

# むだ時間を含むセンサ情報による倒立振子の安定化制御

## Stabilization of Inverted Pendulum System based on Sensor Signal with Time Delay

李 眞娥 牛田 俊 福田 憲一郎 出口 光一郎

Jina Lee Shun Ushida Ken-ichiro Fukuda and Koichiro Deguchi

東北大学 機械電子工学科

Tohoku University

キーワード： 倒立振子(Inverted Pendulum), むだ時間 (Time Delay), 状態依存ノイズ(State-Dependent Noise, Parametric Noise), 安定解析(Stability Analysis), PIDコントローラ(PID Controller)

連絡先： 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-01 東北大学 工学部 機械電子工学科 出口・岡谷研究室  
李 眞娥, Tel./Fax: (022)795-7017, E-mail: lee@fractal.is.tohoku.ac.jp

### 1. はじめに

人間が行う様々な運動制御において、感覚受容器から脳へ、あるいは、脳からの筋骨格系への中枢神経系を介した信号伝達には数十～数百ミリ秒というむだ時間が存在することはよく知られている。つまり、人間が視覚、聴覚、触覚などのセンサ情報から周囲の変化を感知しそれに反応するまでには、数十～数百ミリ秒の時間を要する。しかし、このような大きなむだ時間が存在するにもかかわらず、人間は予期せぬ状況に対処したり、むだ時間より短い変化に対しても素早く反応したりすることが可能である。このような人間の正確かつ滑らかな運動制御の実現は、従来の制御工学で考察されてきたフィードフォワードやフィードバック制御だけでは困難である。したがって、実際の人間の運動制御メカニズムにはこれらの二つの要素以外の新しい制御パラダイムが作用しているのではないかと考えるのが自然である。

このような考え方の下で行われた研究の中で、Cabreraらによる人間の指先で棒を立てるという実験の結果はとても興味深い<sup>1)</sup>。この実験において、人が棒を倒立状態に保つように制御したとき、その棒には人間の反応時間より短い動きが頻繁に観測される。Cabreraらはこのような人間の振舞い

は、系のダイナミクスを変動させる「ノイズ」を導入することで説明できると主張している。本研究の目的は、このノイズがむだ時間系の振舞いに与える影響を調べることであり、ノイズが系の安定性と機動性の向上に寄与することが示される。このことは、従来の制御工学において「ノイズ」が制御系の性能を低下させるというマイナスの意味で考えられてきたことと対照的である。

本論文では、むだ時間が存在する簡単な物理系をモデル化し理論的な安定解析を行うために、人が指先で棒を立てるという特定のタスクに焦点を当て、その制御メカニズムを考える。さらに、フィードバックゲインにノイズを加えたむだ時間制御系のシミュレーションを行うことにより、ノイズがシステムにプラスの影響を与えていることを示す。

### 2. カメラロボットアームによる倒立振子の安定化制御

視覚情報に基づいて指先の上に棒を立てるときの人の運動制御系は、Fig. 1のように、ロボットアーム、その先端に取り付けられた倒立振子、および視覚情報を得るためのカメラからなる制御系によって実現される。

