計測自動制御学会東北支部 第231回研究集会 (2006.10.31)
資料番号 231-18

非線形むだ時間系のモデル追従形制御系の一設計法

A Design of Model Following Control System for Nonlinear System with Time Delays

○王 大中*，大久保 重範*，秋山 孝夫*，及川 一美*，高橋 達也*

○Dazhong Wang*, Shigenori Okubo*, Takao Akiyama*, Kazumi Oikawa*, Tatuya Takahashi*

*山形大学 工学部

*Faculty of Engineering Yamagata University

キーワード： 非線形 (nonlinear)，むだ時間(time delays)，安定性 (stable), 外乱 (disturbances)，モデル追従 (model following)

連絡先： 〒992-8510 山形県米沢市城南四丁目3-16 山形大学 工学部 機械システム工学科 大久保研究室
大久保 重範,Tel.: (0238)26-3245，Fax.: (0238)26-3245，E-mail: sokubo@yz.yamagata-u.ac.jp
王 大中，Tel.: (0238)26-3245，Fax.: (0238)26-3245，E-mail: wdzh168@hotmail.com

1. はじめに

非線形むだ時間系のモデル追従形制御系の設計は秋山[1)]が線形系の提案した方法を拡張し，非線形むだ時間系のモデル追従形制御系の研究はまだ少なく不十分である．線形系の場合内部状態の有界性はシステム行列が安定な特性根を持つことに帰着されるが，非線形系の場合その形にも依存する．本稿では非線形部($f(v(t))$)を$||f(v(t)) \leqq \alpha+\beta||v(t)||^{\gamma}$として捉え，$\gamma$の大きさによって二つの場合($0 \leqq \gamma < 1, \gamma \geq 1$)に分け，有界性を示す.

最後に，具体的な数値例に基づき，外乱が存在する場合でも制御対象の出力は参照モデルに漸近的に追従することを確認

2. 問題の設定

制御対象と参照モデルは(1)–(5)式とする．

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t-h_i) + \sum_{i=0}^{k} B_i u(t-h_i) + B_f f(v(t)) + d(t) \qquad (1)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{k} C_i x(t-h_i) + d_0(t) \qquad (2)$$

$$v(t) = \sum_{i=0}^{k} C_{fi} x(t-h_i) \qquad (3)$$

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r_m(t) \qquad (4)$$

$$y_m(t) = C_m x_m(t) \qquad (5)$$

ここで,$x(t)$は状態変数，$u(t)$は制御入力，$y(t)$は制御対象の出力，$v(t)$は補助出力，$f(v(t))$は既知の非線形部，$d(t)$と$d_0(t)$は有界な外乱，$h_i(0 = h_0 < h_1 < \cdots < h_k)$はむだ時間である．$x_m(t)$，$r_m(t)$，$y_m(t)$はそれぞれ参照モデルに関する状態変数，参照入力，参照出力である。A_i,B_i,C_i,B_f,$C_{fi}t$およびA_m,B_m,C_mは適当な次元の定数行列である。また，制御対象と参照モデルの出力誤差は次式で与える。

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \qquad (6)$$

この設計においては，内部状態がすべて有界に保持され，初期値関数$x(t) = x_0(t)$,$(t \leqq 0)$;$u(t) = u_0(t)$,

$(t \leqq 0)$に対し，$t \to \infty$で$e(t) \to 0$にするような非線形系のモデル追従形制御系の設計法を示す。

3. 制御系の設計

記述を簡単にするために$p = d/dt$とおき，以下のような時間遅れ作用素ベクトルσを用いる．

$$\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k)^T \tag{7}$$

$$\sigma_i = e^{-ph_i} \tag{8}$$

$$\sigma_i x(t) = x(t - h_i) \tag{9}$$

これより，(1),(2),(3)式は(10),(11),(12)式のように簡単な記述で表すことができる．

$$\dot{x}(t) = A(\sigma)x(t) + B(\sigma)u(t) + B_f f(v(t)) + d(t) \tag{10}$$

$$y(t) = C(\sigma)x(t) + d_0(t) \tag{11}$$

$$v(t) = C_f(\sigma)x(t) \tag{12}$$

ここで，

$$A(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} A_i\sigma_i, B(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} B_i\sigma_i,$$
$$C(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} C_i\sigma_i, C_f(\sigma) = \sum_{i=0}^{k} C_{fi}\sigma_i$$

