計測自動制御学会東北支部 第229回研究集会 (2006.6.9)
資料番号 229-9

線形離散時間システムのグラミアンを保存する周波数変換

Gramian-Preserving Frequency Transformation for Linear Discrete-Time Systems

○越田俊介，阿部正英，川又政征

○Shunsuke Koshita, Masahide Abe, Masayuki Kawamata

東北大学大学院工学研究科

Graduate School of Engineering, Tohoku University

キーワード： 可制御性グラミアン (controllability Gramian)，可観測性グラミアン (observability Gramian)，周波数変換 (frequency transformation)，全域通過関数 (allpass function)，平衡形 (balanced form)

連絡先： 〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-05 東北大学大学院工学研究科 電子工学専攻 川又研究室
越田俊介，Tel.: (022)795-7095，Fax.: (022)263-9169，E-mail: kosita@mk.ecei.tohoku.ac.jp

1. はじめに

線形システムの可制御性グラミアンおよび可観測性グラミアンは，線形システム理論において基礎的かつ重要な役割を担っており，伝達関数による記述では表現できないようなシステム内部の構造を詳しく解析するために用いられる[1)]．これらのグラミアンを用いた実用的な理論は，制御理論・信号処理理論・回路理論など工学の幅広い分野において数多く確立されており，たとえばモデル低次数化とよばれる線形システムの近似理論[2, 3)]や，高精度ディジタルフィルタの実現理論[4, 5, 6, 7)] などが知られている．

周波数変換は，線形システムの伝達関数における変数を別の関数で置き換えることによって，さまざまな特性のシステムを生成する手法である．線形離散時間システムの周波数変換は，システムの遅延素子を全域通過関数で置き換えることによって実現される[8)]．この手法は信号処理の分野においてよく知られており，ある与えられた低域通過フィルタから別の特性を有するフィルタを簡易的に設計するために用いられる．

著者らはこれまで，周波数変換によって生成されるさまざまな線形システムを状態空間表現に基づいて解析し，システムの実現や動的な性質に関する数多くの重要な知見を得ている[9, 10, 11)]．本稿では，線形離散時間システムを対象として，これまで用いられてきた状態空間表現に基づく周波数変換の記述法[12)]を修正し，その結果として，システムの可制御性・可観測性グラミアンが保存されるような新しい周波数変換の記述法を導出する．また，この記述法に基づいて生成されるさまざまなシステムが，グラミアンの観点から同一の構造を有するという興味深い性質を示す．さらに，この記述法が信号処理理論にもたらす重要な知見として，平衡形や丸め誤差最小構造といった実用上有益なディジタルフィルタの構造が，変換の前後

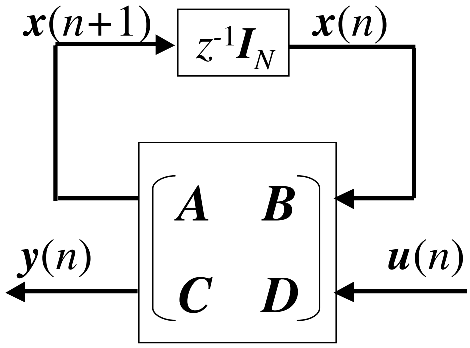

Fig. 1　線形離散時間システムの状態空間表現

で保存されるという性質を示す.

2.　線形離散時間システムの状態空間表現とグラミアン

2.1　状態空間表現

N次のm入力p出力の安定な伝達関数行列$\boldsymbol{H}(z)$をもつ線形離散時間システムの次の状態空間表現を考える.

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(n) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{y}(n) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(n) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(n) \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{u}(n) \in \Re^m$と$\boldsymbol{y}(n) \in \Re^p$はそれぞれシステムの入力と出力であり，$\boldsymbol{x}(n) \in \Re^N$はシステムの遅延素子の出力を表す状態ベクトルである．また，$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$は適当なサイズの実係数行列である．ここで，システム$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$は最小実現であるとする．係数行列と伝達関数行列は

$$\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{C}(z\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{3}$$

の関係にある．ただし，$\boldsymbol{I}_N$は$N \times N$の単位行列を表す．このシステムのブロック図を図1に示す.