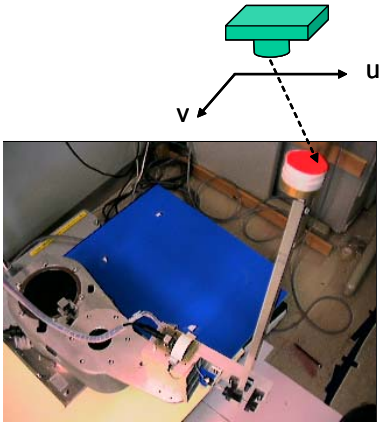


Fig. 1 DDアーム, 倒立振り子, カメラからなる安定化制御系

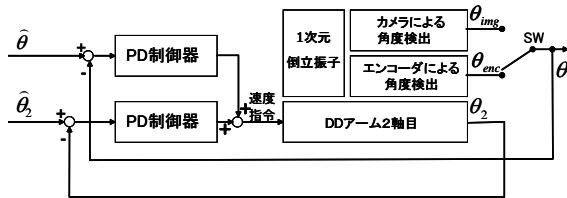


Fig. 2 スイッチング機構をもつ倒立振り子安定化制御系

ここで使われている水平面内を動く2リンクのDirect Driveアーム(以下DDアーム)は, 簡単のために1軸目は固定し, 2軸目のみを使用する. 振り子は2軸の手先に垂直な平面内で回転運動するように拘束する. 振り子の角度検出機構として, 高速かつ高精度に動作するロータリエンコーダ系と, 人の視覚に相当するカメラ - 画像処理系を切替えて用いる(Fig. 2). カメラは実験室の天井に取り付けられており, 振り子先端の3次元空間内での位置を知ることが出来るが, 画像の取得に1フレーム分(約33[ms])のむだ時間が存在する.

Fig. 2のシステムにおいて, ロータリエンコーダによって検出されたむだ時間のない角度でフィードバック制御を行った場合, 適切なPDゲインを設定することで安定化が実現可能である. しかし, 大きなむだ時間(33[ms])を含むカメラ - 画像処理系により角度検出を行った場合には, 安定化を可能にするPDゲインを見つけることが出来なかった. 故に, 系の安定化の障害となっている要因は, 画像1枚分の遅れである33[ms]のむだ時間であることがわかる<sup>5)</sup>.

むだ時間制御系についての安定条件は次節で紹介するStépánの定理に基づいて求められる. しかしStépánの定理によって理論的に求めたFig. 2の

系を安定化させるようなPDゲインの値を用いて安定化実験を行っても, 倒立振り子を安定化させることは出来なかった. その理由の一つとして, 実機では角度情報 $\theta(t)$ からその厳密な微分情報 $\dot{\theta}(t)$ を得ることが出来ないために, 差分で近似していることが挙げられる. 次節のむだ時間制御系では微分ゲインを使わないモデルを考える.

### 3. 人による倒立振り子の安定化制御

#### 3.1 人による安定化制御の特徴

前節で示したように倒立振り子制御装置による振り子の安定化は, 角度情報に33[ms]程度のむだ時間が生じるとたちまち不安定になる. それに比べて, 人間はどのようなメカニズムでむだ時間を克服しているのだろうか. 人の制御メカニズムを解明するためには, まず「人が倒立振り子の安定化制御を試みた場合の振舞い」の特徴を詳しく知る必要がある.

人の倒立振り子の安定化制御に関する実験結果がCabrera, Miltonらによって得られている<sup>1)2)</sup>. Cabreraらは数多くの被験者を対象に指先で倒立振り子を安定化させる実験を行い, 実際の倒立振り子の動きを記録することから人の振舞いの統計的な量の性質を示した. その特徴の中で注目すべき点は, 振舞いに不規則でかつ高周波数のゆらぎが生じていること, 反応時間より短い動きが観測されることの2点である. Cabreraはこのような人の運動制御メカニズムには何らかの「ノイズ」が関係していると結論した. すなわち, 人間は倒立振り子制御のようなタスクにおいて, フィードバックやフィードフォワード制御では自身の反応時間の限界のため十分な制御が出来ないということを認識して, 意識的もしくは無意識的に指先の動きに適度な「ノイズ」を取り入れるのではないかという仮説である. 以上のことから, 我々は人間の制御メカニズムの二つの主な特徴は「むだ時間」と「ノイズ」であると考え, 今後はノイズがむだ時間制御システムにおよぼす影響について詳しく調べる.

