計測自動制御学会東北支部 第224回研究集会 (2005.10.14)
資料番号 224-18

多項式形非線形系の厳密線形化による安定化制御

Stabilization Control using the Strict Linearization of Polynomial Form Nonlinear System

○蘇　宇航*，大久保　重範**，及川　一美***，高橋　達也†

○ Yuhang Su*, Shigenori Okubo**,
Kazumi Oikawa***, Tatsuya Takahashi†

*山形大学

*Yamagata University

キーワード： 多項式 (polynomial), 非線形系 (nonlinear system), 厳密線形化 (strict Linearization)

連絡先： 〒992-8510　山形県米沢市城南4-3-16 山形大学 工学部 機械システム工学科 大久保研究室
蘇　宇航，Tel：(0238)26-3245，Fax：(0238)26-3245，E-mail: tr154@dip.yz.yamagata-u.ac.jp

1.　はじめに

システム制御を行う時,制御対象として扱っている状態方程式はほとんどが非線形特性を持っているため,非線形特性を無視できる場合はよいが,非線形特性を無視できない場合や非線形特性を考慮して制御したい場合は,まずその非線形系に対して線形化を行う必要がある.多様体論による厳密線形化は線形化されたシステムを用いて設計されたコントローラで原点近くのみでなく,状態空間全体での設計を目的とする.一般的には、線形独立であるかおよびインボリュティブであるか要素を調べて、条件を満たす場合のみ、フロベニウス定理により厳密線形化するための座標変換とフィードバックに必要な関数を見つけることができる.しかし、この条件が厳しくて、必ずしも、その関数を見つけられるとは限らない.ここで一つの工夫として、制御対象を多項式で記述されると予め設定することにより見つけられる関数の様子を把握する.

2.　多項式形非線形系への適用

従来の一入力非線形系の状態方程式

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{1}$$

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$、$f(x) \in R^n$、$g(x) \in R^n$ とする.原点の近傍Vが存在してV上で可制御線形状態方程式とフィードバック等価であるための必要十分条件 (1) は $\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \cdots, ad_f^{n-1} g\}(x)$ がすべての$x \in V$において線形独立であり,必要十分条件 (2) は $\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \cdots, ad_f^{n-2} g\}(x)$ がV上でインボリューティブ (*Involutive*) である.

多項式形非線形系の状態方程式

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{N} A_{[1,k]} x^{[k]} + bu \tag{2}$$

$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$、$u = (u_1, u_2, \cdots, u_m)^T \in R^m$ は系の入力、$A_{[1,k]} \in R^{n \times n^k}$、$b \in R^n$とする.

可制御条件 *(1)*$\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \cdots, ad_f^{n-1} g\}(x)$ がすべて$x \in V$において線形独立である条件により

$$\rho(x) = \mid ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \cdots, ad_f^{n-1} g \mid \neq 0 \quad (3)$$

これを多項式系に使えば

$$\rho(x) = \mid b, \sum_{k=0}^{N-1} A_{[1,k]}^{(1)} x^{[k]}, \cdots, \sum_{k=0}^{(n-1)(N-1)} A_{[1,k]}^{(n-1)} x^{[k]} \mid$$

$\rho(x)$の次数は $N_\rho = \frac{1}{2}n(n-1)(N-1)$ とする

$$\rho(x) = \sum_{k=0}^{N_\rho} \zeta_{[0,k]}^T x^{[k]} \quad (4)$$

$\rho(x) \neq 0$ により,$\rho(x) > 0, or, \rho(x) < 0$となる.

$\bar{\rho}(x) = \zeta_{[0,0]}\rho(x) = \sum_{k=0}^{2M} \bar{\zeta}_{[0,k]}^T x^{[k]}$と定義すると,$x \in \Omega$で,$\bar{\rho}(x) > 0$となる.ただし,$N_\rho = 2M$とする.この条件を満たす$\zeta_{[0,k]}^T$を求めるため.

$$\bar{\rho}(x) = G^{T[0,M]}(x) P_{G[M,M]} G^{[0,M]}(x) \quad (5)$$

とする.ここで

$$G^{T[0,M]}(x) = [1, x^T, x^{T[2]}, \cdots, x^{T[M]}]$$

$$P_{G[M,M]} = \begin{bmatrix} p_{[0,0]} & p_{[0,1]} & & 0 \\ p_{[0,1]} & p_{[1,1]} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & p_{[M-1]} \\ 0 & & p_{[M-1,M]} & p_{[M,M]} \end{bmatrix}$$

$$G^{[0,M]}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x_{[M]} \end{bmatrix}$$

線形独立である条件$\bar{\rho}(x) > 0, x \in \Omega$の十分条件

$$P_{G<M,M>} > 0 \quad (6)$$

可制御条件 *(2)*$\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \cdots, ad_f^{n-2} g\}(x)$が$V$上でインボリューティブ *(Involutive)*になる条件により

$$\sigma_{ij}(x) = \mid ad_f^0 g, ad_f^1 g, \cdots, ad_f^{n-2} g, [ad_f^i g, ad_f^j g] \mid \quad (7)$$

と定義のとき,$0 \leqq i < j \leqq (n-2)$,$\sigma_{ij}(x) = 0$.

