計測自動制御学会東北支部 第 231 回研究集会 (2006.10.31)
資料番号 231-15

遺伝的アルゴリズムによる非線形制御系の設計

Design of Nonlinear Control System Using Genetic Algorithm

○水谷紘也 *，大久保重範 ***，及川一美 **，高橋達也 ‡

○ Hiroya Mizutani*,Shigenori Okubo***, Kazumi Oikawa**, Tatuya Takahashi‡

山形大学工学部

Yamagata University

キーワード： 遺伝的アルゴリズム (genetic algorithm)，非線形制御 (nonlinear control)，
クロネッカー積 (kroneker product), 拡張リカッチ方程式 (extended Riccati equation)

連絡先： 〒992-8510 山形県米沢市城南 4-3-16 山形大学工学部 機械システム工学科 大久保研究室水谷紘也，Tel.: (0238)26-3245，Fax.: (0238)26-3245，E-mail: sokubo@dip.yz.yamagata-u.ac.jp

1. はじめに

本研究の目的は多項式形非線形制御系の安定化制御を行うことである．本研究では, システムを非線形のままで扱い, 線形レギュレータの理論を拡張して非線形系に適用する．しかし, 拡張したリカッチ方程式は長方行列を解とするものであり, これを要素毎に分解すると, 変数の個数より方程式の個数が多く, 数学的に解くことができない．そこで, 変数に具体的な数値を代入し, 評価関数の荷重行列が正定になるように調節する手法をとる．この変数をどのように決めるかの探索法として, 遺伝的アルゴリズム (GA:Genetic Algorithm) を用い, 高近似の解を求め, それを制御に使うこととする．しかしながら,GA で必ず解を得られるとは限らないため, 非線形多項式を解を得やすいように変数変換することによって, N 次のべき状態ベクトルの 2 次形式なるリアプノフ関数が存在し, 大域的に安定な非線形レギュレータを設計する.

2. 縮約形

クロネッカ巾 $x^{[k]}$ には同一要素が含まれているが, 独立な要素を辞書順に並べたベクトルを $x^{[k]}$ の縮約形と呼ぶことにし,$x^{<k>}$ で表す．一例として,2 変数 3 次形（$n = 2$,$k = 3$）の場合を以下で示す.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} x^{[2]} &= x \otimes x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \Rightarrow x^{<2>} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} x^{[3]} &= x \otimes x \otimes x \\ &= \left[x_1^3, x_1^2x_2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1x_2^2, x_2^3,\right]^T \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^{<3>} = \begin{bmatrix} x_1^3 \\ x_1^2x_2 \\ x_1x_2^2 \\ x_2^3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

このように縮約形で扱うことによって, 行列の次数が小さくなり, 計算を行うのに便利となる. この先 $x^{<n>}$ で表記したテンソルは, 縮約形を用いているものとする.

3. 非線形レギュレータ

制御対象は状態の多項式からなる非線形系であり,(4) 式のように与える.

$$\dot{x} = \sum_{k=1}^{2N-1} A_{<1,k>} x^{<k>} + Bu \tag{4}$$

状態ベクトル x であり, 簡略化のためにべき状態ベクトルを $G^{<2N-1>}(x)$, 係数行列を $A_{G<1,2N-1>}$ とするとき制御対象の非線形システム方程式は, テンソルの縮約形を用いて表すと (5) 式のようになる.

$$\dot{x} = A_{G<1,2N-1>} G^{<2N-1>}(x) + Bu \tag{5}$$

べき状態ベクトルの縮約形を (7) 式のように表す.

$$A_{G<1,2N-1>} = [A_{<1,1>} \quad A_{<1,2>} \cdots A_{<1,2N-1>}] \tag{6}$$

$$G^{<2N-1>}(x) = \left[x^T \quad x^{T<2>} \quad \cdots \quad x^{T<2N-1>}\right]^T \tag{7}$$

このように線形システムのように記述することができる. 制御入力 u の縮約形表示は (8) 式となる.

$$u = -R^{-1} B^T P_{G<1,2N-1>} G^{<2N-1>}(x) \tag{8}$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_t^{\infty} (G^{<2N-1>T}(x(t)) Q_{G<2N-1,2N-1>} G^{<2N-1>}(x(t)) + u^T R u) dt \tag{9}$$