#### 3.2 Cabrera, Miltonのモデル

Cabreraらは, むだ時間のある物理系に比例ゲインと状態依存ノイズによるフィードバック制御を行うことで人間の制御系をモデル化しその振舞いを再現した. 通常, システムに影響するノイズの形は, 系の状態に依存しない付加的なノイズ(additive noise)と状態依存ノイズ(state-dependent noise)の

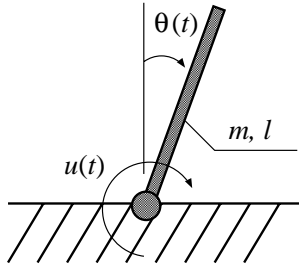


Fig. 3 倒立振子の物理モデル

二つがある．それぞれのモデルを次の式(1)および式(2)に示す．

$$\dot{x}(t) = h(\lambda x(t - \tau)) + \xi(t) \quad (1)$$

$$\ddot{x}(t) = \omega(\eta(\xi(t)) \lambda x(t - \tau)) \quad (2)$$

ここで $h$ と $\omega$ はフィードバックを， $\lambda$ は物理系のパラメータを， $\xi(t)$ は不規則な信号つまりノイズを示す．しかし，Cabreraらのシミュレーションの結果によれば，付加的なノイズではなく，状態依存ノイズが加えられた場合にむだ時間より短い動きが観測されるため，ここでは人の運動制御メカニズムに影響するノイズは状態依存ノイズだとみなす．

以上のことからCabreraらは人間の振舞いを再現するために，Fig. 3の物理系を比例ゲインに不規則信号を含むむだ時間システムとしてモデル化した(式(3),(4))．

$$\ddot{\theta}(t) + \Gamma\dot{\theta}(t) - q\theta(t) = u(t) \quad (3)$$

$$u(t) = -(R_0 + \xi(t))\theta(t - \tau) \quad (4)$$

ここで，(3)式の左辺は，倒立振子の慣性力，粘性力，重力に関する項であり，振子の質量を $m$ ，長さを $l$ ，指先の粘性係数を $\gamma$ とすると， $\Gamma := \frac{3\gamma}{m}$ ， $q := \frac{3g}{l}$ となる． $u(t)$ はフィードバック制御による駆動力を表し，(4)式は固定ゲイン $R_0$ とノイズ $\xi(t)$ からなる時間遅れを含む比例フィードバック制御則である．ノイズ $\xi(t)$ は， $E[\xi(t)^T \xi(t - \tau)] = n_R \delta(\tau)$ を満たす白色ノイズであるとする． $n_R$ はノイズの強さを表す．

Cabreraらは，(3)式のモデルにおいて，パラメータ $R_0$ を適切に選ぶことで，人による制御の振舞い，つまりむだ時間より短い動きやゆらぎを再現できたと主張している<sup>2)</sup>．しかし，彼らのモデルのパラメータ設定では一部事実と反するモデル化がなされていることが文献3)で指摘されている．実際にモデル(3)式に基づいてシミュレーションを行っても，人の振舞いのようにゆらぎを見せるような動きは観測されず，系は収束するか発散してしまうかのどちらかである．そこで，次節からは(3)式のモデルにおいて，ノイズがむだ時間制御系の安定性におよぼす影響について詳しく調べる．

## 4. むだ時間制御系の安定性

### 4.1 むだ時間制御系の安定条件

通常のフィードバック制御器は操作量を上手く制御するために比例ゲインだけでなく微分ゲインも必要とされる．しかし，2節でも述べたように実際の実験装置では厳密な微分の値を得ることはできないので，差分をとることで微分の近似値を与えている．ゆえに微分ゲインによるフィードバックには多少のずれが生じており，このずれは人間の振舞いのような高周波数振動を含む動きほど大きくなる．したがって，微分ゲインを使わずに比例ゲインと系のパラメータを適切に設定することで安定性が保証されることは重要であり，むだ時間制御系の特有な特性である<sup>6)</sup>．