これを多項式系に使えば

$$[ad_f^i g, ad_f^j g] = (\frac{\partial ad_f^j g}{\partial x^T}) ad_f^i g - (\frac{\partial ad_f^i g}{\partial x^T}) ad_f^j g = \sum_{k=0}^{(N-1)(i+j)-1} A_{[1,k]}^{(i,j)} x^{[k]} \quad (8)$$

$$\sigma_{ij}(x) = |b, \sum_{k=0}^{N-1} A_{[1,k]}^{(1)} x^{[k]}, \cdots, \sum_{k=0}^{(N-1)(i+j)-1} A_{[1,k]}^{(i,j)} x^{[k]} \mid$$

$\sigma_{ij}(x)$の次数$N\rho_{ij} = (N-1)\{i+j+\frac{(n-2)(n-1)}{2}\}-1$となるから,

$$\sigma_{ij}(x) = \sum_{k=0}^{N\rho_{ij}} \zeta_{ij}{}_{[0,k]}^T x^{[k]} \quad (9)$$

$\sigma_{ij}(x) = 0$により、多項式系のインボリューティブ *(Involutive)*の十分条件は

$$\zeta_{ij[0,k]}^T = 0 \quad (10)$$

$0 \leqq i < j \leqq (n-2)$,$0 \leqq k \leqq N\rho_{ij}$となる.

可制御条件 *(1)*線形独立と *(2)*インボリューティブが成立するとき,フロベニウスの定理により,原点近傍Vと$\bar{V}$上で$L_{ad_f^i g}\phi(x) = 0, [i = 0, 1, \cdots, (n-2)]$と$L_{ad_f^{n-1} g}\phi(x) \neq 0$を満たす$c^\infty$関数$\phi(x)$が存在する.多項式系は二つ可制御条件を満たし、フロベニウスの定理から、多項式形非線形系の$\phi(x)$を求める.

$$\begin{aligned} & [b, \sum_{k=0}^{N-1} A_{[1,k]}^{(1)} x^{[k]}, \cdots \sum_{k=0}^{(N-1)(n-1)} A_{[1,k]}^{(n-1)} x^{[k]}]^{-1} \\ = & [b_0(x), b_1(x), \cdots, b_{n-1}(x)]^{-1} \\ = & \begin{bmatrix} \alpha_0^T(x) \\ \alpha_1^T(x) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T(x) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

とする,

$$\begin{pmatrix} \alpha_0^T(x) \\ \alpha_1^T(x) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0(x), b_1(x), \cdots, b_{n-1}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_0^T(x) b_0(x), \cdots, \alpha_0^T(x) b_{n-1}(x) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}^T(x) b_0(x), \cdots, \alpha_{n-1}^T(x) b(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

より

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1}^T(x)b_i(x) &= 0, \quad i=0,\cdots,(n-2) \\ \alpha_{n-1}^T(x)b_{n-1}(x) &= 1 \end{aligned} \tag{13}$$

である. ここで

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^T} = \rho(x)\alpha_{n-1}^T(x) \tag{14}$$

とする,

$$\begin{aligned} L_{ad_f^i g}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x^T}adf^i g = \rho(x)\alpha_{n-1}^T(x)b_i(x) = 0 \\ L_{ad_f^{n-1} g}\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x^T}adf^{n-1} g = \rho(x)\alpha_{n-1}^T(x)b_{n-1}(x) \\ &= \rho(x) \neq 0 \end{aligned} \tag{15}$$

行列の演算により,関数$\phi(x)$の微分は

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \sum_{k=0}^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(N-1)} B_{[1,k]}^{(n-1)}x^{[k]} \tag{16}$$

で与えられる.これより,$\phi(x)$はxの$\{M_0 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)(N-1)+1\}$次の多項式で与えられる.

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{M_0} C_{[0,k]}^{(0)T}x^{[k]} \tag{17}$$

$B_{[1,k]}^{(n-1)}$と$C_{[0,k]}^{(0)T}$とにはつぎの関係がある.

$$\begin{aligned} & x^T\{B^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{k}\{B^{(n-1)}\}^{\sigma_{ij}(i,j)}\}x^{[k]} \\ = \;& C_{[0,k+1]}^{(0)T}x^{[k+1]} \end{aligned}$$

$\sigma_{ij}(i,j)$は共変添子と反変添子の転置である.

多様体論による厳密線形化は,可制御条件を満たす関数$\phi(x)$が存在し,この関数を用いてシステムを線形化する座標変換とフィ-ドバックの一つは

$$\xi = P(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ L_f\phi(x) \\ L_f^2\phi(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1}\phi(x) \end{bmatrix} \tag{18}$$

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v = \frac{v - L_f^n\phi(x)}{L_gL_f^{n-1}\phi(x)} \tag{19}$$

で与えられる.これらを用いて非線形化システムは線形化され,可制御になる.