$y(t)$,$y_m(t)$と$v(t)$は(13),(14)と(15)式で示す．

$$y(t) = C(\sigma)[pI - A(\sigma)]^{-1}B(\sigma)u(t) + C(\sigma)[pI - A(\sigma)]^{-1}B_f f(v(t)) + C(\sigma)[pI - A(\sigma)]^{-1}d(t) + d_0(t) \tag{13}$$

$$y_m(t) = C_m[pI - A_m]^{-1}B_m r_m(t) \tag{14}$$

$$v(t) = C_f(\sigma)[pI - A(\sigma)]^{-1}B(\sigma)u(t) + C_f(\sigma)[pI - A(\sigma)]^{-1}B_f f(v(t)) + C_f(\sigma)[pI - A(\sigma)]^{-1}d(t) \tag{15}$$

ここで，

$$C(\sigma)[pI - A(\sigma)]^{-1}B(\sigma) = \frac{N(\sigma,p)}{D(\sigma,p)} \tag{16}$$

$$C(\sigma)[pI - A(\sigma)]^{-1}B_f = \frac{N_f(\sigma,p)}{D(\sigma,p)} \tag{17}$$

$$C_m[pI - A_m]^{-1}B_m = \frac{N_m(p)}{D_m(p)} \tag{18}$$

とする.ただし，$D(\sigma,p) = |pI - A(\sigma)|$,$D_m(p) = |pI - A_m|$である.$D_m(p)$は安定多項式である.(13)と(14)式より，(19)と(20)式が得られる．

$$D(\sigma,p)y(t) = N(\sigma,p)u(t) + N_f(\sigma,p)f(v(t)) + w(t) \tag{19}$$

$$D_m(p)y_m(t) = N_m(p)r_m(t) \tag{20}$$

外乱はまとめて(21)式になる．

$$w(t) = C(\sigma)adj[pI - A(\sigma)]d(t) + D(\sigma,p)d_0(t) \tag{21}$$

$N(\sigma,p)$，$N_f(\sigma,p)$と$N_m(p)$は(22),(23)と(24)式で与えられる．

$$N(\sigma,p) = C(\sigma)adj[pI - A(\sigma)]B(\sigma) \tag{22}$$

$$N_f(\sigma,p) = C(\sigma)adj[pI - A(\sigma)]B_f \tag{23}$$

$$N_m(p) = C_m adj[pI - A_m]B_m \tag{24}$$

設計の都合上，$N(\sigma,p)$，$N_f(\sigma,p)$，$N_m(p)$を以下(25),(26),(27),(28)式のようにする．

$$N(\sigma,p) = diag(p^{\eta_i})N_r(\sigma) + \tilde{N}(\sigma,p) \tag{25}$$

$$N_r(\sigma) = \overline{N}_r(\sigma) + \hat{N}_r \tag{26}$$

$$N_f(\sigma,p) = diag(p^{\eta_{fi}})N_{fr}(\sigma) + \tilde{N}_f(\sigma,p) \tag{27}$$

$$N_m(p) = diag(p^{\eta_{mi}})N_{mr} + \tilde{N}_m(p) \tag{28}$$

ここで，$(i = 0, 1, \cdots, l)$，$\partial_{ri}\tilde{N}(\sigma,p) < \eta_i$，$\partial_{ri}\tilde{N}_f(\sigma,p) < \eta_{fi}$,$\partial_{ri}\tilde{N}_m(p) < \eta_{mi}$($\partial_{ri}(\bullet)$は$(\bullet)$の各行の$p$に関する最低次数を表す)である．$\overline{N}_r(\sigma)$の各行の$\sigma$についての最低次数は1である．$\hat{N}_r$は$l \times l$の定数行列であり,$|\hat{N}_r| \neq 0$であるとする．$\partial D_d(p) = n_d$とする．よって(29)式が成り立つ.$w(t)$は(30)式を満たす.

$$D_d(p)d(t) = 0, D_d(p)d_0(t) = 0 \tag{29}$$

$$D_d(p)w(t) = 0 \tag{30}$$

次に，ρ次$(\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \eta_i)$のモニックで安定な多項式$T(p)$を選び，次の方程式より$R(\sigma,p)$,

