

高速 H_∞ フィルタの追跡能力と存在時間Tracking Ability and Existing Period of the Fast H_∞ Filter

西山 清*, ○瀬川 真一*, 陳 兵*

NISHIYAMA Kiyoshi*, ○SEGAWA Shinichi*, CHIN Hei*

*岩手大学

*Iwate University

キーワード : H_∞ フィルタ (H_∞ filter), ハイパー H_∞ フィルタ (hyper H_∞ filter),
高速アルゴリズム (fast algorithm), システム同定 (system identification)

連絡先 : 〒 020-8551 盛岡市上田 4-3-5 岩手大学 工学部 情報システム工学科 西山研究室
西山清, Tel.: (019)621-6475, Fax.: (019)621-6475, E-mail: nisyama@cis.iwate-u.ac.jp

1. はじめに

近年、外乱から推定誤差までの伝達行列の H_∞ ノルムを最小にする意味で最適な H_∞ フィルタが注目を集めている¹⁾。また、最近になって忘却係数を H_∞ の意味で最適に決定できるハイパー H_∞ フィルタとその高速アルゴリズムが提案され²⁾、時変システムの実時間同定への応用が期待されている。

本研究では、ハイパー H_∞ フィルタの高速アルゴリズムである高速 H_∞ フィルタの追従能力と存在時間に関して実際の音声信号を用いて考察する。

2. H_∞ フィルタ

次の離散時間の確定的な状態空間モデルを考える。

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{F}_k, \mathbf{G}_k, \mathbf{H}_k$ は既知行列とし、初期状態 \mathbf{x}_0 、システム雑音 $\{\mathbf{w}_k\}$ 、観測雑音 $\{\mathbf{v}_k\}$ は未知外乱とし、 \mathbf{y}_k は観測信号とする。このとき、次のような状態 \mathbf{x}_k の線形結合 \mathbf{z}_k を推定する問題を考える。

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k \quad (3)$$

評価関数は、未知外乱 $\Sigma_0^{-1/2}(\mathbf{x}_0 - \check{\mathbf{x}}_0)$, $\{\mathbf{w}_i\}_{i=0}^k$, $\{\mathbf{v}_i\}_{i=0}^k$ からフィルタ誤差 $\{\mathbf{e}_{f,i}\}_{i=0}^k = \{\check{\mathbf{z}}_{k|k} - \mathbf{L}_k \mathbf{x}_k\}_{i=0}^k$ への伝達行列 $\mathbf{T}_k(\mathcal{F}_f)$ の H_∞ ノルムである。ただし、 $\check{\mathbf{z}}_{k|k}$ は $\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k$ が与えられたときの \mathbf{z}_k の推定値であり、 $\check{\mathbf{x}}_0$ は \mathbf{x}_0 の初期推定値、 Σ_0 は \mathbf{x}_0 の不確定性を表す正定行列である。以上より、 H_∞ フィルタリング問題は伝達行列 $\mathbf{T}_k(\mathcal{F}_f)$ の H_∞ ノルムを最小にするフィルタ \mathcal{F}_f を設計する問題となる。

しかし、一般にはこの最適問題を解くことは困難であるため、次の準最適 H_∞ フィルタリング問題が取り扱われる。

[準最適 H_∞ フィルタリング問題] ; $\gamma_f > 0$ が与えられたとき、 $\|\mathbf{T}_k(\mathcal{F}_f)\|_\infty < \gamma_f$ を満たす、つまり

$$\sup_{x_0, \{w_i\}, \{v_i\}} \frac{\sum_{i=0}^k \|e_{f,i}\|^2}{\|\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0\|_{\Sigma_0^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^k \|w_i\|^2 + \sum_{i=0}^k \|v_i\|^2} < \gamma_f^2$$

を満たす H_∞ フィルタ $\hat{z}_{k|k} = \mathcal{F}_f(\mathbf{y}_0, \dots, \mathbf{y}_k)$ を求めよ。

準最適 H_∞ フィルタ問題の解である H_∞ フィルタは以下ようになる。

[H_∞ フィルタ]

$$\hat{z}_{k|k} = \mathbf{L}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{K}_{s,k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_{s,k+1} = \hat{\mathbf{P}}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T \cdot (\mathbf{I} + \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{P}}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T)^{-1} \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{G}_k \mathbf{G}_k^T - \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k^T & \mathbf{L}_k^T \end{bmatrix} \mathbf{R}_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{L}_k \end{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{F}_k^T \quad (7)$$