座標変換の要素

$$L_f\phi(x) = \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^T}f = \sum_{k=1}^{M_1} C_{[0,k]}^{(1)T}x^{[k]}$$

である。一般的な要素

$$\begin{aligned} L_f^i\phi(x) &= \sum_{k=1}^{M_i} C_{[0,k]}^{(i)T}x^{[k]} \\ L_f^{i+1}\phi(x) &= \sum_{k=1}^{M_i} C_{[0,k]}^{(i)T}\sum_{r=1}^{k}(x\otimes\cdots\otimes f\otimes\cdots\otimes x) \\ &= \sum_{k_1=1}^{M_i+1} C_{[0,k]}^{(i+1)T}x^{[k]} \\ L_f^{n-1}\phi(x) &= \sum_{k=1}^{M_{n-1}} C_{[0,k]}^{(n-1)T}x^{[k]} \end{aligned}$$

より,多項式形非線形系の座標変換は

$$\xi = p(x) = \begin{bmatrix} \phi \\ L_f\phi \\ L_f^2\phi \\ \vdots \\ L_f^{n-1}\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{M_0} C_{[0,k]}^{(0)T}x^{[k]} \\ \sum_{k=1}^{M_1} C_{[0,k]}^{(1)T}x^{[k]} \\ \sum_{k=1}^{M_2} C_{[0,k]}^{(2)T}x^{[k]} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{M_{n-1}} C_{[0,k]}^{(n-1)T}x^{[k]} \end{bmatrix}$$

なる.安定化フィードバックの各要素

$$\begin{aligned} L_f^n\phi(x) &= \sum_{k=1}^{M_n} C_{[0,k]}^{(n)T}x^{[k]} \\ L_gL_f^{n-1}\phi &= \sum_{k=0}^{M_{n-1}-1} b^TC_{f[1,k]}x^{[k]} \end{aligned}$$

$$v = -\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}\xi_k = -\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}L_f^{k-1}\phi \tag{20}$$

によって

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 & \cdots & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix}\xi \tag{21}$$

に変換され座標ξは漸近安定になる.

このとき,安定化フィードバック

$$u = -\frac{\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}L_f^{k-1}f + L_f^n\phi(x)}{L_gL_f^{n-1}\phi(x)} \tag{22}$$

となる.多項式形への適用すれば,次式になる.

$$u = -\frac{\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{M_{k-1}}\lambda_{k-1}C_{[0.r]}^{(k-1)T}x^{[r]} + \sum_{r=1}^{M_n}C_{[1.r]}^{(n)T}x^{[r]}}{\sum_{k=0}^{M_{n-1}-1}b^TC_{f[1.k]}x^{[k]}} \tag{23}$$

3. マスバネダンパー系

3.1 マスバネダンパー系 1

数値例として,バネに非線形性があるマスバネダンパー系について考える.

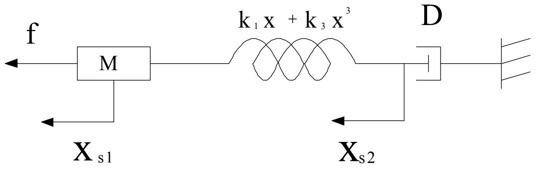

Fig. 1 mass spring damper system

f:系の入力, M:質量, D:ダンパー係数,

K_1:バネ係数, K_3:非線形要素, x_{s1}, x_{s2}:変位.

マスバネダンパー系 1 の運動方程式

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{s1} &= \frac{f}{M} - \frac{K_1}{M}(x_{s1} - x_{s2}) - \frac{K_3}{M}(x_{s1} - x_{s2})^3 = u \\ \dot{x}_{s2} &= \frac{K_1}{D}(x_{s1} - x_{s2}) + \frac{K_3}{D}(x_{s1} - x_{s2})^3\end{aligned}$$

整理すると(3 変数 3 次系になる.*n=3,N=2.*)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & -a_1 \end{bmatrix} x + \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & -3a_2 & 3a_2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2 x_3 \\ x_1 x_3^2 \\ x_3^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$a_1 = K_1/D$,$a_2 = K_3/D$は定数である.

非線形系状態方程式 *(1)* により,運動方程式 *(24)* の $f(x)$ と b は

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ a_1(x_1 - x_3) + a_2(x_1 - x_3)^3 \end{bmatrix} \tag{25}$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

状態方程式 *(24)* の $adf^i g(x)$ を計算すれば

$$ad_f^0 g = b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ad_f^1 g = [f, ad_f^0 g] = [f, b] = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$ad_f^2 g = [f, ad_f^1 g] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 + 3a_2(x_1 - x_3)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\rho(x) &= det\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g\} \\ &= det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 + 3a_2(x_1 - x_3)^2 \end{bmatrix} \\ &= \{a_1 + 3a_2(x_1 - x_3)^2\} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a_1 + 3a_2(x_1 - x_3)^2\end{aligned} \tag{27}$$

a_1,a_2は定数であるから,$\rho(x) > 0$となり,マスバネダンパー系 1 は$\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \cdots, ad_f^{n-1} g\}(x)$が線形独立である.

$$[ad_f^0 g, ad_f^1 g] = \frac{\partial ad_f^1 g}{\partial x^T} ad_f^0 g - \frac{\partial ad_f^0 g}{\partial x^T} ad_f^1 g = 0$$

$$| \, ad_f^0 g, ad_f^1 g, [ad_f^0 g, ad_f^1 g] \, | = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

より,マスバネダンパー系 1 はインボリューティブ *(Involutive)* である.