$S(\sigma,p)$を求める.

$$T(p)D_m(p) = D_d(p)D(\sigma,p)R(\sigma,p) + S(\sigma,p) \quad (31)$$

ここで，各多項式の次数は，$\partial T(p) = \rho$,$\partial D_m(p) = n_m$,$\partial D_d(p) = n_d$,$\partial D(\sigma,p) = n$,$\partial R(\sigma,p) = \rho + n_m - n_d - n$,$\partial S(\sigma,p) \leqq n_d + n - 1$である．つぎに(31)式を用いて誤差$e(t)$にかけると(32)式が得られる.

$$\begin{aligned} D(p)D_m(p)e(t) &= D_d(p)D(\sigma,p)R(\sigma,p)y(t) \\ &+S(\sigma,p)y(t) - T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (32) \end{aligned}$$

すなわち，

$$\begin{aligned} e(t) = \frac{1}{T(p)D_m(p)}\{&[D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,p) \\ &-Q(p)N_r(\sigma)]u(t) \\ &+D_d(p)R(\sigma,p)N_f(\sigma,p)f(v(t)) \\ &+Q(p)N_r(\sigma)u(t) + S(\sigma,p)y(t) \\ &-T(p)N_m(p)r_m(t)\} \quad (33) \end{aligned}$$

$Q(p)$は$|Q(p)|$が安定な多項式であるような多項式行列であり，(34)と(35)式のように表す.

$$Q(p) = diag(p^{\rho+n_m-n+\eta_i}) + \widetilde{Q}(p) \quad (34)$$

$$\partial_{ri}\widetilde{Q}(p) < \rho + n_m - n + \eta_i \quad (35)$$

(33)式の右辺をゼロにするように，$u(t)$は下のようになる.

$$\begin{aligned} u(t) = &-\widehat{N}_r^{-1}\overline{N}_r(\sigma)u(t) \\ &-\widehat{N}_r^{-1}Q^{-1}(p)\{D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,p) \\ &-Q(p)N_r(\sigma)\}u(t) \\ &-\widehat{N}_r^{-1}Q^{-1}(p)D_d(p)R(\sigma,p)N_f(\sigma,p)f(v(t)) \\ &-\widehat{N}_r^{-1}Q^{-1}(p)S(\sigma,p)y(t) \\ &+\widehat{N}_r^{-1}Q^{-1}(p)T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (36) \end{aligned}$$

式(36)の各行列要素の分数式properであるためには，以下の条件を満足しなければならない($i = 1,2,\cdots,l$):$\rho \geq n_d + 2n - n_m - 1 - \eta_i$,$n_m - \eta_{mi} \geq n - \eta_i$,$\eta_i \geq \eta_{fi}$．(36)式の制御入力は(33)式をゼロにする．すなわち，$e(t) \to 0 (t \to \infty)$．制御系を構成する内部状態が有界であれば，モデル追従形制御系が実現できる.

4. 内部状態の有界性の証明

状態空間表示を使って$u(t)$を表すために次のような状態変数を導入する.

$$\begin{aligned} u(t) = &-E_0(\sigma)u(t) - H_1(\sigma)\xi_1(t) \\ &-E_2(\sigma)y(t) - H_2(\sigma)\xi_2(t) \\ &-E_3(\sigma)f(v(t)) - H_3(\sigma)\xi_3(t) \\ &+E_4 r_m(t) + H_4\xi_4(t) \quad (37) \end{aligned}$$

ここで，$u_m(t) = E_4 r_m(t) + H_4\xi_4(t)$である.

$\xi_1(t)$,$\xi_2(t)$,$\xi_3(t)$,$\xi_4(t)$は次の状態である.

$$\dot{\xi}_1(t) = F_1\xi_1(t) + G_1 u(t) \quad (38)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = F_2\xi_2(t) + G_2 y(t) \quad (39)$$

$$\dot{\xi}_3(t) = F_3\xi_3(t) + G_3 f(v(t)) \quad (40)$$

$$\dot{\xi}_4(t) = F_4\xi_4(t) + G_4 r_m(t) \quad (41)$$

多項式とシステム行列の間には次の関係がある.