ここで、

$$\mathbf{R}_{e,k} = \mathbf{R}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{L}_k \end{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k^T & \mathbf{L}_k^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma_f^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (8)$$

であり、 $\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}$ は次の存在条件 (不等式) を満たさなければならない。

$$\hat{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1} = \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{-1} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k^T & \mathbf{L}_k^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\gamma_f^{-2} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{L}_k \end{bmatrix}$$

$$= \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k - \gamma_f^{-2} \mathbf{L}_k^T \mathbf{L}_k > 0 \quad (9)$$

これは次式と等価である。

$$\mathbf{I} + \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T > 0$$

$$-\gamma_f^2 \mathbf{I} + \mathbf{L}_k (\hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{-1} + \mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k)^{-1} \mathbf{L}_k^T < 0 \quad (10)$$

ただし、 $[\mathbf{F}_k \ \mathbf{G}_k]$ はフルランクとする。これより、 γ_f の値によっては H_∞ フィルタが存在しないことがわかる。

3. ハイパー H_∞ フィルタ

忘却係数は時変システムに対するトラッキング性能を改善するために現在広く用いられている。次に、忘却係数 ρ を H_∞ の意味で最適に決定できるハイパー H_∞ フィルタを示す。

[ハイパー H_∞ フィルタ]

次の状態空間モデルに対して、

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k, \mathbf{x}_k \in \mathcal{R}^N \quad (11)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + v_k, \quad \mathbf{y}_k, v_k \in \mathcal{R} \quad (12)$$

$$z_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \quad z_k \in \mathcal{R}, \mathbf{H}_k \in \mathcal{R}^{1 \times N} \quad (13)$$

評価基準

$$\sup_{x_0, \{w_i\}, \{v_i\}} \frac{\sum_{i=0}^k \|e_{f,i}\|^2 / \rho}{\|\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}}_0\|_{\Sigma_0^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^k \|w_i\|^2 + \sum_{i=0}^k \|v_i\|^2 / \rho} < \gamma_f^2$$

を満たす状態推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ は、次のレベル γ_f のハイパー H_∞ フィルタによって与えられる。

$$\hat{z}_{k|k} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{K}_{s,k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \quad (15)$$

$$\mathbf{K}_{s,k+1} = \hat{\Sigma}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T \cdot (\mathbf{H}_{k+1} \hat{\Sigma}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \rho)^{-1} \quad (16)$$

$$\hat{\Sigma}_{k+1|k} = (\hat{\Sigma}_{k|k-1} - \hat{\Sigma}_{k|k-1} [\mathbf{H}_k^T \ \mathbf{H}_k^T] \cdot \mathbf{R}_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_k \end{bmatrix} \hat{\Sigma}_{k|k-1}) / \rho \quad (17)$$

ここで、

$$e_{f,i} = \hat{z}_{i|i} - \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i, \quad \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$$

$$\mathbf{R}_{e,k} = \mathbf{R}_k + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_k \end{bmatrix} \hat{\Sigma}_{k|k-1} [\mathbf{H}_k^T \ \mathbf{H}_k^T]$$

$$\mathbf{R}_k = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\rho \gamma_f^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_{0|-1} = \Sigma_0, 0 < \rho = 1 - \gamma_f^{-2} \leq 1, \gamma_f > 1 \quad (18)$$

ただし、 γ_f はロバスト性のために次の存在条件を満たす限り出来るだけ小さく調節すべきである。

$$\hat{\Sigma}_{i|i-1}^{-1} + \frac{1 - \gamma_f^{-2}}{\rho} \mathbf{H}_i^T \mathbf{H}_i > 0, \quad i = 0, \dots, k \quad (19)$$

4. 高速 H_∞ フィルタ

ハイパー H_∞ フィルタは $\hat{\Sigma}_{k|k-1} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ の更新に $\mathcal{O}(N^2)$ の計算量が必要である。しかし、観測行列 \mathbf{H}_k が以下のようなシフト特性を持つとき、計算量が $\mathcal{O}(N)$ となる高速アルゴリズムが存在する。

$$\mathbf{H}_{k+1} = [u_{k+1}, H_k(1), \dots, H_k(N-1)] \quad (20)$$

ここで、 u_{k+1} は時間 $k+1$ でのシステムへの入力信号である。

[高速 H_∞ フィルタ]