状態方程式を線形化する座標変換とフィードバックを求めるために,フロベニウス定理を満たす関数$\phi(x)$を求める.

$$\begin{aligned}&\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g\}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 + 3a_2(x_1 - x_3)^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_0^T(x) \\ \alpha_1^T(x) \\ \alpha_2^T(x) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{29}$$

すると,*(12)*,*(14)*,*(15)*式の演算により,関数$\phi(x)$の微分は

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial x_3} = 1, \tag{30}$$

*(30)*式を積分すると、関数$\phi(x)$は

$$\phi(x) = x_3 \tag{31}$$

関数$\phi(x)$を用いて状態方程式を線形化する座標変換とフィードバックを求める．座標変換の各要素

$$
\begin{aligned}
L_f\phi(x) &= \frac{\partial\phi}{\partial x^T}f \\
&= [0,0,1]\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ a_1(x_1-x_3)+a_2(x_1-x_3)^3 \end{bmatrix} \\
&= a_1(x_1-x_3)+a_2(x_1-x_3)^3 \qquad (32) \\
L_f^2\phi(x) &= L_f(L_f\phi(x)) = \frac{\partial L_f\phi}{\partial x^T}f \\
&= [\alpha(x),0,-\alpha(x)]\begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ \beta(x) \end{bmatrix} \\
&= \alpha(x)\{x_2-\beta(x)\} \qquad (33)
\end{aligned}
$$

$\alpha(x)=a_1+3a_2(x_1-x_3)^2$, $\gamma(x)=6a_2(x_1-x_3)^2$, $\beta(x)=a_1(x_1-x_3)+a_2(x_1-x_3)^3$とする．

式*(18),(31),(32),(33)*によりシステムの座標変換

$$
\xi = P(x) = \begin{bmatrix} x_3 \\ \beta(x) \\ \alpha(x)\{x_2-\beta(x)\} \end{bmatrix} \qquad (34)
$$

$\xi_1=x_3$のとき,

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi_1} &= \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \\
&= a_1(x_1-x_3)+a_2(x_1-x_3)^3 \\
&= \beta(x)=\xi_2 \qquad (35)
\end{aligned}
$$

$\xi_2=\beta(x)$のとき,

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi_2} &= \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial\xi_2}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \\
&= \alpha(x)\{x_2-\beta(x)\}=\xi_3 \qquad (36)
\end{aligned}
$$

$\xi_3=\alpha(x)\{x_2-\beta(x)\}$のとき,

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi_3} &= \frac{d\xi_3}{dt} = \frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial\xi_3}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \\
&= v \qquad (37)
\end{aligned}
$$

演算によって

$$
\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \qquad (38)
$$

に変形された.ξ座標系は状態方程式が線形であることを確認した．

システムの安定化フィードバックの各要素

$$
\begin{aligned}
L_f^3\phi(x) &= L_f(L_f^2\phi(x)) = \frac{\partial L_f^2\phi}{\partial x^T}f \qquad (39) \\
L_gL_f^2\phi(x) &= \frac{\partial L_f^2\phi}{\partial x^T}g=\alpha(x) \qquad (40)
\end{aligned}
$$

式*(19)*により,システムの安定化フィードバック

$$
u = \frac{v-\{\gamma(x)(x_2-\beta(x))-\alpha(x)^2\}\{x_2-\beta(x)\}^3\}}{\alpha(x)}
$$

状態フィ-ドバック（新しい入力v)は

$$
v = -k_0\xi_1-k_1\xi_2-k_2\xi_3-\cdots-k_{n-1}\xi_n \qquad (41)
$$

となる*(n=3)*.システムが安定ための必要十分条件: $r^3+k_2r^2+k_1r+k_0=0$ 特性方程式の根がすべて負の実数を持つことである．この安定条件により、極配置を与える．$s_1=-0.1$, $s_2=-0.2$, $s_3=-0.3$とする,$k_0=6$, $k_1=11$, $k_2=6$となる.従って

$$
v = -6\xi_1-11\xi_2-6\xi_3 \qquad (42)
$$

システム入力v*(41)*と座標系ξ*(33)*をシステムの安定化フェードバック uに代入し,初期値を

$$
x_1(0)=0.1, \dot{x_1}(0)=x_2=-0.2, x_3(0)=0.3 \qquad (43)
$$

と設定し,シミュレ-ションを行ってみる.