比例フィードバックゲインとして固定成分のみを与えたときのCabreraらのモデル，つまり

$$\ddot{\theta}(t) + \Gamma\dot{\theta}(t) - q\theta(t) = -R_0\theta(t - \tau) \quad (5)$$

に対する安定条件を導く．(5)式をむだ時間 $\tau$ について正規化を行うことにより，次式を得る．

$$\ddot{\theta}(t) + a_1\dot{\theta}(t) - a_0\theta(t) = b\theta(t - 1) \quad (6)$$

$$a_1 := \frac{3\gamma}{m}\tau, \quad a_0 := \frac{3g}{l}\tau^2, \quad b := R_0\tau^2$$

むだ時間のない有限次元時不変線形システムはラウスの安定判別法などで安定条件を求めることが出来るが，むだ時間を含む(6)式の安定条件を求めるには特別な方法が必要とされる．ここでは，Stépánら<sup>4)</sup>によって示された定理に基づいて，(6)式のむだ時間システムの安定条件を導く．(6)式において振子のパラメータ $a_0$ と比例ゲイン $b$ を設計パラメータとすると，この系が安定であるための条件は以下のように与えられる．

定理 1 むだ時間 $\tau > 0$ を含む倒立振子安定化制御系(6)式を考える．このとき，系が安定である十分条件は，

$$a_0 < b < a_0 + (2\pi)^2 \quad (7)$$

$$b < \frac{a_1\omega_0}{\sin\omega_0} \quad (8)$$

である．ただし， $\omega_0 > 0$ は

$$\omega_0 + a_0 = b \cos\omega_0$$

を満たす最小の解である．  $\triangle$

証明は文献3)を参照のこと．4.2節のモデルにおいて微分ゲインを $D = 0$ と置くことにより得られる．ここでは，定理1の証明の核となるStépán<sup>4)</sup>の定理のみを証明ぬきで紹介する．

命題 1 むだ時間 $\tau$ を含む $n$ 次線形微分方程式の特性多項式を $f(\lambda)$ とし、 $n$ が偶数( $n = 2m$ ,  $m$ は整数)の場合を考える。  $\lambda = j\omega$ での特性多項式 $f(j\omega)$ の実部と虚部をそれぞれ $R(\omega)$ ,  $S(\omega)$ とおく。すなわち、

$$f(j\omega) = R(\omega) + jS(\omega) \quad (9)$$

である。ここで、 $R(\omega)$ の非負の $s$ 個の零点を $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_s \geq 0$ とおく。このとき、複素数平面上の閉右半平面上にある $f(\lambda)$ の零点の個数を $N$ とすると、

$$N = m + (-1)^{-m} \sum_{k=1}^s (-1)^{k+1} \text{sgn}S(\sigma_k) \quad (10)$$

となる。ただし、 $\text{sgn}$ は符号関数であり、 $\pm 1$ の値をとる。さらに、系が安定である必要十分条件は、

$$S(\sigma_k) \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, s$$

$$\sum_{k=1}^s (-1)^k \text{sgn}S(\sigma_k) = (-1)^m m \quad (11)$$

が成り立つことである。  $\triangle$

命題の証明は、偏角の原理に基づいている。 $N$ は半径 $H$ のBromwich軌跡を用いて

$$N = \frac{1}{2\pi j} \lim_{H \rightarrow +\infty} \oint_{(g)} \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} d\lambda$$

で与えられることを用いる。ここで、 $(g)$ はFig. 4のような中心が原点にある半径 $H$ の半円状の閉経路である。証明の詳細はStépánのCh.2を参照のこと<sup>4)</sup>。

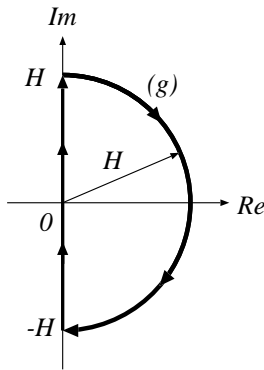


Fig. 4 複素閉右半平面を覆う閉曲線 $(g)$

定理1から求められた(6)式の安定領域の境界は、Fig. 5の実線と破線である。Fig. 5の安定領域の中からパラメータ $(a_0, b)$ を選び、対応する固定比例ゲイン $R_0$ と振子の長さ $l$ を選ぶことで、むだ時間制御系(6)式は比例ゲインだけで安定化させることができる。