高速 H_∞ フィルタは次のように計算量 $\mathcal{O}(N)$ で実行できる。

[Step 0] 初期条件を設定する。

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{0}_{N \times 2}, \mathbf{A}_{-1} = \mathbf{0}_{N \times 1}, S_{-1} = \frac{1}{\varepsilon_0} \quad (21)$$

$$\mathbf{D}_{-1} = \mathbf{0}_{N \times 1}, \hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \mathbf{0}_{N \times 1} \quad (22)$$

ここで、 ε_0 は大きな正の数であり、 $\mathbf{0}_{N \times M}$ は $N \times M$ のゼロ行列とする。

[Step 1] \mathbf{A}_k と S_k を決定する。

$$\tilde{\mathbf{e}}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{A}_{k-1} \in \mathcal{R}^{2 \times 1} \quad (23)$$

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{W}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \in \mathcal{R}^{N \times 1} \quad (24)$$

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{c}_k + \mathbf{C}_k \mathbf{A}_k \in \mathcal{R}^{2 \times 1} \quad (25)$$

$$S_k = \rho S_{k-1} + \mathbf{e}_k^T \mathbf{W}_k \tilde{\mathbf{e}}_k \in \mathcal{R} \quad (26)$$

ここで、

$$\mathbf{C}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_k \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{2 \times N} \quad (27)$$

$$\mathbf{W}_k = \rho \mathbf{R}_k^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\gamma_f^{-2} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{2 \times 2} \quad (28)$$

また、 $0 < \rho = 1 - \gamma_f^{-2} \leq 1$ と $\gamma_f > 1$ という条件が存在する。

[Step 2] $\check{\mathbf{K}}_k$ を計算する。

$$\check{\mathbf{K}}_k = \begin{bmatrix} S_k^{-1} \mathbf{e}_k^T \\ \mathbf{K}_k + \mathbf{A}_k S_k^{-1} \mathbf{e}_k^T \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(N+1) \times 2} \quad (29)$$

[Step 3] $\check{\mathbf{K}}_k$ を分ける。

$$\check{\mathbf{K}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{m}_k \\ \boldsymbol{\mu}_k \end{bmatrix}, \mathbf{m}_k \in \mathcal{R}^{N \times 2}, \boldsymbol{\mu}_k \in \mathcal{R}^{1 \times 2} \quad (30)$$

[Step 4] \mathbf{m}_k と $\boldsymbol{\mu}_k$ を用いて、次の時間 $(k+1)$ でのゲイン行列 \mathbf{K}_{k+1} を決定する。それにはフィルタゲイン $\mathbf{K}_{s,k+1}$ が含まれている。

$$\boldsymbol{\eta}_k = \mathbf{c}_{k-N} + \mathbf{C}_{k+1} \mathbf{D}_{k-1} \in \mathcal{R}^{2 \times 1} \quad (31)$$

$$\mathbf{D}_k = [\mathbf{D}_{k-1} - \mathbf{m}_k \mathbf{W}_k \boldsymbol{\eta}_k][1 - \boldsymbol{\mu}_k \mathbf{W}_k \boldsymbol{\eta}_k]^{-1} \quad (32)$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{m}_k - \mathbf{D}_k \boldsymbol{\mu}_k \in \mathcal{R}^{N \times 2} \quad (33)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{k+1}(i) = \rho \mathbf{K}_{k+1}(i, 1) \quad (34)$$

$$g_{k+1} = \rho + \gamma_f^{-2} \mathbf{H}_{k+1} \tilde{\mathbf{K}}_{k+1} \quad (35)$$

$$\mathbf{K}_{s,k+1} = g_{k+1}^{-1} \tilde{\mathbf{K}}_{k+1} \in \mathcal{R}^{N \times 1} \quad (36)$$

[Step 5] フィルタ方程式を更新する。

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{K}_{s,k+1}(y_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \quad (37)$$

[Step 6] 時間 k を 1 増加させ、Step 1 に戻る。

[スカラー存在条件]

高速 H_∞ フィルタの存在条件は次式となる。

$$-\varrho \hat{\Xi}_i + \rho \gamma_f^2 > 0, \quad i = 0, \dots, k \quad (38)$$

ここで、 $\varrho, \hat{\Xi}_i$ は次のように定義される。

$$\varrho = 1 - \gamma_f^2, \quad \hat{\Xi}_i = \frac{\mathbf{H}_i \check{\mathbf{K}}_i}{1 - \mathbf{H}_i \check{\mathbf{K}}_i} \quad (39)$$