拡張リカッチ方程式の縮約形は (10) 式となる.

$$Q_{G<2N-1,2N-1>} + P^T_{G<1,2N-1>} A_{G<1,2N-1>} + A^T_{G<1,2N-1>} P_{G<1,2N-1>} - P^T_{G<1,2N-1>} B R^{-1} B^T P_{G<1,2N-1>} = 0 \tag{10}$$

$P_{G<1,2N-1>}$ の独立な変数の個数 N_{va}, 方程式の本数 N_{eq} は次式で表される.

$$N_{va} = \sum_{k=2}^{2N} {}_nH_k = {}_{n+2N}C_{2N} - (n+1) \tag{11}$$

$$N_{eq} = \sum_{k=2}^{4N-2} {}_nH_k = {}_{n+4N-2}C_{4N-2} - (n+1) \tag{12}$$

$N \geqq 2$ のとき,N_{va}¡N_{eq} となり数学的に解くことができない. そこで GA を用いて,$P_{G<1,2N-1>}$ に具体的な数値を与え, 評価関数の荷重行列 $Q_{G<2N-1,2N-1>}$ が正定になるように調節する.

4. 安定条件

$V(t)$ は正方荷重行列 $\tilde{P}_{G<N,N>}$ を用いると (13) 式のように表すことができる.

$$V(t) = \frac{1}{2} G^{<N>T}(x) \tilde{P}_{G<N,N>} G^{<N>}(x) = \sum_{k=1}^{2N-1} \frac{1}{k+1} x^T P_{<1,k>} x^{<k>} \tag{13}$$

上式の $P_{<1,2N-1>}1$ と $\tilde{P}_{G<N,N>}$ の関係から $\tilde{P}_{G<N,N>}$ を求める. 縮約形で閉ループ系が大域的に安定であることを表記すれば (14) 式となる.

$$\tilde{P}_{G<N,N>} > 0, Q_{G<2N-1,2N-1>} > 0 \tag{14}$$

$$\Rightarrow V(t) > 0, \dot{V}(t) < 0 \tag{15}$$

5. CHC

GA の最も基本的な方法である SGA は動作は非常に単純だが, 適応する問題が複雑になるにつれて, なかなか解を得ることが難しくなってきた. そこで, その問題を解決するために,CHC という方法を用いる. CHC は Eshelman が提案した GA であり,C(cross generational elitist selection),H(heterogeneous recombination),C(cataclysmic mutation) の略語である. この方法は単純性を犠牲とする代わりに各操作をより効果的に行い, 得られた最良個体を確実に残すという意図を前面に出したアルゴリズムである. そのアルゴリズムのフローチャートを Fig. 1 に示す. ここで N は個体群サイズ,L は個体長,k は世代,d は閾値,r は拡散率を表す. 一方で, より解を得やすいようにするため, システムに対して変数変換を行う.

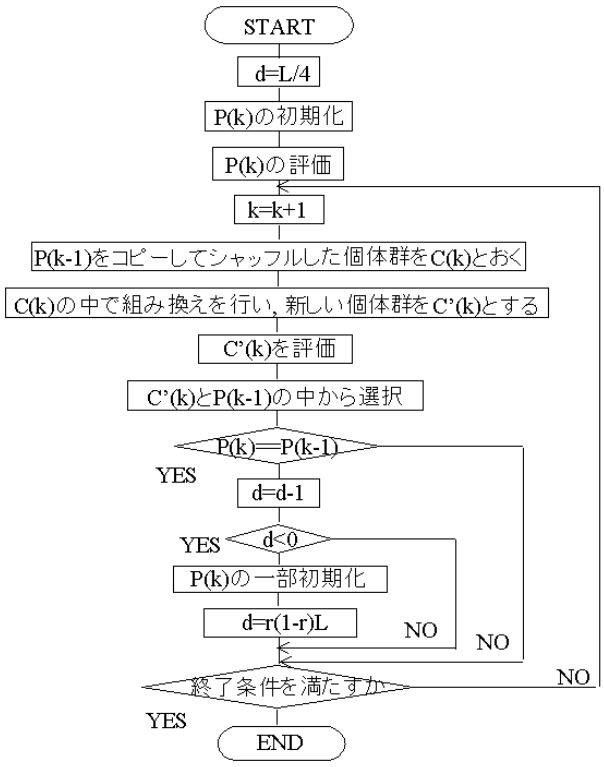

Fig. 1　Flowchart

6.　変数変換

実際に Fig. 2 に示すようなマスバネダンパー系を例にして, 変数変換を行った. 状態方程式を次式で与える.