与えられた伝達関数行列$\boldsymbol{H}(z)$を満足する状態空間表現の係数は無限に存在する．すなわち，システム$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$において，任意の$N \times N$の正則行列$\boldsymbol{T}$を用いて状態ベクトル$\boldsymbol{x}(n)$を

$$\boldsymbol{x}'(n) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}(n) \tag{4}$$

と変換したとき，新しい状態$\boldsymbol{x}'(n)$を有するシステム$(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}', \boldsymbol{C}', \boldsymbol{D}') = (\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}, \boldsymbol{D})$もまた伝達関数行列$\boldsymbol{H}(z)$を満足する．このように，状態空間表現の係数すなわちシステムの構造が$\boldsymbol{T}$によって変化しても伝達関数は変化しないので，(4)式の変換は等価変換とよばれる．システム$\boldsymbol{H}(z)$がディジタルフィルタを表すとき，上述の議論より，同一の伝達関数をもつフィルタ構造は無限に存在するといえる.

2.2　可制御性・可観測性グラミアン

システム$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$に対して次のリアプノフ方程式の解$\boldsymbol{K}$と$\boldsymbol{W}$は可制御性グラミアンおよび可観測性グラミアンとよばれる.

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{K}\boldsymbol{A}^t + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^t \tag{5}$$

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}^t\boldsymbol{C} \tag{6}$$

$H(z)$が安定で$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$が最小実現であれば，この$\boldsymbol{K}$と$\boldsymbol{W}$は対称正定行列となる.

システムの可制御性グラミアンおよび可観測性グラミアンは，係数行列$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$と同様に，与えられた伝達関数行列$\boldsymbol{H}(z)$に対して一意に定まらず無限に存在する．すなわち，(4)式の等価変換に対して，$\boldsymbol{K}$と$\boldsymbol{W}$は次式のように変化する.

$$\boldsymbol{K}' = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{T}^{-t} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{W}' = \boldsymbol{T}^t\boldsymbol{W}\boldsymbol{T} \tag{8}$$

信号処理の分野では，可制御性グラミアンと可観測性グラミアンはディジタルフィルタの構造の特徴を表す行列として知られており，高精度ディジタルフィルタの実現問題を考える上で，非常に重要な役割を担っている．具体的には，有限語長ディジタルフィルタの量子化誤差の解析および最小化の問題において，可制御性グラミアンと可観測性グラミアンが用いられる[4, 5, 6, 7]．詳しい説明は省略するが，量子化誤差の大きさはフィルタ

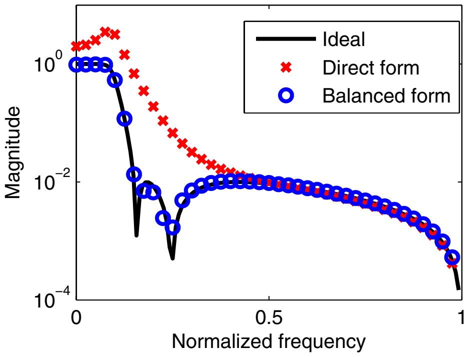

Fig. 2　有限語長ディジタルフィルタの特性の比較

の構造と密接に関係しており，量子化誤差の小さい高精度なディジタルフィルタを実現するためには，システムの可制御性グラミアン$\boldsymbol{K}$と可観測性グラミアン$\boldsymbol{W}$を適切な形に選ぶ必要がある．

高精度ディジタルフィルタ構造として，たとえばグラミアンが次式で与えられるような構造が知られている[6]．

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{W} = \boldsymbol{\Theta} \tag{9}$$

この構造は平衡形[2, 3]とよばれ，2つのグラミアンが等しくつり合っている構造である．ここで，$\boldsymbol{\Theta}$は対角行列であり，その各要素は行列積$\boldsymbol{KW}$の固有値の正の平方根(Hankel特異値あるいは2次モードとよばれる)として与えられる．

有限語長ディジタルフィルタの実現例を図2に示す．ここで用いられているフィルタは5次のチェビシェフ型低域通過フィルタであり，係数の語長を小数点以下8ビットに量子化している．この図に示されるように，伝達関数表現に基づいて実現された「直接形」とよばれる構造では量子化誤差による特性劣化が非常に大きくなっているが，平衡形では劣化が非常に小さく，理論上の振幅特性に非常に近い特性が得られている．

3.　周波数変換

ここでは，線形離散時間システムの周波数変換について述べる．また，周波数変換によって得られるシステムの状態空間表現における係数と可制御性・可観測性グラミアンに関する補題および定理を導入する．