5. シミュレーションによる評価

5.1 準備

高速 H_∞ フィルタの性能を評価するために、FIR(finite impulse response) システムの同定を考える。高速 H_∞ フィルタ (FHF) と一般に用いられている LMS を C 言語で実装し、それらの性能を未知システムのインパルス応答の推定に関して比較する。Fig.1 にタップ数が 48 の未知システムのインパルス応答を、Fig.2 にシミュレーションで用いた 100000 サンプルの音声データを示す。

5.2 追跡能力の評価

シミュレーションでは、LMS と FHF 共に時刻 $k=0$ で初期化し、時刻 $k=20000$ で Fig.1 に示す

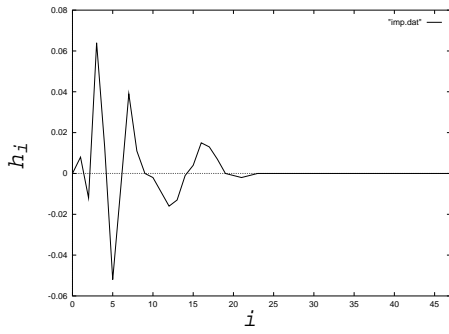


Fig. 1 未知システムのインパルス応答

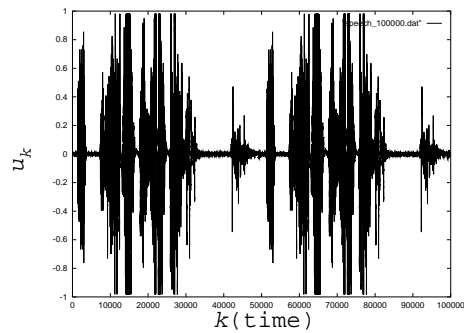
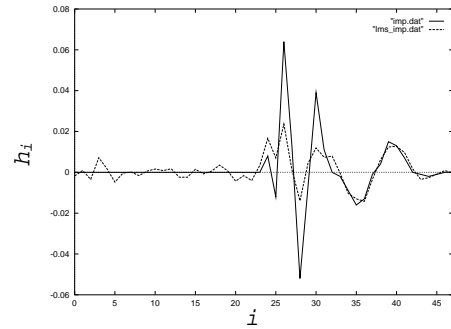


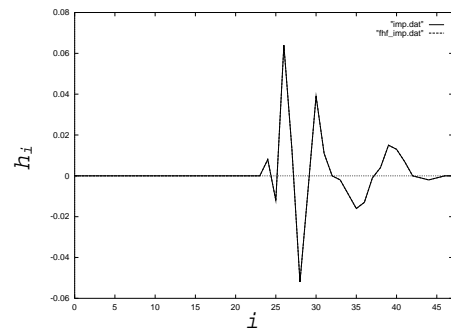
Fig. 2 シミュレーションに用いた音声データ

インパルス応答を 23 タップシフトさせて追跡性能を比較した。Fig.3(a) に時刻 $k = 100000$ での LMS によるインパルス応答の推定結果を、Fig.3(b) に同じく時刻 $k = 100000$ での FHF によるインパルス応答の推定結果をそれぞれ示した。このグラフ中の実線は真のインパルス応答を、点線はフィルタによって推定したインパルス応答をそれぞれ示している。また、Fig.4(a) に $\mu = 0.04$ のときの LMS の追跡性能を、Fig.4(b) に $\gamma_f = 62$ のときの FHF の追跡性能を示す。このグラフの横軸は時間、縦軸は真のインパルス応答と推定したインパルス応答との 2 乗誤差、すなわち $e_k^2 = \|\hat{\mathbf{x}}_{k|k} - \mathbf{x}_k\|^2 = \sum_{i=1}^{48} (\hat{h}_i - h_i)^2$ である。ここで、 h_i は真のインパルス応答の値を、 \hat{h}_i はインパルス応答の推定値を表している。

Fig.3 から、FHF は実線と点線がほぼ一致しているため推定が良好であるが、LMS は実線と点線が大きくずれている。また、Fig.4 から、LMS は収束速度が遅いのにに対して、FHF は初期の収束速度もインパルス応答の変化への追従速度も速いこと