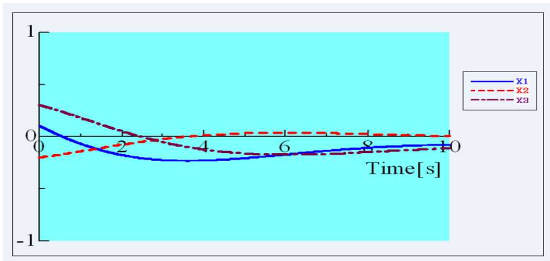

Fig. 2　Dynamics system without control

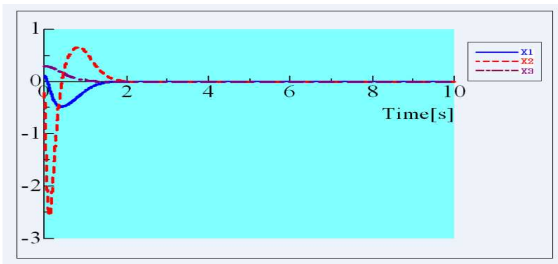

Fig. 3　Dynamics system with control

結果を見ると,システムは漸近的に安定されていく．こうして,本手法により非線形力学系を安定化させることは可能であると考えられる.

3.2　マスバネダンパー系２

もっと複雑なバネに非線形性があるマスバネダンパー系について考える.

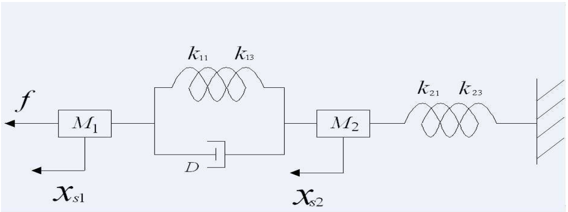

Fig. 4　Mass spring damper system

f:系の入力,　M_1, M_2:質量,　D:ダンパー係数, K_{11}, K_{21}:バネ係数,　K_{13}, K_{23}:非線形要素, x_{s1}, x_{s2}:変位.

マスバネダンパー系２の運動方程式

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{s1} &= \frac{f}{M_1} - \frac{K_{11}}{M_1}(x_{s1}-x_{s2}) - \frac{K_{13}}{M_1}(x_{s1}-x_{s2})^3 \\ &\quad -\frac{D}{M_1}(\ddot{x}_{s1}-\dot{x}_{s2}) = u \\ \dot{x}_{s2} &= \frac{K_{11}}{M_2}(x_{s1}-x_{s2}) + \frac{K_{13}}{M_2}(x_{s1}-x_{s2})^3 \\ &\quad +\frac{D}{M_2}(\ddot{x}_{s1}-\dot{x}_{s2}) - \frac{K_{21}}{M_2}x_{s2} - \frac{K_{23}}{M_2}x_{s2}^3\end{aligned}$$

整理すると（4変数4次系になる.$n=4, N=3.$）

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\a_1 & a_3 & -a_4 & -a_3\end{bmatrix}x + \\ &\quad \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\a_2 & -3a_2 & 3a_2 & -a_5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^3\\x_1^2x_3\\x_1x_3^2\\x_3^3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}u\end{aligned} \tag{44}$$

定数 $a_1 = K_{11}/M_2$, $a_2 = K_{13}/M_2$, $a_3 = D/M_2$, $a_4 = (K_{11}+K_{21})/M_2$, $a_5 = (K_{13}+K_{23})/M_2$.

方程式 *(1)* により, 運動方程式 (44) の $f(x)$ と b は

$$f(x) = \begin{bmatrix}x_2\\0\\x_4\\f_4(x)\end{bmatrix} \tag{45}$$

$$b = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \tag{46}$$

(45) 式の $f_4(x)$ は以下である.

$$\begin{aligned}f_4(x) &= a_1x_1 + a_3x_2 - a_4x_3 - a_3x_4 + a_2x_1^3 \\ &\quad -3a_2x_3x_1^3 + 3a_2x_3^2x_1 - a_5x_3^3\end{aligned}$$

状態方程式 *(44)* の $adf^ig(x)$ を計算すれば

$$\begin{aligned}ad_f^0g &= b = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \\ ad_f^1g &= [f, ad_f^0g] = [f, b] = -\begin{bmatrix}1\\0\\0\\a_3\end{bmatrix} \\ ad_f^2g &= [f, ad_f^1g] = \begin{bmatrix}0\\0\\a_3\\\alpha(x)-a_3^2\end{bmatrix} \\ ad_f^3g &= [f, ad_f^2g] = \begin{bmatrix}0\\0\\a_3^2-\alpha(x)\\\beta(x)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= a_1 + 3a_2x_1^2 - 6a_2x_1x_3 + 3a_2x_3^2 \\ \beta(x) &= 6a_2(x_1-x_3)(x_2-x_4) + a_3[a_1 + a_4 - a_3^2 \\ &\quad +6a_2x_1^2 - 12a_2x_1x_3 + 3x_3^2(a_2+a_5)]\end{aligned}$$

マスバネダンパー系２の線形独立条件を調べる.