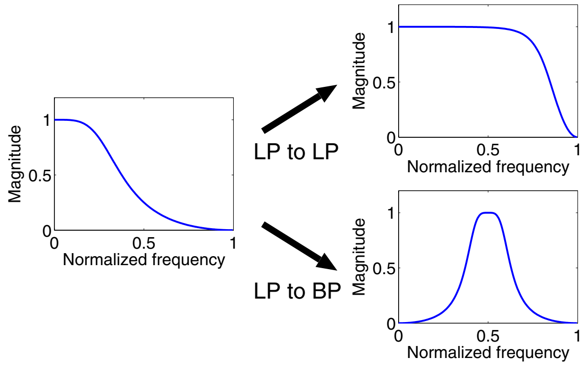

Fig. 3　周波数変換の例

3.1　周波数変換

線形離散時間システムの周波数変換は，与えられたN次のシステム$\boldsymbol{H}(z)$に対して$z^{-1} \leftarrow 1/F(z)$の変数変換を適用することにより，新しいシステム$\boldsymbol{H}(F(z))$を得る手法である．ここで，$1/F(z)$は次式で与えられるM次の全域通過関数[1, 12]である．

$$\frac{1}{F(z)} = \pm \prod_{i=1}^{M} \frac{z^{-1} - p_i^*}{1 - p_i z^{-1}}, \quad |p_i| < 1 \tag{10}$$

この変換は，ディジタルフィルタの簡易設計法として知られており，図3に示されるように，遮断周波数が既知の低域通過フィルタから任意の遮断周波数を有する各種のフィルタに変換することができる．

ディジタルフィルタの設計においてよく用いられる周波数変換として，低域–低域変換・低域–高域変換・低域–帯域変換・低域–帯域阻止変換において用いられる関数$1/F(z)$を表 1に示す．表 1において，$\omega_c, \omega_o, \Delta$は変換後のシステム$\boldsymbol{H}(F(z))$の遮断周波数，中心周波数，帯域幅をそれぞれ決定する変数である．

Table 1　周波数変換

周波数変換	関数 $1/F(z)$
低域–低域変換	$\frac{z^{-1}-\omega_c}{1-\omega_c z^{-1}}$
低域–高域変換	$-\frac{z^{-1}+\omega_c}{1+\omega_c z^{-1}}$
低域–帯域変換	$-\frac{z^{-2}-\frac{2\omega_o\Delta}{\Delta+1}z^{-1}+\frac{\Delta-1}{\Delta+1}}{\frac{\Delta-1}{\Delta+1}z^{-2}-\frac{2\omega_o\Delta}{\Delta+1}z^{-1}+1}$
低域–帯域阻止変換	$\frac{z^{-2}-\frac{2\omega_o}{1+\Delta}z^{-1}+\frac{1-\Delta}{1+\Delta}}{\frac{1-\Delta}{1+\Delta}z^{-2}-\frac{2\omega_o}{1+\Delta}z^{-1}+1}$

3.2　周波数変換によって得られる線形離散時間システムの状態空間表現

ここでは，周波数変換によって得られるシステム$\boldsymbol{H}(F(z))$の状態空間表現の係数および可制御性・可観測性グラミアンの記述[12)]について概説する．なお，文献[12)]では1入力1出力のシステムのみを対象としているが，多入力多出力システムに対しても1入力1出力の場合と全く同じ結果が成立することを容易に示せるので，本稿では多入力多出力システムに対する表記を用いる．

まず，$\boldsymbol{H}(F(z))$の状態空間表現の係数に関する次の補題を導入する．

補題 1 N次の安定なシステム$\boldsymbol{H}(z)$およびM次の全域通過関数$1/F(z)$の状態空間表現の係数をそれぞれ$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$および$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\delta)$ とする．このとき，周波数変換$z^{-1}\leftarrow 1/F(z)$によって得られるシステム$\boldsymbol{H}(F(z))$は

$$\boldsymbol{H}(F(z)) = \overline{\boldsymbol{D}} + \overline{\boldsymbol{C}}(z\boldsymbol{I}_{MN} - \overline{\boldsymbol{A}})^{-1}\overline{\boldsymbol{B}} \tag{11}$$

と表され，$(\overline{\boldsymbol{A}},\overline{\boldsymbol{B}},\overline{\boldsymbol{C}},\overline{\boldsymbol{D}})$は$\boldsymbol{H}(z)$および$1/F(z)$の係数を用いて次式で与えられる．

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I}_N \otimes \boldsymbol{\alpha} + [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})^{-1}] \otimes (\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}) \tag{12}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}} = [(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}] \otimes \boldsymbol{\beta} \tag{13}$$

$$\overline{\boldsymbol{C}} = [\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})^{-1}] \otimes \boldsymbol{\gamma} \tag{14}$$

$$\overline{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D} + \delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}_N - \delta\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \tag{15}$$