$$M\ddot{x} + K_1(x_1 - x_2) + K_3(x_1 - x_2)^3 = u \qquad (16)$$
$$K_1(x_1 - x_2) + K_3(x_1 - x_2)^3 = D\dot{x}_2 \qquad (17)$$

M　：　質量 [kg]

D_1　：　粘性減衰係数 $[Ns/m]$

K_1, K_3　：　ばね定数 $[N/m], [N/m^3]$

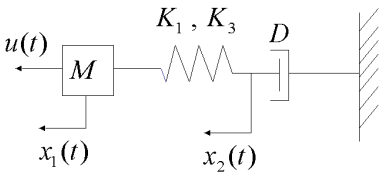

Fig. 2　A model of the dynamic system

$x_1 = x_{1s}, x_2 = x_{2s}$ とおくと, この問題は,3 変数 3 次形式の非線形レギュレータとして扱える.

$$\dot{x}_{2s} = \frac{K_1}{D}x_{1s} - \frac{K_1}{D}x_{2s} + \frac{K_3}{D}(x_{1s}^3 - 3x_{1s}^2x_{2s} - 3x_{1s}x_{2s}^2 - x_{2s}^3)$$
$$\ddot{x}_{1s} = -\frac{K_1}{M}x_{1s} + \frac{K_1}{M}x_{2s} - \frac{K_3}{M}(x_{1s}^3 - 3x_{1s}^2x_2 - 3x_{1s}x_{2s}^2 - x_{2s}^3) + \frac{1}{M}u \qquad (18)$$

整理すると

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}\dot{x}_{1s}\\ \dot{x}_{2s}\\ \ddot{x}_{1s}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{K_1}{D} & -\frac{K_1}{D} & 0\\ -\frac{K_1}{M} & \frac{K_1}{M} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1s}\\ x_{2s}\\ \dot{x}_{1s}\end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1s}^2\\ x_{1s}x_{2s}\\ x_{1s}\dot{x}_{1s}\\ x_{2s}^2\\ x_{2s}\dot{x}_{1s}\\ \dot{x}_{1s}^2\end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{K_3}{D} & -\frac{3K_3}{D} & 0 & \frac{3K_3}{D} & 0 & 0 & -\frac{K_3}{D}\\ -\frac{K_3}{M} & \frac{3K_3}{M} & 0 & -\frac{3K_3}{M} & 0 & 0 & \frac{K_3}{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1s}^3\\ x_{1s}^2x_{2s}\\ x_{1s}^2\dot{x}_{1s}\\ x_{1s}x_{2s}^2\\ x_{1s}x_{2s}\dot{x}_{1s}\\ x_{1s}\dot{x}_{1s}^2\\ x_{2s}^3\\ x_{2s}^2\dot{x}_{1s}\\ x_{2s}\dot{x}_{1s}^2\\ \dot{x}_{1s}^3\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\\frac{1}{M}\end{bmatrix}u$$

$$= A_{<1,1>}x^{<1>} + A_{<1,2>}x^{<2>} + A_{<1,3>}x^{<3>} + Bu$$
$$= \sum_{k=1}^{3} A_{<1,k>}x^{<k>} + Bu$$
$$= A_{G<1,3>}G^{<3>}(x) + Bu \qquad (19)$$

このシステムを X システムと呼ぶ事にする. このシステムについて GA を行なったが, 安定条件 (評価値の最小値が正となること) を満たす解を見つけることができなかった.

よって X システムを GA によって解を見つけやすいように変数変換を行う. (変数変換後のシステムを A システムと呼ぶ事にする)

ここで,$x_{1s} = a_1$、$x_{2s} = -3a_2 - a_2^3 (= \dot{a}_1)$ のように

変数変換を行うと,

$$x_{1s} + x_{2s} = a_1 \tag{20}$$

$$x_{1s} - x_{2s} = a_2 \tag{21}$$

ただし, 定数 $c_1 = \frac{K_1}{D}, c_2 = \frac{K_3}{D}, c_3 = \frac{K_1}{M}, c_4 = \frac{K_3}{M}, c_5 = \frac{1}{M}$ とする.

