計測自動制御学会東北支部 第224回研究集会 (2005.10.14)
資料番号 224-19

遺伝的アルゴリズムによる非線形制御系の設計

Design of Nonlinear Control System Using Genetic Algorithm

○水谷紘也*, 大久保重範*, 及川一美*, 高橋達也*

○Hiroya Mizutani*,Shigenori Okubo*, Kazumi Oikawa*, Tatuya Takahashi*

*山形大学工学部

*Faculty of Engineering, Yamagata University

キーワード: 遺伝的アルゴリズム (genetic algorithm), 非線形制御(nonlinear control), クロネッカー積(kroneker product), 拡張リカッチ方程式(extended Riccati equation)

連絡先: 〒992-8510 山形県米沢市城南4-3-16 山形大学工学部 機械システム工学科 大久保研究室水谷紘也,
Tel.: (0238)26-3245, Fax.: (0238)26-3245, E-mail: sokubo@dip.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

実システムは何らかの非線形特性を含んでいる. 本研究では,システムを非線形のままで扱い,線形レギュレータの理論を拡張して非線形系に適用する. しかし,拡張したリカッチ方程式は長方行列を解とするものであり,これを要素毎に分解すると,変数の個数より方程式の個数が多く,数学的に解くことができない. そこで,変数に具体的な数値を代入し,評価関数の荷重行列が正定になるように調節する手法をとる. この変数をどのように決めるかの探索法として,遺伝的アルゴリズム(GA:Genetic Algorithm)を用いる. しかしながら,GAで必ず解を得られるとは限らないため,非線形多項式を解を得やすいように変数変換することによって, N次のべき状態ベクトルの2次形式なるリアプノフ関数が存在し,大域的に安定な非線形レギュレータを設計する.

2. 遺伝的アルゴリズム

遺伝的アルゴリズムは,生物の進化をモデルとして,問題に対する適応度の良い個体を計算機内に生成するアルゴリズムである. 変数をコード化して遺伝子として取り扱い,遺伝子の集合から染色体を構成する. 染色体が1つの個体を表す.個体の集合を個体群として表し,それにより 1 つの世代を構成する. 個体群に対して,次の世代に残す個体を選ぶ選択(淘汰),染色体同士をペアにしてそれらの遺伝子の一部組換えを行う交叉, 染色体上のある遺伝子座の値を対立遺伝子に置き換える突然変異などの遺伝子操作を繰り返し,適応度関数が最大又は最小になるように探索する.

3. 縮約形

クロネッカ巾$x^{[k]}$には同一要素が含まれているが、独立な要素を辞書順に並べたベクトルを$x^{[k]}$の縮約形と呼ぶことにし、$x^{<k>}$で表す。一例として、２変数３次形（$n=2,k=3$）の場合を以下で示す。

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x^{[2]} &= x \otimes x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow x^{<2>} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x^{[3]} &= x \otimes x \otimes x \\ &= \begin{bmatrix} x_1^3, x_1^2x_2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1x_2^2, x_2^3, \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{<3>} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2x_2 \\ x_1x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

この先$x^{<n>}$で表記したテンソルは、縮約形を用いているものとする。

4. 非線形レギュレータ

状態ベクトルxとし、そのべき状態ベクトルを$G^{<2N-1>}(x)$とするとき制御対象の非線形システム方程式を(4)式のように表す．

$$\dot{x} = A_{G<1,2N-1>}G^{<2N-1>}(x) + Bu \tag{4}$$

べき状態ベクトルの縮約形を(5)式のように表す．

$$G^{<2N-1>}(x) = \begin{bmatrix} x & x^{<2>} & \cdots & x^{<2N-1>} \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

制御入力uの縮約形表示は(6)式となる．

$$u = -R^{-1}B^TP_{G<1,2N-1>}G^{<2N-1>}(x) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} V(t) = \frac{1}{2}\int_t^{\infty} &(G^{<2N-1>T}(x(t))Q_{G<2N-1,2N-1>} \\ &G^{<2N-1>}(x(t)) + u^TRu)dt \end{aligned} \tag{7}$$

拡張リカッチ方程式の縮約形は(8)式となる．

$$\begin{aligned} Q_{G<2N-1,2N-1>} &+ P^T_{G<1,2N-1>}A_{G<1,2N-1>} \\ &+ A^T_{G<1,2N-1>}P_{G<1,2N-1>} \\ &- P^T_{G<1,2N-1>}BR^{-1}B^TP_{G<1,2N-1>} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$P_{G<1,2N-1>}$の独立な変数の個数N_{va},方程式の本数N_{eq}は次式で表される．

$$N_{va} = \sum_{k=2}^{2N} {}_nH_k = {}_{n+2N}C_{2N} - (n+1) \tag{9}$$

$$N_{eq} = \sum_{k=2}^{4N-2} {}_nH_k = {}_{n+4N-2}C_{4N-2} - (n+1) \tag{10}$$

$N \geqq 2$のとき,N_{va}¡N_{eq}となり数学的に解くことができない．そこでGAを用いて,$P_{G<1,2N-1>}$に具体的な数値を与え,評価関数の荷重行列$Q_{G<2N-1,2N-1>}$が正定になるように調節する．