ここで，$\otimes$は行列のクロネッカー積を表し，次式

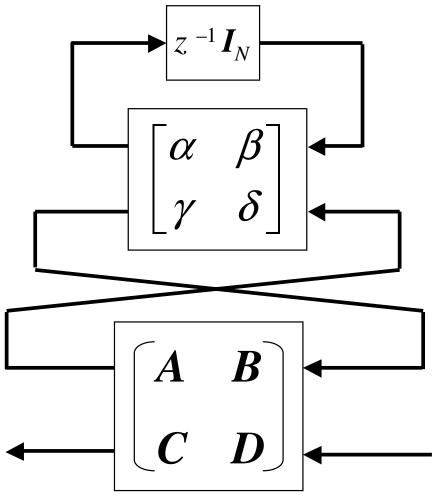

Fig. 4　システム$\boldsymbol{H}(F(z))$の状態空間表現

で定義される．

$$\boldsymbol{X} \otimes \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} x_{11}\boldsymbol{Y} & x_{12}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{1n}\boldsymbol{Y} \\ x_{21}\boldsymbol{Y} & x_{22}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{2n}\boldsymbol{Y} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1}\boldsymbol{Y} & x_{m2}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{mn}\boldsymbol{Y} \end{pmatrix} \tag{16}$$

□

図4に示されるように，$\boldsymbol{H}(F(z))$のブロック図は，$\boldsymbol{H}(z)$の遅延素子を全域通過システム$1/F(z)$で置き換えたものとして表現される．

次に，システム$(\overline{\boldsymbol{A}},\overline{\boldsymbol{B}},\overline{\boldsymbol{C}},\overline{\boldsymbol{D}})$の可制御性・可観測性グラミアンについての補題を導入する．

補題 2 $\boldsymbol{H}(F(z))$の状態空間表現の係数が(12)–(15)式で与えられるとき，このシステムの可制御性グラミアン$\overline{\boldsymbol{K}}$と可観測性グラミアン$\overline{\boldsymbol{W}}$は次のように表される．

$$\overline{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{Q} \tag{17}$$

$$\overline{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{W} \otimes \boldsymbol{Q}^{-1} \tag{18}$$

ここで，$\boldsymbol{K}$と$\boldsymbol{W}$はシステム$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$の可制御性・可観測性グラミアンであり，$\boldsymbol{Q}$とその逆行列$\boldsymbol{Q}^{-1}$は全域通過関数$1/F(z)$の可制御性・可観測性グラミアンである．すなわち，$\boldsymbol{Q}$と$\boldsymbol{Q}^{-1}$はそれぞれ次のリアプノフ方程式の解として得られる．

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\alpha}^t + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^t \tag{19}$$

$$Q^{-1} = \alpha^t Q^{-1} \alpha + \gamma^t \gamma \tag{20}$$

□

4.　線形離散時間システムのグラミアンを保存する周波数変換

本章では，前章で導入した補題を利用して，線形離散時間システムの可制御性グラミアンと可観測性グラミアンを保存する周波数変換の記述法を導出する．すなわち，システム$\boldsymbol{H}(z)$と$\boldsymbol{H}(F(z))$の状態空間表現が同一のグラミアンを有するような周波数変換の記述法を導出する．また，導出した記述法の応用として，高精度ディジタルフィルタの実現問題においてもたらされる重要な知見についても述べる．

4.1　システムのグラミアンを保存する周波数変換の導出

まず，$\boldsymbol{H}(F(z))$の状態空間表現について，補題1および2と等価の関係にある次の補題を導出する．

補題 3 補題1において得られる$\boldsymbol{H}(F(z))$の係数行列の式(12)–(15)に対して，クロネッカー積の順序を逆にしてできる次の行列の組

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{I}_N + (\boldsymbol{\beta\gamma}) \otimes [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_N - \delta \boldsymbol{A})^{-1}] \tag{21}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{\beta} \otimes [(\boldsymbol{I}_N - \delta \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B}] \tag{22}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{\gamma} \otimes [\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}_N - \delta \boldsymbol{A})^{-1}] \tag{23}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{D} + \delta \boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}_N - \delta \boldsymbol{A})^{-1} \boldsymbol{B} \tag{24}$$

も$\boldsymbol{H}(F(z))$の係数行列となる．すなわち，次の関係が成立する．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(F(z)) &= \overline{\boldsymbol{D}} + \overline{\boldsymbol{C}}(z\boldsymbol{I}_{MN} - \overline{\boldsymbol{A}})^{-1} \overline{\boldsymbol{B}} \\ &= \widetilde{\boldsymbol{D}} + \widetilde{\boldsymbol{C}}(z\boldsymbol{I}_{MN} - \widetilde{\boldsymbol{A}})^{-1} \widetilde{\boldsymbol{B}} \end{aligned} \tag{25}$$