$$E_0(\sigma) = \widehat{N}_r^{-1}\overline{N}_r(\sigma) \quad (42)$$

$$\begin{aligned} &H_1(\sigma)[pI - F_1]^{-1}G_1 = \widehat{N}_r^{-1}Q^{-1}(p)* \\ &\quad \{D_d(p)R(\sigma,p)N(\sigma,p) - Q(p)N_r(\sigma)\} \quad (43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E_2(\sigma) + H_2(\sigma)[pI - F_2]^{-1}G_2 \\ &\quad = \widehat{N}_r^{-1}Q^{-1}(p)S(\sigma,p) \quad (44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E_3(\sigma) + H_3(\sigma)[pI - F_3]^{-1}G_3 \\ &\quad = \widehat{N}_r^{-1}Q^{-1}(p)D_d(p)R(\sigma,p)N_f(\sigma,p) \quad (45) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E_4(\sigma) + H_4(\sigma)[pI - F_4]^{-1}G_4 \\ &\quad = \widehat{N}_r^{-1}Q^{-1}(p)T(p)N_m(p) \quad (46) \end{aligned}$$

ここでは$|pI - F_i| = |Q(p)| (i = 1,2,3,4)$である．さらに,外部信号$u_m$は(47)式で与えられる.

$$u_m(t) = \widehat{N}_r^{-1}Q^{-1}(p)T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (47)$$

制御系全体の挙動は次のように記述される．

$$E\dot{z}(t) = A_s(\sigma)z(t) + B_s(\sigma)f(v(t)) + d_s(t) \tag{48}$$

$$y(t) = C(\sigma)x(t) + d_0(t) \tag{49}$$

$$v(t) = C_s(\sigma)z(t) \tag{50}$$

ここで，$z^T(t) = [x^T(t), \xi_1^T(t), \xi_2^T(t), \xi_3^T(t), u^T(t)]^T$，$C_s(\sigma) = [C_f(\sigma), 0, 0, 0, 0]$である．$E$,$A_s(\sigma), B_s(\sigma)$と$d_s(t)$の内容は(51),(52),(53)と(54)式を対応させることにより明らかである．

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$A_s(\sigma) = \begin{bmatrix} A(\sigma) - B(\sigma)E_2(\sigma)C(\sigma) & -B(\sigma)H_1(\sigma) & -B(\sigma)H_2(\sigma) & -B(\sigma)H_3(\sigma) & -B(\sigma)E_0(\sigma) \\ -G_1E_2(\sigma)C(\sigma) & F_1 - G_1H_1(\sigma) & -G_1H_2(\sigma) & -G_1H_3(\sigma) & -G_1E_0(\sigma) \\ G_2C(\sigma) & 0 & F_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_3 & 0 \\ -E_2(\sigma)C(\sigma) & -H_1(\sigma) & -H_2(\sigma) & -H_3(\sigma) & -I - E_0(\sigma) \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$B_s(\sigma) = \begin{bmatrix} B_f - B(\sigma)E_3(\sigma) \\ -G_1E_3(\sigma) \\ 0 \\ G_3 \\ -E_3(\sigma) \end{bmatrix} f(v(t)) \tag{53}$$

$$d_s(t) = \begin{bmatrix} B(\sigma) \\ G_1 \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} u_m(t) + \begin{bmatrix} d(t) - B(\sigma)E_2(\sigma)d_0(t) \\ -G_1E_2(\sigma)d_0(t) \\ G_2d_0(t) \\ 0 \\ -E_2(\sigma)d_0(t) \end{bmatrix} \tag{54}$$

この系$d_s(t)$が有界であるので，内部状態の有界性は$z_s(t)$の有界性を示すことである．非線形部を$f(v(t))$の形は$||f(v(t))|| \leqq \alpha + \beta||v(t)||^{\gamma}$である．なかに，$\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$,ベクトルノルム$|| \bullet ||$はユークリッドノルムである．本研究では二つの場合について内部状態の有界性を証明する．すなわち,$0 \leqq \gamma < 1$の場合と$\gamma \geq 1$の場合である

4.1 $1 > \gamma \geq 0$の場合の内部状態の有界性の証明

$A_s(\sigma)$は(52)式で与えられ，その特性多項式は(55)式になる[1)]．

$$|pE - A_s(\sigma)| = |\widehat{N}_r|^{-1}T(p)^l D_m(p)^l * |Q(p)|^2 V_s(\sigma, p) \tag{55}$$