$$\begin{aligned}\rho(x) &= det\{ad_f^0g, ad_f^1g, ad_f^2g, ad_f^3g\} \\ &= det\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & a_3 & a_3^2-\alpha(x)\\0 & -a_3 & \alpha(x)-a_3^2 & \beta(x)\end{bmatrix} \\ &= [\alpha(x) - 3a_3^2]^2 + a_3\beta(x)\end{aligned} \tag{47}$$

(47) 式で,　$[\alpha(x)-3a_3^2]^2 > 0$,$a_3 > 0$, ですから, $\beta(x) > 0$ の場合は,　$\rho(x) > 0$ となる. そのために, $a_2 = K_{13}/M_2 = 0$(すなわち $K_{13} = 0$) と設定する, $\alpha(x) = a_1$, $\beta(x) = a_3[a_1 + a_4 - a_3^2 + 3x_3^2(a_2+a_5)]$, $\rho(x) = (a_1-a_3^2)^2 + 3a_3^2a_5x_3^2 + a_3^2(a_1+a_4-a_3^2)$. ここで, $(a_1{+}a_4{-}a_3^2) > 0$(すなわち $2k_{11}{+}k_{21} > D^2/M_2$) と設定する,$\rho(x) > 0$ となる. 従って,$K_{13} = 0, 2k_{11} + k_{21} > D^2/M_2$ の場合は, $\rho(x) > 0$ となり, マスバネ

ダンパー系２は$\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, \cdots, ad_f^{n-1} g\}(x)$が線形独立である.

マスバネダンパー系２のインボリューティブ*(Involutive)*の条件を調べる. *(7)*式により$n = 4$のとき,$0 \leqq i < j \leqq (n-2) = 2$.即ち*i,j*は*(0,1)*, *(0,2)*,*(1,2)*と組み合わせ.

*(7)*式の$[ad_f^i g, ad_f^j g]$を計算すれば

$$
\begin{aligned}
[ad_f^0 g, ad_f^1 g] &= (\frac{\partial ad_f^1 g}{\partial x^T}) ad_f^0 g - (\frac{\partial ad_f^0 g}{\partial x^T}) ad_f^1 g = 0 \\
[ad_f^0 g, ad_f^2 g] &= (\frac{\partial ad_f^2 g}{\partial x^T}) ad_f^0 g - (\frac{\partial ad_f^0 g}{\partial x^T}) ad_f^2 g = 0 \\
[ad_f^1 g, ad_f^2 g] &= (\frac{\partial ad_f^2 g}{\partial x^T}) ad_f^1 g - (\frac{\partial ad_f^1 g}{\partial x^T}) ad_f^2 g \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -6a_2(x_1 - x_3) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

従って,$\sigma_{ij}(x)(0 \leqq i < j \leqq 2)$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{0,1}(x) &= |\, ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, [ad_f^0 g, ad_f^1 g]| \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 & \alpha(x) - a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (48) \\
\sigma_{0,2}(x) &= |\, ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, [ad_f^0 g, ad_f^2 g]| \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 & \alpha(x) - a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (49) \\
\sigma_{1,2}(x) &= |\, ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, [ad_f^1 g, ad_f^2 g]| \\
&= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & -a_3 & \alpha(x) - a_3 & -6a_2(x_1 - x_3) \end{vmatrix} \\
&= -6a_2 a_3 (x_1 - x_3) \\
&= 0 \quad (a_2 = 0 \text{により}) \qquad (50)
\end{aligned}
$$

(48),*(49)*,*(50)*式により,マスバネダンパー系２はインボリューティブ*(Involutive)*である.

状態方程式を線形化する座標変換とフィードバックを求めるために,フロベニウス定理を満たす関数$\phi(x)$を求める.

$$
\begin{aligned}
&\{ad_f^0 g, ad_f^1 g, ad_f^2 g, ad_f^3 g\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_3^2 - \alpha(x) \\ 0 & -a_3 & \alpha(x) - a_3^2 & \beta(x) \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_0^T(x) \\ \alpha_1^T(x) \\ \alpha_2^T(x) \\ \alpha_3^T(x) \end{bmatrix} \qquad (51)
\end{aligned}
$$

すると,*(12)*,*(14)*,*(15)*式の演算により,関数$\phi(x)$の微分は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = -a_3^2, &\qquad \frac{\partial \phi}{\partial x_2} = 0, \\
\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = -a_1 + a_3^2, &\quad \frac{\partial \phi}{\partial x_4} = a_3, \qquad (52)
\end{aligned}
$$