また，システム$(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{D}})$の可制御性・可観測性グラミアン$\widetilde{\boldsymbol{K}}$と$\widetilde{\boldsymbol{W}}$はそれぞれ次のように表される．

$$\widetilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{Q} \otimes \boldsymbol{K}, \quad \widetilde{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{Q}^{-1} \otimes \boldsymbol{W} \tag{26}$$

□

補題3の証明は，補題1および2の証明[12]と同様の方法により容易に導けるので，ここでは省略する．

補題3より，グラミアンを保存する周波数変換を導出するために重要となる次の定理が直ちに導かれる．

定理 1 周波数変換によって得られるシステム$(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{D}})$の可制御性・可観測性グラミアンの式(26)において，$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_M$が成立するならば，次式が成立する．

$$\widetilde{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{I}_M \otimes \boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{K} \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{I}_M \otimes \boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{W} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{W} \end{pmatrix} \tag{28}$$

すなわち，$\widetilde{\boldsymbol{K}}$と$\widetilde{\boldsymbol{W}}$はそれぞれ$\boldsymbol{K}$と$\boldsymbol{W}$を対角ブロックとする$MN \times MN$のブロック対角行列となる．

□

定理1より，全域通過関数$1/F(z)$の係数$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \delta)$が$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_M$の関係を満足するとき，周波数変換によって得られるシステム$(\widetilde{\boldsymbol{A}}, \widetilde{\boldsymbol{B}}, \widetilde{\boldsymbol{C}}, \widetilde{\boldsymbol{D}})$のグラミアンは，もとのシステム$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$と同一のグラミアンによって構成されることがわかる．したがって，$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}_M$の関係を満足するような全域通過関数の係数を用いて(21)–(24)式の周波数変換を適用すると，変換の前後でグラミアンが保存されるといえる．

ここで，$\boldsymbol{Q}$と$\boldsymbol{Q}^{-1}$はそれぞれ全域通過関数の可制御性･可観測性グラミアンであるから，$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{-1}$が成り立つとき，すなわち平衡形を有する全域通過関数の係数を用いて(21)–(24)式の周波数変換を

適用したときに，グラミアンが保存されることがわかる．

結果として，次の定理が導かれる．

定理 2 N次の安定なシステム$\boldsymbol{H}(z)$およびM次の全域通過関数$1/F(z)$の状態空間表現の係数をそれぞれ$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$および$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\delta)$とする．また，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\delta)$と等価な実現$(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Lambda},\delta)$を考え，$\boldsymbol{\Lambda}$は$\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^t=\boldsymbol{Q}$を満足する任意の正則行列であるとする．この実現$(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Lambda},\delta)$は平衡形を有するので，これを用いて得られる次式の記述は，グラミアンを保存する周波数変換の記述となる．

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda})\otimes\boldsymbol{I}_N+(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Lambda})\otimes[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_N-\delta\boldsymbol{A})^{-1}] \quad (29)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}=(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\beta})\otimes[(\boldsymbol{I}_N-\delta\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}] \quad (30)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}=(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Lambda})\otimes[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}_N-\delta\boldsymbol{A})^{-1}] \quad (31)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{D}+\delta\boldsymbol{C}(\boldsymbol{I}_N-\delta\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \quad (32)$$

すなわち，(29)–(32)式によって得られるシステム$(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{C}},\widetilde{\boldsymbol{D}})$の可制御性グラミアンと可観測性グラミアンは，システム$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$の可制御性・可観測性グラミアンをブロック対角成分とする$MN\times MN$のブロック対角行列としてそれぞれ与えられる． □

4.2 高精度ディジタルフィルタの実現への応用

ここでは，定理2において与えたグラミアンを保存する周波数変換の記述が，高精度ディジタルフィルタの実現技術に対してもたらす重要な知見について述べる．具体的には，ある与えられたフィルタが精度の高い構造を有している場合，その高い精度を保ったまま別の特性のフィルタを生成することが，定理2の記述法によって可能であることを示す．高精度フィルタ構造の例として，ここでは平衡形 (統計的係数感度最小構造) と丸め誤差最小構造をとりあげて議論する．

4.2.1 平衡形(統計的係数感度最小構造)の保存

(9)式で述べた通り，平衡形は，2つのグラミアンが互いに等しい構造である．また，信号処理の分野では，平衡形はディジタルフィルタの統計的係数感度を最小とし，係数量子化誤差による特性劣化が非常に小さい有益なフィルタ構造として知られている[6]．