## 4.2 ノイズがシステムに及ぼす影響

(12)式に示すように系に加えられた状態依存ノイズ $\xi(t)$ が系の安定性におよぼす影響を検証する。

$$\ddot{\theta}(t) + a_1 \dot{\theta}(t) + a_0 \theta(t) = (b + \xi(t))\theta(t-1) \quad (12)$$

ここで、ノイズ $\xi(t)$ は大きさ $n_R$ の白色雑音と仮定している。白色雑音は自己相関関数が $0(\tau \neq 0)$ 、つまり異なる時刻の信号値の間にはまったく相関がない性質を持っているため、ダイナミクスの変動も偏りが無いという不規則性を示す。ゆえに、(12)式は時変システムとなり、その安定性は4.1節の議論では取り扱うことができない。以上では、(12)式の安定性をシミュレーションによって調べ、4.1節で求めた安定領域がノイズを加えたことでどのように変化するかを調べる。

## 4.3 数値シミュレーションによる安定解析

### 4.3.1 時不変システム

(6)式のモデルに対して、モデルのパラメータはTable 1のように設定し、様々な $a_0$ と $b$ を与えたときの振子の振舞いをシミュレーションにより求めた。このときの安定化可能な変数 $(a_0, b)$ の領域は

Table 1 モデルのパラメータの一覧

$m = 0.2$ [kg]	振子の質量
$\tau = 0.033$ [s]	角度検出のむだ時間
$\gamma = 0.5$ [ $\frac{\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}}{\text{rad}}$ ]	振子の粘性摩擦係数

Fig. 5のようになる。シミュレーションにおいて、安定・不安定の判別は、十分時間が経過したときの角度 $\theta(t)$ と $\dot{\theta}(t)$ がある小さな $\epsilon > 0$ 以下に収まっているか否かで行った。Fig. 5において、安定な場合を印、不安定な場合を $\times$ 印で表した。図中の実線は4.1節で求めた安定条件の理論値であり、シミュレーション結果とほぼ一致していることがわかる。

### 4.3.2 ノイズ $\xi(t)$ が加わる時変システム

むだ時間制御系に状態依存ノイズ $\xi(t)$ を加えたモデル、(12)式の安定性を前節と同様にシミュレーションによって調べ、結果をFig. 7に示した。パラメータの設定や変数、記号の意味は前節と同様である。Fig. 7から以下のような事実が明らかになった。