*(52)*式を積分すると、関数$\phi(x)$は

$$
\phi(x) = -a_3^2 x_1 + (a_3^2 - a_1) x_3 + a_3 x_4 \qquad (53)
$$

関数$\phi(x)$を用いて状態方程式を線形化する座標変換とフィードバックを求める. 座標変換の各要素

$$
\begin{aligned}
L_f \phi(x) &= \frac{\partial \phi}{\partial x^T} f \qquad (54) \\
&= [-a_3^2, 0, a_3^2 - a_1, a_3] \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} \\
&= a_1 a_3 x_1 - a_3 a_4 x_3 - a_1 x_4 - a_3 a_5 x_3^3 \\
L_f^2 \phi(x) &= L_f(L_f \phi(x)) = \frac{\partial L_f \phi}{\partial x^T} f \qquad (55) \\
&= [a_1 a_3, 0, -a_3 a_4 - 3a_3 a_5 x_3^2, -a_1] \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} \\
&= -a_1^2 x_1 + a_1 a_4 x_3 + a_1 a_5 x_3^3 - 3a_3 a_5 x_3^3 x_4 \\
&\quad + a_3(a_1 - a_4) x_4 \\
&= \gamma(x) \\
L_f^3 \phi(x) &= L_f(L_f^2 \phi(x)) = \frac{\partial L_f^2 \phi}{\partial x^T} f \qquad (56) \\
&= a_1 a_3 (a_1 - a_4) x_1 + (a_3^2 a_1 - a_3^2 a_4 - a_1^2) x_2 \\
&\quad - a_3 a_4 (a_1 - a_4) x_3 + (4a_3 a_4 a_5 - a_1 a_3 a_5) x_3^3 \\
&\quad + 3a_3 a_5^2 x_3^5 - 3a_1 a_3 a_5 x_1 x_3^2 - 3a_3^2 a_5 x_3^2 x_2 \\
&\quad + (3a_1 a_5 + 3a_3^2 a_5) x_3^2 x_4 - 6a_3 a_5 x_3 x_4^2 \\
&\quad + (a_1 a_4 - a_1 a_3^2 + a_3^2 a_4) x_4 \\
&= \delta(x)
\end{aligned}
$$

式(18),(54),(55),(56)によりシステムの座標変換

$$\xi = P(x) = \begin{bmatrix} -a_3^2 x_1 + (a_3^2 - a_1)x_3 + a_3 x_4 \\ a_1 a_3 x_1 - a_3 a_4 x_3 - a_1 x_4 - a_3 a_5 x_3^3 \\ \gamma(x) \\ \delta(x) \end{bmatrix} \quad (57)$$

$\xi_1 = -a_3^2 x_1 + (a_3^2 - a_1)x_3 + a_3 x_4$のとき,

$$\begin{aligned} \dot{\xi_1} &= \frac{d\xi_1}{dt} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \\ &= a_1 a_3 x_1 - a_3 a_4 x_3 - a_1 x_4 - a_3 a_5 x_3^3 \\ &= \xi_2 \end{aligned} \quad (58)$$

$\xi_2 = a_1 a_3 x_1 - a_3 a_4 x_3 - a_1 x_4 - a_3 a_5 x_3^3$のとき,

$$\begin{aligned} \dot{\xi_2} &= \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \\ &= -a_1^2 x_1 + a_1 a_4 x_3 + a_1 a_5 x_3^3 - 3a_3 a_5 x_3^3 x_4 \\ &\quad + a_3(a_1 - a_4)x_4 \\ &= \gamma(x) = \xi_3 \end{aligned} \quad (59)$$

$\xi_3 = \gamma(x)$のとき,

$$\begin{aligned} \dot{\xi_3} &= \frac{d\xi_3}{dt} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \\ &= \delta(x) = \xi_4 \end{aligned} \quad (60)$$

$\xi_4 = \delta(x)$のとき,

$$\begin{aligned} \dot{\xi_3} &= \frac{d\xi_3}{dt} = \frac{\partial \xi_3}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} \\ &= v \end{aligned} \quad (61)$$

演算によって

$$\dot{\xi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v \quad (62)$$

に変形された.ξ座標系は状態方程式が線形であることを確認した.

システムの安定化フィードバックの各要素

$$\begin{aligned} L_f^4\phi(x) &= L_f(L_f^3\phi(x)) = \frac{\partial L_f^3\phi}{\partial x^T} f \quad (63) \\ &= a_1 a_3(a_1 - a_4)x_2 - 3a_1 a_3 a_5 x_3^2 x_2 - 3a_3 a_4 \\ &\quad (a_1 - a_4)x_4 + 3(8a_3 a_4 a_5 - a_1 a_3 a_5)x_3^2 x_4 \\ &\quad + 27a_3 a_5^2 x_3^4 x_4 - 18a_1 a_3 a_5 x_1 x_3 x_4 - 18a_3^2 a_5 \\ &\quad x_2 x_3 x_4 + 6(a_1 a_5 + 3a_3^2 a_5)x_3 x_4^2 - 6a_3 a_5 x_4^3 \\ &= \epsilon(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_g L_f^3\phi(x) &= \frac{\partial L_f^3\phi}{\partial x^T} g \\ &= (a_3^2 a_1 - a_3^2 a_4 - a_1^2) - 3a_3^2 a_5 x_3^2 \end{aligned} \quad (64)$$

(63),(64)を*(19)*式に代入し,安定化フィードバック

$$u = \frac{v - \epsilon(x)}{(a_3^2 a_1 - a_3^2 a_4 - a_1^2) - 3a_3^2 a_5 x_3^2} \quad (65)$$