いま，伝達関数$\boldsymbol{H}(z)$が既知のシステムを考え，その状態空間表現が平衡形として与えられているとする．このシステムの可制御性・可観測性グラミアンを$\boldsymbol{K}_B$および$\boldsymbol{W}_B$とすると，$\boldsymbol{K}_B$と$\boldsymbol{W}_B$は対角行列$\boldsymbol{\Theta}$を用いて$\boldsymbol{K}_B=\boldsymbol{W}_B=\boldsymbol{\Theta}$と表される．このシステムに対して定理2の周波数変換を適用し，結果として得られるシステム$\boldsymbol{H}(F(z))$のグラミアンを$\widetilde{\boldsymbol{K}}_B$および$\widetilde{\boldsymbol{W}}_B$とする．このとき，定理1より次の関係式が容易に得られる．

$$\widetilde{\boldsymbol{K}}_B=\widetilde{\boldsymbol{W}}_B=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Theta} & & \boldsymbol{0}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{\Theta}\end{pmatrix} \quad (33)$$

上式より，定理2の周波数変換によって，変換前のシステム$\boldsymbol{H}(z)$と同一の平衡形の構造を変換後のシステム$\boldsymbol{H}(F(z))$にもたせることができるということがわかる．したがって，ディジタルフィルタの実現においては，図5に示されるように，統計的係数感度最小という有益な性質を保ったままフィルタの特性を自由に変更することが，定理2の記述法によって可能となる．

4.2.2 丸め誤差最小構造の保存

丸め誤差最小構造は，ディジタルフィルタの乗算において発生する丸め演算による特性劣化を最小とするフィルタ構造である[4, 5]．この構造を有するシステムの可制御性・可観測性グラミアンを

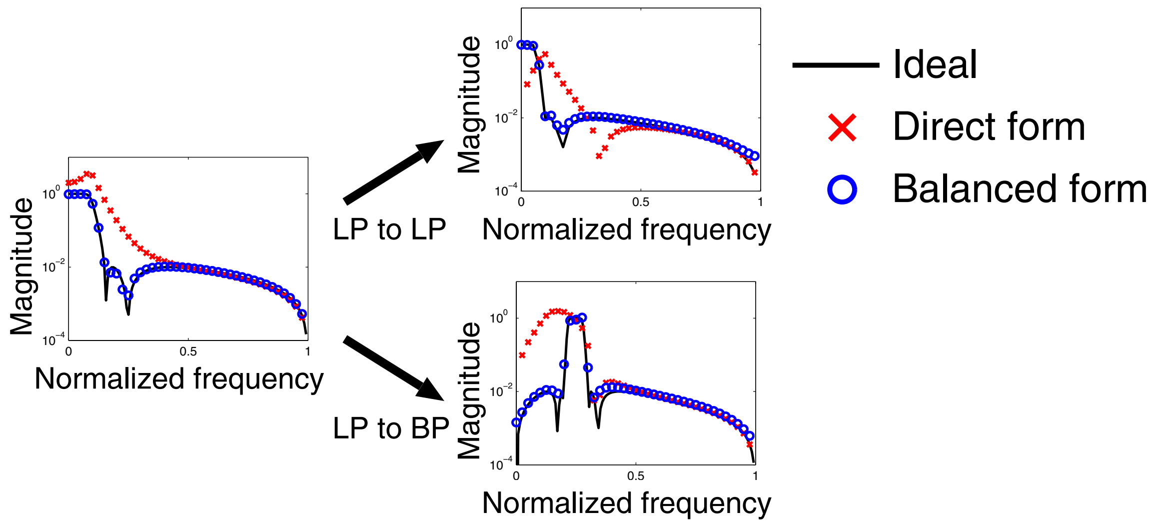

Fig. 5　高精度なフィルタ構造を保存する周波数変換の実現(係数8ビット量子化)

それぞれ$\boldsymbol{K}_R$および$\boldsymbol{W}_R$とすると，$\boldsymbol{K}_R$と$\boldsymbol{W}_R$は次の関係式を満足する．

$$\boldsymbol{K}_R=\begin{pmatrix}1 & & *\\ & \ddots & \\ * & & 1\end{pmatrix} \tag{34}$$

$$\boldsymbol{W}_R=\rho^2\boldsymbol{K}_R \tag{35}$$

ここで，ρ^2 はシステムの次数とHankel特異値とを用いて記述される定数である．

平衡形の場合と同様にして，このシステムに対して定理2の周波数変換を適用し，結果として得られるシステムのグラミアンを$\widetilde{\boldsymbol{K}}_R$ および$\widetilde{\boldsymbol{W}}_R$とする．このとき，定理1より，$\boldsymbol{K}_R, \boldsymbol{W}_R, \widetilde{\boldsymbol{K}}_R, \widetilde{\boldsymbol{W}}_R$の間に次の関係式が成立することが容易にわかる．