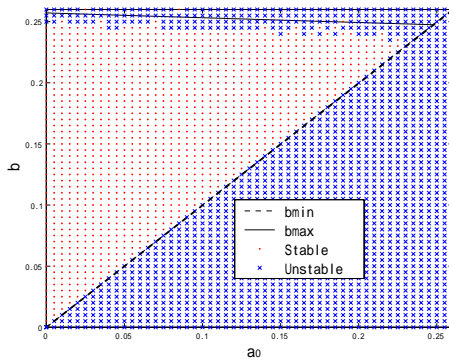


Fig. 5 ノイズのないシステムの安定領域

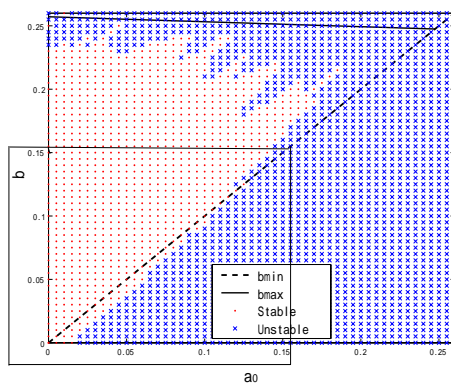


Fig. 6 ノイズを加えた場合の安定領域

- 1) むだ時間システムにノイズを加えても安定領域の形に大きな変化は起こらない。
- 2)  $a_0$ と $b$ が小さい値をとるとき、ノイズを加えた方が安定領域は広がる。
- 3)  $a_0$ が大きくなると、ノイズを加えたら系の安定性は保証されない。
- 4) 安定境界 $b_{max}$ の付近ではノイズを加えたら系の安定性は保証されない。

3)の結果において、 $a_0(= \frac{3g}{l})$ の値が大きくなるということは、物理的には振子の長さが短くなることに相当する。棒の長さが短くなるほど高周波数成分を含む運動制御が必要となり、ある程度以下の長さになると制御が困難になることは直感的に理解できる。このことから、 $a_0$ の値が大きい部分は物理的な意味を持たない。実際に $a_0$ が0.15以上のところは振子の長さが20[cm]以下になり、物理的なシステムにおいてに実現可能な範囲ではないと考えられる。さらに、4)の結果において、比例ゲインの固定要素 $b$ を安定境界付近まで大きく設定すると応答の振動性が大きくなり、制御系ではこういう設定は行わない。実際に $b(= R_0 \tau^2)$ が0.2

以上の値になるためには、比例ゲイン $R_0$ を180以上に設定する必要がある、物理的に実現可能な範囲ではない。

そこで、今回は2)の結果に注目されたい。物理的に意味をもちかつ実現可能な $a_0$ と $b$ の範囲内(で挟んである部分)において、状態依存ノイズの影響で系の安定領域が広がっている。これは、従来の制御器設計において排除させるように捉えられていたノイズの概念が、フィードバックゲインのゆらぎとして導入され、かつ物理系のパラメータおよびフィードバックゲインを適切に設定することにより、系の安定性にプラスの影響をおよぼし得る可能性を示唆している。

### 4.3.3 安定境界付近の挙動

むだ時間システムにノイズを加えることで系の挙動はどのように変化し、ノイズが系の安定性にどのような影響を与えるかを調べるために、安定境界付近の系の挙動をシミュレーションによって調べた。確率的な要素を含むシステムであるため、試行は複数回行っているが、振子角度の時間応答の典型例をFig. 7 ~ 9に示す。この図は $a_0$ の値を0.05に固定し、 $b$ の値をノイズのないシステムの理論的な安定領域(Fig. 7)、安定境界線上(Fig. 8)、不安定領域(Fig. 9)にそれぞれ設定したときの挙動である。

ノイズのないシステムでは発散してしまい不安定になるFig. 8およびFig. 9の場合、ノイズを入れるとなんらかの影響で発散が収まり零に収束していることがわかる。さらに、ノイズのないシステムが安定になるFig. 7の場合も、ノイズを入れることによって速答性がかなり早くなっていることが観測される。こういう現象はFig. 7の安定境界近傍の全体で見られた。

以上のことから系の安定境界付近では、系のダイナミクスをノイズで変動させることで安定領域が広がるだけでなく、速答性も良くなることが明らかになった。

## 5. おわりに

本論文では、視覚系と中枢神経系の信号伝達に大きなむだ時間をもつ人間が、どのような制御メカニズムでむだ時間を克服しているのかを調べるために、人の運動制御時の棒の動きを参考に状態依存ノイズを導入した新しいモデルを提案した。また、むだ時間をもつ簡単な物理系をモデル化し、固定比例ゲインだけの制御則に基づいた安定条件を導き、さらにシミュレーションによって比例ゲインに加わるノイズの影響を調べた。