(41)式により,$n = 4$の場合,状態フィ-ドバック（新しい入力v)は

$$v = -k_0\xi_1 - k_1\xi_2 - k_2\xi_3 - -k_3\xi_4 \quad (66)$$

となる.システムが安定ための必要十分条件：$r^4 + k_3 r^3 + k_2 r^2 + k_1 r + k_0 = 0$ 特性方程式の根がすべて負の実数を持つことである. この安定条件により、極配置を与える. $s_1 = -1$, $s_2 = -2$, $s_3 = -3$,$s_4 = -4$とする,$k_0 = 24$, $k_1 = 50$, $k_2 = 35$, $k_3 = 10$,となる.従って

$$v = -24\xi_1 - 50\xi_2 - 35\xi_3 - 10\xi_4 \quad (67)$$

システム入力v*(67)*と座標系ξ*(57)*をシステムの安定化フェードバック uに代入し,初期値を

$x_1(0) = 0.1, x_2 = -0.2, x_3(0) = 0.3, x_4(0) = 0.5$

と設定し,シミュレ-ションを行ってみる.

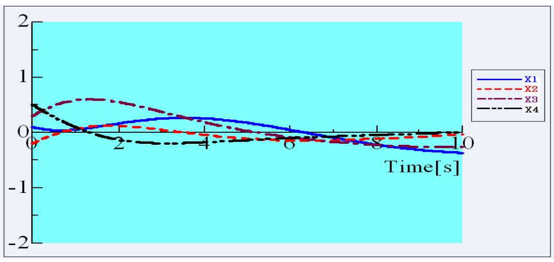

Fig. 5　Dynamics system without control

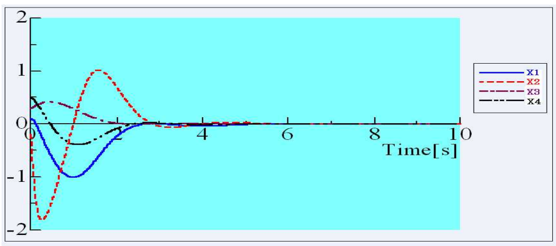

Fig. 6　Dynamics system with control

結果を見ると,システムは漸近的に安定されていく. こうして,本手法により非線形力学系を安定化させることは可能であると考えられる.

4.　おわりに

本稿ではテンソルに関する演算を利用し,記述できる非線形システムを制御対象としての多様体論による厳密線形化を通じて,非線形系の安定化を提案した.ポイントは可制御でかつインボリューティブである場合のみ,フロベニウスの定理により,座標変換とフィードバックに必要な関数を見付けることである.シミュレーションでは本手法により,非線形系の安定化制御の可能性を示すものである.

参考文献

1) 大久保重範: 非線形レギュレータのアルコリズムによる設計，計測自動制御学会論文集, *Vol.33,No.11, 1072/1080 (1997)*

2) 荒木光彦 *(*編*):*古典制御理論 *(*基礎編*),*培風館 *(2000)*

3) 大久保重範*:*非線形システムのべき状態フィ - ドバックによる直接的な安定化制御*,*計測制御学会論文集*,Vol.34,No.11,1596/1602(1998)*

4) 大久保重範*:*非線形レギュレータの構成と遺伝的アルゴリズムによる設計*,*第*24*回制御理論シンポジウム資料，*331/334 (1995)*

5) 三平満司 *:* 厳密線形化とそのけん引車両の軌道制御への応用， 計測と制御 *Vol.31,No.851/858(1992)*

6) 阪和，田中*:*遺伝的アルゴリズム，朝倉書店 *(1995)*

7) 松下智孝*:*遺伝的アルゴリズムによる非線形系の安定化制御*,*山形大学卒業論文集 *(2000)*

8) 大須賀公一*,*足立修一 *(*共編*):*システム制御へのアプローチ*,*コロナ社 *(1998)*

9) 田中正吾*,*山口静馬*,*和田憲造*,*清水光 *(*編*):*制御工学の基礎*,*森北出版株式会社 *(1996)*

10) 石島辰太郎*,*石動善久*,*三平満司*,*島公脩*,*山裕*,*渡辺敦 *(*共編*):*非線形システム理論*,*計測自動制御学会 *(1993)*

11) 日本数学学会編集 : 数学事典第 *2*版*,*岩波書店 *(1968)*

12) 大久保重範*:*高次形式の*2*次形式変換と正定値判定*,*第*38*回自動制御連合講演会前刷*,169/170(1995)*

13) 松本幸夫 *(*編*):*多様体の基礎*,*東京大学出版会 *(1989)*

14) 児玉慎三*,*須田信英 *(*編*):*システム制御のためのマトリクス理論*,*三美印刷株式会社 *(1981)*

15) *A.Isidori, Nonlinear Control Systems, 3rd ed. Springer-Verlag (1995)*

16) *A.Isidori,A.J.Krener,C. Gori-Giorgi and S.Monaco: Nonlinear Decoupling via Feedback: A Differential Geometric Approach, IEEE Trans. on Automatic Control,AC-26,pp.331〜345(1981)*