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{K}}_R&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{K}_R & & \boldsymbol{0}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{K}_R\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1 & & *\\ & \ddots & \\ * & & 1\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{36}$$

$$\widetilde{\boldsymbol{W}}_R=\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_R & & \boldsymbol{0}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{W}_R\end{pmatrix}=\rho^2\widetilde{\boldsymbol{K}}_R \tag{37}$$

上式より，定理2の周波数変換によって得られるさまざまなシステムが，変換前と同一の丸め誤差最小構造を有していることが示される．

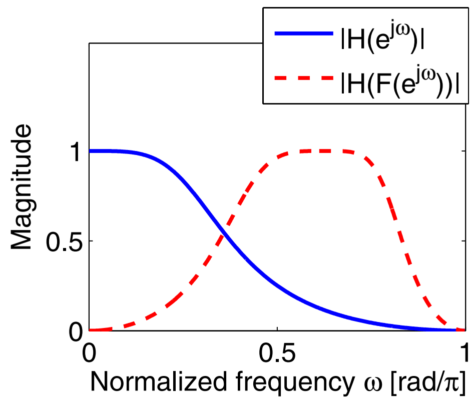

Fig. 6　システム$H(z)$と$H(F(z))$の振幅特性

上に述べた2種類のフィルタ構造以外にも，定理2の周波数変換のもとで保存される有益な構造は数多く存在する．たとえば，リミットサイクルを発生しない構造[13]や入力正規形・出力正規形といった構造は，定理2の周波数変換によって保存される．

5.　計算例

伝達関数$H(z)$が次式で与えられる2次の1入力1出力の線形離散時間システムを考える．

$$H(z)=\frac{0.1311+0.2622z^{-1}+0.1311z^{-2}}{1-0.7478z^{-1}+0.2722z^{-2}} \tag{38}$$

このシステムは，図6の実線で示される低域通過特性を有する．このシステムの状態空間表現の係

数行列$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$ を次のように与える．

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \hline \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.5840 & -0.4202 & -0.6463 \\ 0.4202 & 0.1638 & 0.2398 \\ \hline -0.6463 & -0.2398 & 0.1311 \end{array}\right) \tag{39}$$

このとき，可制御性・可観測性グラミアン$\boldsymbol{K},\boldsymbol{W}$は次のように求まる．

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{W} = \mathrm{diag}(0.6830, 0.1830) \tag{40}$$

2つのグラミアンが互いに等しくかつ対角であるので，このシステム$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$は平衡形実現を有する．

上述のシステムに対して，次の全域通過関数$1/F(z)$による周波数変換を適用することを考える．

$$\frac{1}{F(z)} = \frac{0.1756 - 0.3149z^{-1} - z^{-2}}{1 + 0.3149z^{-1} - 0.1756z^{-2}} \tag{41}$$

この全域関数を用いた周波数変換によって得られるシステムの伝達関数$H(F(z))$は次のように求まる．

$$H(F(z)) = \frac{0.2066 - 0.4131z^{-2} + 0.2066z^{-4}}{1 + 0.9051z^{-1} + 0.5979z^{-2} + 0.2907z^{-3} + 0.1958z^{-4}} \tag{42}$$

このシステムは，図6の破線で示される帯域通過特性を有する．

(41)式の全域通過関数の状態空間表現において，定理2によって得られる係数の組$\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Lambda}, \delta$は次のように得られる．

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\beta} \\ \hline \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\Lambda} & \delta \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{cc|c} 0.4303 & -0.3810 & 0.8183 \\ 0.3810 & -0.7452 & -0.5473 \\ \hline -0.8183 & -0.5473 & 0.1756 \end{array}\right) \end{aligned} \tag{43}$$

数値計算により，この係数の組に対する可制御性グラミアンと可観測性グラミアンは単位行列として得られることが容易に確認される．したがって，この全域通過関数は平衡形を有する．

