0]$$

$$y_m = (11em0) \quad (26)$$

$$y = \theta + d_0 \quad (27)$$

$e(t) \rightarrow 0$ を満足するから、制御系を構成する内部状態が有界であれば、非線形モデル追従形制御系が実現できる。

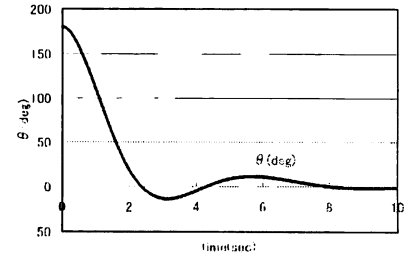


Fig. 3 Response of a nonlinear model following control system

初期値  $\theta = 180.0(\text{degree}), x = 0.0[m]$

## 5. 倒立振子の実験機的设计

このシステムの流れは以下の通り。

- 1) 振り子、台車の初期位置測定
- 2) 振り子角、台車の位置検出

- 3) エンコーダーパルスカウンタを介してPCに位置データを転送
- 4) PC上でのプログラムによりサンプル周期ごとの位置データ取得
- 5) PC上のプログラムにより速度、角速度を換算
- 6) PC上にて制御プログラムを実行
- 7) 6でのコントロール量をDigital I/Oボードを介して出力
- 8) 自作ボード上のPICにより7からの出力に対応したパルスをもータドライバへ出力
- 9) 8の出力を受けてモータが駆動し台車が動き振子の傾きが変わる
- 10) 制御目的(振子が直立状態になる)を満たすまで1~9の操作を繰り返す

このシステムで用いる実機の概略図を以下に示す。

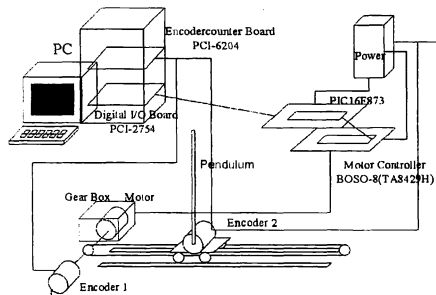


Fig. 4 Outline of an inverted pendulum system

実験機の概観の写真を以下に示す。

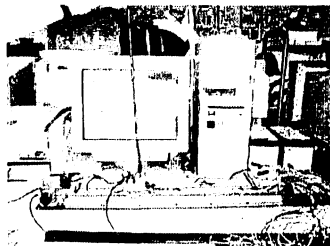


Fig. 5 Photo of an inverted pendulum system

## 6. 結言

倒立振子のサーボ系及び非線形モデル追従制御を用いたシミュレーションの結果について述べた。今後は実験機の調整を済ませシミュレーションで用いた制御系の適応を行いたいと思います。

## 参考文献

- 1) 森泰親:制御工学,コロナ社(2001)
- 2) 吉田勝久,佐野昭:基礎システム理論,コロナ社(1978)