5. 安定条件

正方荷重行列$\tilde{P}_{G<N,N>}$と$P_{G<1,2N-1>}$の関係は次式で表される．

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}G^{<N>T}(x)\tilde{P}_{G<N,N>}G^{<N>}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{1}{k+1}x^TP_{<1,k>}x^{<k>} \end{aligned} \tag{11}$$

上式より,$\tilde{P}_{G<N,N>}$を求める．縮約形で閉ループ系が大域的に安定であることを表記すれば(??)式となる．

$$\tilde{P}_{G<N,N>} > 0, Q_{G<2N-1,2N-1>} > 0 \tag{12}$$

$$\Rightarrow V(t) > 0, \dot{V}(t) < 0 \tag{13}$$

6. 変数変換

変数変換は、制御したいシステムにおいてGAによって解を得ることができない場合、GAが解を見つけ出す事ができるようなシステムにある変換を行うことによって解を得ることができるため、有効な方法であると考えられる。そこで実際にFig.1に示すようなマスバネダンパ系を例にして、変数変換を行った。システムの状態方程式を次式で与える。

$$M\ddot{x} + D_1\dot{x} + (K_1x + K_3x^3) = u \tag{14}$$

M	:	質量[kg]
D_1	:	粘性減衰係数$[Ns/m]$
K_1, K_3	:	ばね定数$[N/m], [N/m^3]$

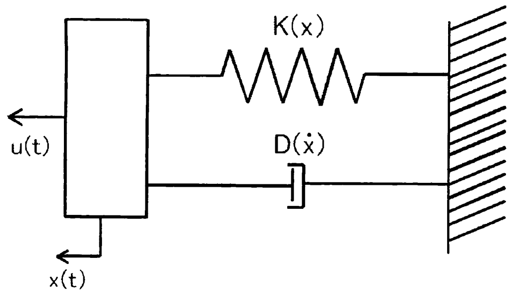

Fig. 1 A model of the dynamic system

$x_1 = x. x_2 = \dot{x}_1$ とおくと、この問題は、2変数3次形式の非線形レギュレータとして扱える。

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{K_1}{M}x_1 - \frac{D}{M}x_2 - \frac{K_3}{M}x_1^3 + \frac{1}{M}u\end{aligned} \tag{15}$$

整理すると

$$\begin{aligned}\dot{x} = \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{K_1}{M} & -\frac{D}{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ &\begin{bmatrix}x_1^2\\ x_1x_2\\ x_2^2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -\frac{K_3}{M} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^3\\ x_1^2x_2\\ x_1x_2^2\\ x_2^3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u\\ &= A_{<1,1>}x^{<1>} + A_{<1,2>}x^{<2>} + A_{<1,3>}x^{<3>} + Bu\\ &= \sum_{k=1}^{3} A_{<1,k>}x^{<k>} + Bu\\ &= A_{G<1,3>}G^{<3>}(x) + Bu\end{aligned} \tag{16}$$

このシステムをXシステムと呼ぶ事にする。このシステムについてGAを行なったが、安定条件(評価値の最小値が正となること)を満たす解を見つけることができなかった。

よってXシステムをGAによって解を見つけやすいように変数変換を行う。(変数変換後のシステムをAシステムと呼ぶ事にする)

ここで、$x_1 = a_1$、$x_2 = -3a_2 - a_2^3 (= \dot{a}_1)$のように変数変換を行うと、

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= -3a_2 - a_2^3\\ \dot{a}_2 &= \frac{1}{-3(1+a_2^2)}\{\frac{D}{M}(3a_2 + a_2^3) - \frac{K_1}{M}a_1\\ &\quad - \frac{K_3}{M}a_1^3 + \frac{u}{M}\}\\ &= v\end{aligned} \tag{17}$$

整理すると

$$\begin{aligned}\dot{a} = \begin{bmatrix}\dot{a}_1\\ \dot{a}_2\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & -3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1^2\\ a_1a_2\\ a_2^2\end{bmatrix}\\ &+ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1^3\\ a_1^2a_2\\ a_1a_2^2\\ a_2^3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}v\\ &= A_{G<1,3>}G^{<3>}(a) + Bv\end{aligned} \tag{18}$$