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1s} &= -(c_1+2)a_2 - (c_2+1)a_2^3 - 3a_3 - a_3^3 \\ &\quad - 4a_1^3 - 2a_1^2 a_3 \end{aligned} \tag{22}$$

とすると、

$$\begin{aligned}\dot{x}_{1s} &= \frac{\dot{a}_1}{2} + \frac{\dot{a}_1}{2} = -(c_1+2)a_2 - (c_2+1)a_2^3 \\ &\quad - 3a_3 - a_3^3 - 4a_1^3 - 2a_1^2 a_3 (= \dot{x}_{1s}) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_{2s} &= \frac{\dot{a}_1}{2} - \frac{\dot{a}_1}{2} = c_1(x_{1s} - x_{2s}) + c_2(x_{1s} - x_{2s})^3 \\ &= c_1 a_2 + c_2 a_2^3 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{1s} &= -4(3a_1^2 + a_1 a_3)\dot{a}_1 - (c_2 + 2 \\ &\quad + 3(c_2+1)a_2^2)\dot{a}_2 - (3 + 3a_3^2 + 2a_1^2)\dot{a}_3 \end{aligned} \tag{25}$$

上式を連立して

$$\dot{a}_1 = -2a_2 - a_2^3 - 3a_3 - a_3^3 - 4a_1^3 - 2a_1^2 a_3 \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_2 &= -(2+2c_1)a_2 - (1+2c_2)a_2^3 - 3a_3 \\ &\quad - a_3^3 - 4a_1^3 - 2a_1^2 a_3 \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_3 &= \frac{1}{-(3+3a_3^2+2a_1^2)}\{\ddot{x}_1 + (c_1 + 2 \\ &\quad + 3(c_1+1)a_2^2)\dot{a}_2 + 4(3a_1^2 + a_1 a_3)\dot{a}_1\} \\ &= \frac{1}{-(3+3a_3^2+2a_1^2)}\{-c_3(x_{1s} - x_{2s}) \\ &\quad - c_4(x_{1s} - x_{2s})^3 + c_5 u + (c_1 + 2 \\ &\quad + 3(c_1+1)a_2^2)\dot{a}_2 + 4(3a_1^2 + a_1 a_3)\dot{a}_1\} \\ &= \frac{1}{-(3+3a_3^2+2a_1^2)}\{-c_3 a_2 - c_4 a_2^3 + c_5 u \\ &\quad + (c_1 + 2 + 3(c_1+1)a_2^2)\dot{a}_2 \\ &\quad + 4(3a_1^2 + a_1 a_3)\dot{a}_1\} \\ &= v \end{aligned} \tag{28}$$

整理すると

$$\begin{aligned}\dot{a} = \begin{bmatrix}\dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \dot{a}_3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & -2 & -3 \\ 0 & -2(c_1+1) & -3 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 \\ a_2 \\ a_3\end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1^2 \\ a_1 a_2 \\ a_1 a_3 \\ a_2^2 \\ a_2 a_3 \\ a_3^2\end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix}-4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -(1+2c_2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix}0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1^3 \\ a_1^2 a_2 \\ a_1^2 a_3 \\ a_1 a_2^2 \\ a_1 a_2 a_3 \\ a_1 a_3^2 \\ a_2^3 \\ a_2^2 a_3 \\ a_2 a_3^2 \\ a_3^3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix} v \end{aligned}$$

$$= A_{G<1,3>} G^{<3>}(a) + Bv \tag{29}$$

$$v = -R^{-1} B^T P_{G<1,3>} G^{<3>}(a) \tag{30}$$

このシステムについては、GA で解を見つけることができた。(28) 式から (u と v の関係)u について整理し、$u(a_1, a_2, a_3)$ を $u(x_{1s}, x_{2s}, \dot{x}_{1s})$ へもどしてやり、この u を X システムに用いてシミュレーションをする。