(39)式と(43)式を用いて定理2の周波数変換を適用すると，(42)式の伝達関数$H(F(z))$の状態空間表現の係数行列が次のように求まる．

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{A}} &= \begin{pmatrix} 0.0209 & -0.6547 & 0.3208 & 0.2145 \\ 0.6547 & -0.5622 & -0.2145 & -0.1435 \\ -0.3208 & -0.2145 & 0.3418 & -0.4402 \\ 0.2145 & 0.1435 & 0.4402 & -0.7056 \end{pmatrix} \\ \widetilde{\boldsymbol{B}} &= \begin{pmatrix} -0.6022 & 0.4027 & 0.1563 & -0.1045 \end{pmatrix}^t \\ \widetilde{\boldsymbol{C}} &= \begin{pmatrix} 0.6022 & 0.4027 & 0.1563 & 0.1045 \end{pmatrix} \\ \widetilde{\boldsymbol{D}} &= 0.2066 \end{aligned} \tag{44}$$

このシステムの可制御性グラミアンと可観測性グラミアンは次のように計算される．

$$\widetilde{\boldsymbol{K}} = \widetilde{\boldsymbol{W}} = \mathrm{diag}(0.6830, 0.1830, 0.6830, 0.1830) \tag{45}$$

(40)式と(45)式より，システム$(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{C}},\widetilde{\boldsymbol{D}})$のグラミアンは，システム$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$のグラミアンを対角ブロックとするブロック対角行列として表されていることが確認される．すなわち，周波数変換の前後でグラミアンが保存され，システム$(\widetilde{\boldsymbol{A}},\widetilde{\boldsymbol{B}},\widetilde{\boldsymbol{C}},\widetilde{\boldsymbol{D}})$はシステム$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D})$と同一の平衡形実現を有しているという性質が確認される．

6. むすび

本稿では，全域通過関数の平衡形を利用することによって，線形離散時間システムの可制御性グラミアンと可観測性グラミアンが保存されるような周波数変換の記述を導出した．また，この方法によって生成されるさまざまなシステムが，グラミアンの観点から同一の構造を有するという性質を示した．さらに，本稿で導出された周波数変換の記述によって，平衡形や丸め誤差最小構造といった実用上有益なディジタルフィルタの構造が，変換の前後で保存されるという重要な性質を示した．

はじめに述べた通り，線形システムの可制御性グラミアンと可観測性グラミアンは，信号処理理論だけでなく制御理論や回路理論など幅広い分野において重要な役割を果たすものである．したがっ

て，今後は，本稿で導出した周波数変換の記述法を信号処理以外の研究分野に応用することについて検討する予定である．

参考文献

1) 前田肇: 線形システム，朝倉書店 (2001)

2) B. C. Moore: Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction, IEEE Trans., Automatic Control, **AC-26**-1, 17/32 (1981)

3) L. Pernebo and L. M. Silverman: Model reduction via balanced state space representations, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-27**-2, 382/387 (1982)

4) C. T. Mullis and R. A. Roberts: Synthesis of minimum roundoff noise fixed point digital filters, IEEE Trans. Circuits and Systems, **CAS-23**-9, 551/562 (1976)

5) S. Y. Hwang: Minimum uncorrelated unit noise in state-space digital filtering, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, **ASSP-25**-4, 273/281 (1977)

6) 川又政征, 岩月正見, 樋口龍雄: 線形システムにおける感度最小構造としての平衡形実現，計測自動制御学会論文集, **21**-9, 900/906 (1985)

7) M. Kawamata and T. Higuchi: A unified approach to the optimal synthesis of fixed-point state-space digital filters, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, **ASSP-33**-4, 911/920 (1985)

8) A. G. Constantinides: Spectral transformations for digital filters, Proc. IEE, **117**-8, 1585/1590 (1970)

9) S. Koshita and M. Kawamata: State-space formulation of frequency transformation for 2-D digital filters, IEEE Signal Processing Letters, **11**-10, 784/787 (2004)

10) S. Koshita and M. Kawamata: Invariance of second-order modes under frequency transformation in 2-D separable denominator digital filters, Multidimensional Systems and Signal Processing, **16**-3, 305/333 (2005)

11) S. Koshita, M. Abe and M. Kawamata: Gramian-preserving frequency transformation for linear continuous-time state-space systems, Proceedings of IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 453/456 (2006)

12) C. T. Mullis and R. A. Roberts: Roundoff noise in digital filters: Frequency transformations and invariants, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, **ASSP-24**-6, 538/550 (1976)

13) M. Kawamata and T. Higuchi: On the absence of limit cycles in a class of state-space digital filters which contains minimum noise realizations, IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, **ASSP-32**-4, 928/930 (1984)