Aシステムでの制御入力vは

$$v = -R^{-1}B^TP_{G<1,3>}G^{<3>}(a) \tag{19}$$

このシステムについては、GAで解を見つけることができた。

また、(17)式をuについて整理すると

$$\begin{aligned}u &= -3M(1+a_2^2)\underline{v} - D(3a_2 + a_2^3) + K_1a_1 + K_3a_1^3\\ &= 3M(1+a_2^2)\underline{R^{-1}B^TP_{G<1,3>}G^{<3>}(a)}\\ &\quad - D(3a_2 + a_2^3) + K_1a_1 + K_3a_1^3\end{aligned} \tag{20}$$

変数変換の関係から$u(a_1,a_2)$を$u(x_1,x_2)$へもどす。

$$
\begin{aligned}
a_1 &= x_1\\
a_2 &= -\frac{2^{\frac{1}{3}}}{(-x_2+\sqrt{4+x_2^2})^{\frac{1}{3}}}+\frac{(-x_2+\sqrt{4+x_2^2})^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}
\tag{21}
$$

これらを$u(a_1,a_2)$に代入して$u(x_1,x_2)$が求まる。このuをXシステムに用いてシミュレーションを行う。Aシステムについて GAによって得られた$P_{G<1,3>}$は、

$$
P_{G<1,3>} = \begin{bmatrix} 20.054594 & -9.088532 & 1.075524 & -0.754145 & 0.364020 & 2.227855 & -2.373825 & 1.332817 & -1.623950 \\ -9.088532 & 8.343320 & -0.377072 & 0.728040 & 1.338833 & -0.791275 & 1.332817 & -4.871851 & 8.942655 \end{bmatrix}
\tag{22}
$$

ただし、$P_{G<1,3>}$の要素の探索範囲は-20.0から20.0までとする。XシステムでのM,K_1,D,K_3は次のように設定する。

$$
M=1.0, K_1=0.1, D=0.1, K_3=0.01 \tag{23}
$$

このような条件の下で、初期値を$x_1=0.15, x_2=-0.6$としたときのシステムの応答を調べるFig.2は制御を行わないときの応答図である。
一方、Fig.3はGAで得られた解を用いた制御を行った場合の応答図である。

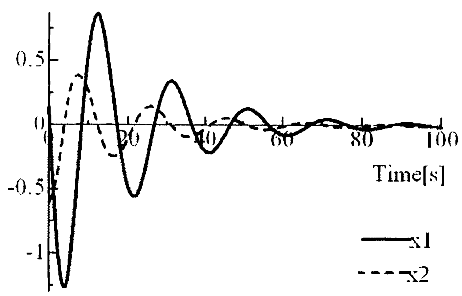

Fig. 2 State responses without control

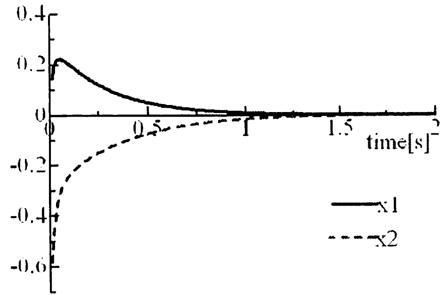

Fig. 3 State responses with control

Fig.2を見ると、100秒近く経過して、ようやく安定な状態となっていることがわかる。一方で、制御を行っているFig.3を見ると、約1.5秒でシステムが安定な状態になっていることがわかる。

7. おわりに

2変数3次元のマスバネダンパー系のモデルを設けて、遺伝的アルゴリズムを用いた最適値探索を行った。その結果、得られた解を用いることによって、非線形レギュレータを設計できることを確認した。

一方で、元のままのシステムでは解を得られないときでも、うまく変数変換を行うことによってGAによって解を得ることができ、変数変換の関係を利用することで、変換を行う前のシステムについても安定な非線形レギュレータを設計できることを述べた。

今後の課題は、この理論の多変数への応用であるが、現在行っている方法では変数が多くなる毎に、評価する主座小行列式の数が多くなり、全てを正にすることが困難となる。そのため、より効果的に評価値を 得られるように評価方法の改善を行うことである。

また、現在は変数変換を行う際に変換後のシステムの状態方程式や変換前の制御入力uが変換後の制御入力vによってどのように表されるかを手計算

で求めているため、非常に不便である。そのため、これらの一連の流れをすべてコンピュータによって自動的に求められるようにすることである。

参考文献

1) 大久保重範：非線形レギュレータの遺伝的アルゴリズムによる設計、計測自動制御学会論文集、**33**-11,1072/1080(1997)

2) 大久保重範：非線形システムのべき状態フィードバックによる直接的な安定化制御、計測自動制御学会論文集、**34**-11,1596/1602(1998)

3) 安居院猛、長尾智晴：ジェネティックアルゴリズム、昭晃堂(1993)