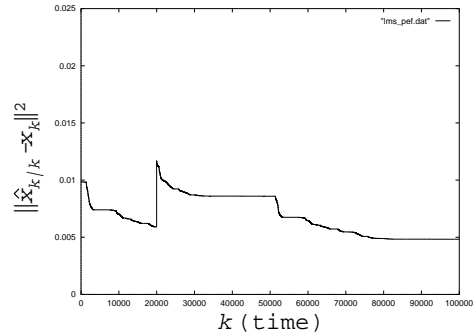


(a) LMS ($\mu=0.04$)

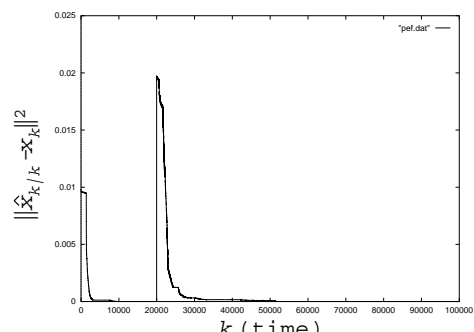


(b) FHF ($\gamma_f=62$)

Fig. 3 インパルス応答の最終推定値



(a) LMS ($\mu=0.04$)



(b) FHF ($\gamma_f=62$)

Fig. 4 インパルス応答の追跡性能

がわかる。以上より、FHFはLMSと比べて格段に高い収束性能と追従性能をもつことがわかる。

5.3 単精度と倍精度の存在時間の比較

Fig.2の入力信号を用い、高速 H_∞ フィルタを単精度と倍精度でそれぞれ存在時間を調べた。ここで、存在時間とは高速 H_∞ フィルタが存在条件を満たさなくなるまでの時間 T_{exist} である。未知システムのインパルス応答はタップ数が48であるFig.1を用い、時刻 $k=20000$ でインパルス応答を23タップシフトさせている。Fig.5に γ_f の値を2から65まで変えた時の、単精度と倍精度の存在時間の変化のグラフを示す。ここで、横軸は γ_f の値を縦軸は存在時間 T_{exist} を表している。また、実線は高速 H_∞ フィルタを単精度で実行した場合の存在時間を、点線は高速 H_∞ フィルタを倍精度で実行した場合の存在時間を表している。

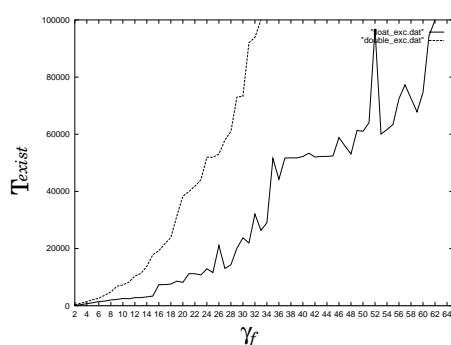


Fig. 5 単精度と倍精度の存在時間の変化

Fig.5から、単精度と倍精度共に γ_f の値が大きくなるにつれて存在時間が長くなっていることがわかる。また、単精度と倍精度の存在時間を比較すると、同じ γ_f の値に対しては単精度よりも倍精度の場合の方が、存在時間が長くなるという結果になった。一方、追従性能は γ_f の値が等しければ単精度、倍精度で大きな差はなかった。

6. おわりに

高速 H_∞ フィルタはLMSよりも優れた収束速度を示し、またインパルス応答の変化に対しても優れた追跡性能をもつことがわかった。さらに、 γ_f や数値精度による高速 H_∞ フィルタの存在時間の違いを調べた結果、 γ_f の値を大きくすると存在時間は長くなることがわかった。また、高速 H_∞ フィルタを単精度で実行した場合より、倍精度で実行した場合の方が存在時間が長くなるが、追従性能には大きな違いはなかった。

今後の課題としては、タップ数を増やした場合でも高速 H_∞ フィルタをDSPに実装できるように計算量をさらに削減することである。

本研究は、電気通信普及財団の支援を受けて実施された。

参考文献

- 1) 西山 清: 最適フィルタリング, 培風館, 2001.
- 2) K. Nishiyama: An H_∞ Optimization and Its Fast Algorithm for Time-Variant System Identification, IEEE Transactions on Signal Processing, 52-5, pp.1335-1342, 2004.