A システムについて GA をして求まった $P_{G<1,3>}$ は、

$$\begin{aligned}P_{G<1,3>} = &\begin{bmatrix}15.084707 & -9.352079 & -1.938935 \\ -9.352079 & 15.379049 & -0.086860 \\ -1.938935 & -0.086860 & 16.629038\end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix}-3.108627 & -2.640199 & 3.788145 & 2.294327 \\ -1.320099 & 4.588654 & -4.191762 & -6.613920 \\ 1.894073 & -4.191762 & -0.925299 & 2.756572\end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix}-4.191762 & -0.462650 & 19.697646 & -27.839636 \\ 5.513145 & 0.257121 & -9.279879 & 38.712556 \\ 0.514243 & -4.964546 & -4.245849 & -3.781320\end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix}-12.737547 & 38.712556 & -7.562639 & 30.047615 \\ -3.781320 & 1.211564 & -3.991077 & -1.825066 \\ 30.047615 & -1.995538 & -3.650131 & 2.615348\end{bmatrix} \\ &\begin{bmatrix}0.403855 & -1.995538 & -1.825066 & 0.871783 \\ 16.419501 & -3.975420 & 42.108795 & 0.162099 \\ -1.325140 & 42.108795 & 0.486296 & 10.532609\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{31}$$

ただし,$P_{G<1,3>}$ の要素の探索範囲は-30.0 から 30.0 までとする.

X システムでの M, K_1, D, K_3 は次のように設定する.

$$M = 1.0, K_1 = 0.1, D = 0.1, K_3 = 0.15 \tag{32}$$

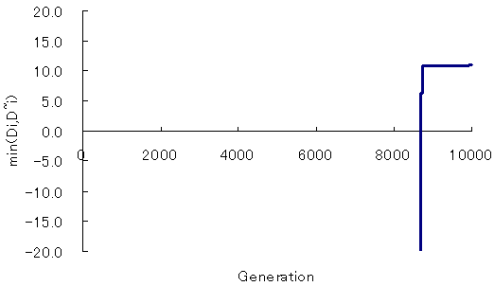

Fig. 3　Behavior of min(Di) in genetic algorithm

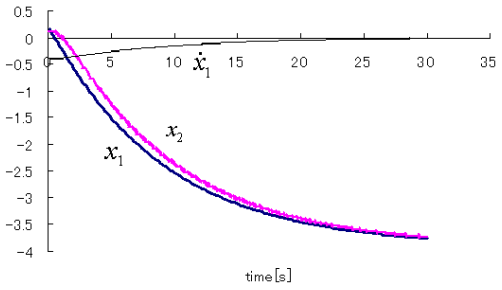

Fig. 4　State response without control

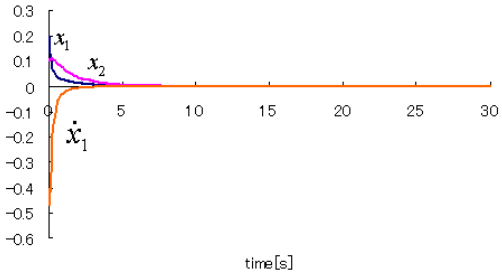

Fig. 5　State response with control

7.　おわりに

3 変数 3 次元のマスバネダンパー系のモデルを設けて, 遺伝的アルゴリズムを用いた最適値探索を行った. その結果, 得られた解を用いることによって, 非線形レギュレータを設計できることを確認した. また, テンソルの縮約形を導入することによって, 非線形システムを線形システムのように扱える. 行列 P_G を求めるのに, 遺伝的アルゴリズムを使うことによって, 多項式非線形制御系を安定化制御できることを確認した.

今後の課題は, この理論の多変数への応用だが, 現在行っている方法では変数が多くなる毎に, 評価する主座小行列式の数が多くなり, 全てを正にすることが困難となる. そのため, より効果的に評価値を得られるように評価方法の改善を行うことである.

参考文献

1) 大久保重範：非線形レギュレータの遺伝的アルゴリズムによる設計, 計測自動制御学会論文集,**33**-11,1072/1080(1997)
2) 大久保重範：非線形システムのべき状態フィードバックによる直接的な安定化制御, 計測自動制御学会論文集,**34**-11,1596/1602(1998)
3) 安居院猛, 長尾智晴：ジェネティックアルゴリズム, 昭晃堂 (1993)