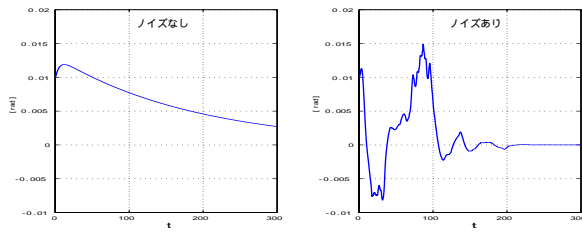


Fig. 7 安定領域でのノイズの影響 ( $a_0 = 0.05$ ,  $b = 0.051$ )

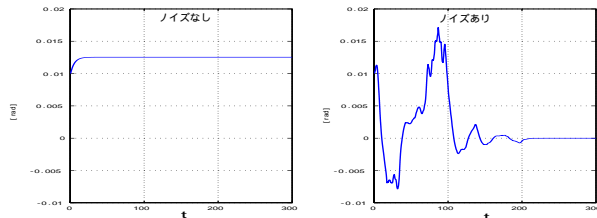


Fig. 8 安定境界でのノイズの影響 ( $a_0 = 0.05$ ,  $b = 0.05$ )

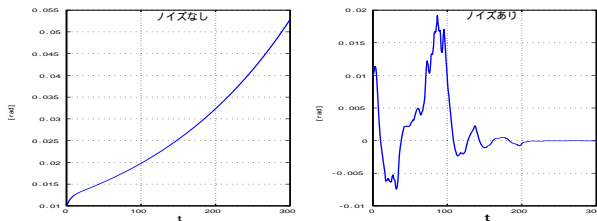


Fig. 9 不安定領域でのノイズの影響 ( $a_0 = 0.05$ ,  $b = 0.048$ )

シミュレーション結果から安定領域全体でのノイズの影響を一般化することは困難であるが、振子のパラメータと比例ゲインを物理的に実現可能な範囲に制限することで、適切な大きさのノイズは系の安定領域を広げ、安定領域の付近では速答性も良くなることが明らかになった。

今後の研究において重要な課題が二つ残されている。一つは、今回は数値シミュレーションによってノイズの影響を調べたが、システムにおけるノイズの役割を解明するためには、ノイズが加わった時変システムの理論的な安定解析を行うことが不可欠である。さらに、2節で述べた視覚(カメラ)による倒立振子の安定化制御系に対して、本論文の安定条件を用いることで安定化制御器を構成し、実機実験を行うことである。フィードバック信号に大きなむだ時間を含むような実機実験では、倒立振子を安定化させるとは難しいが<sup>5)</sup>、システムにノイズのプラスの影響を積極的に取り入れることでより広い範囲の安定性を確保し、人の運動制御のメカニズムを利用した制御系の構築に繋がると考えている。

## 参考文献

- 1) J. L. Cabrera, J. G. Milton, R. Bormann, C. Eulich, T. Ohira and J. G. Milton, State-Dependent Noise and Human Balance Control, *Fluctuation and Noise Letters*, Vol. 4, No. 1, L107/L117(2004)
- 2) J. L. Cabrera, J. G. Milton, Stick balancing: On-off intermittency and survival times, *Nonlinear Studies*, Vol. 11, No. 3, 305/317 (2004)
- 3) 牛田 俊, 福田 憲一郎, 李 眞娥, 出口 光一郎, 人の学習運動制御系の振舞いに基づく倒立振子のむだ時間補償制御, 第48回自動制御連合講演会講演論文集, 長野, 189/194 (2005)
- 4) G. Stépán, *Retarded Dynamical System: Stability and Characteristic Functions*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 210, Wiley Sons, New York(1989)
- 5) 牛田 俊, 福田 憲一郎, 出口 光一郎, Just-In-Time手法による倒立振子安定化制御器の推定, 第5回計測自動制御学会部門大会予稿集, 仙台, 507/510 (2005)
- 6) F. M. ATAY, Balancing the Inverted Pendulum Using Position Feedback, *Applied Mathematics Letters*, Vol. 12, 51/56 (1999)