$A_s(\sigma)$は安定なシステム行列である[1)]．(48)式から,適当な正則変換$z(t) = Y\overline{z}(t)$と適当な正則変換行列Xを使えば，(56)式がある．

$$E\dot{\overline{z}}(t) = XA_s(\sigma)Y\overline{z}(t) + XB_s(\sigma)f(v(t)) + Xd_s(t) \tag{56}$$

ここで，

$$E = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, XA_s(\sigma)Y = \begin{bmatrix} A_{s1}(\sigma) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$
$$\overline{z}(t) = \begin{bmatrix} \overline{z}_1(t) \\ \overline{z}_2(t) \end{bmatrix}, XB_s(\sigma) = \begin{bmatrix} B_{s1}(\sigma) \\ B_{s2}(\sigma) \end{bmatrix}$$
$$Xd_s(t) = \begin{bmatrix} d_{s1}(t) \\ d_{s2}(t) \end{bmatrix} \tag{57}$$

すなわち，

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\overline{z}}_1(t) \\ \dot{\overline{z}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{s1}(\sigma) & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{z}_1(t) \\ \overline{z}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{s1}(\sigma) \\ B_{s2}(\sigma) \end{bmatrix} f(v(t)) + \begin{bmatrix} d_{s1}(t) \\ d_{s2}(t) \end{bmatrix} \tag{58}$$

である．(58)式は(59)，(60)のように書き分けることができる．

$$\dot{\overline{z}}_1(t) = A_{s1}(\sigma)\overline{z}_1(t) + B_{s1}(\sigma)f(v(t)) + d_{s1}(t) \tag{59}$$

$$\overline{z}_2(t) = -B_{s2}(\sigma)f(v(t)) - d_{s2}(t) \tag{60}$$

である．(57)，(58)式より

$$|X||pE-A_s(\sigma)||Y|=\xi|pE-A_{s1}(\sigma)| \quad (61)$$

が得られる．ξは定数である．これより，$A_s(\sigma)$は安定なシステム行列であるから,$A_{s1}(\sigma)$も安定なシステム行列であること分かる．$z_1(t)$の二次形式を(62)式になる．

$$\begin{aligned} &V(t,t-h_1,\cdots,t-h_k) \\ &\quad = \frac{1}{2}\overline{z}_1^T(t)P_{s1}(\sigma)\overline{z}_1(t) \end{aligned} \quad (62)$$

(62)式を使って,(63)式となる．

$$\begin{aligned} &\dot{V}(t,t-h_1,\cdots,t-h_k) \\ &\quad = -\frac{1}{2}\overline{z}_1^T(t)Q_{s1}\overline{z}_1(t)+\overline{z}_1^T(t)P_{s1}(\sigma)d_{s1}(t) \\ &\quad +\overline{z}_1^T(t)P_{s1}(\sigma)B_{s1}(\sigma)f(v(t)) \end{aligned} \quad (63)$$

$P_{s1}(\sigma)$,Q_{s1}は正定対称行列のLyapunov方程式$A_{s1}^T(\sigma)P_{s1}(\sigma)+P_{s1}(\sigma)A_{s1}(\sigma)=-Q_{s1}$を使う．

$$\begin{aligned} &V(t,t-h_1,\cdots,t-h_k) \\ &\quad \leqq -q_1V(t,t-h_1,\cdots,t-h_k)+q_2 \end{aligned} \quad (64)$$

得られる．ですから，(65)式になる[2]．

$$\begin{aligned} &V(t,t-h_1,\cdots,t-h_k) \\ &\quad \leqq \frac{q_1}{q_2}+V(0,-h_1,\cdots,-h_k) \end{aligned} \quad (65)$$

正定数q_1,q_2が存在する．(59)式より，$\overline{z}_1$は有界である．(60)式より，$B_{s2}(\sigma)f(v(t))$と$d_{s2}(t)$は有界から，$\overline{z}_2(t)$有界である．さらに(57)式から$\overline{z}(t)$が有界である．$z(t)$も有界である．よって次の定理を得る．

定理 1 $z(t)\in R^m$,$v(t)\in R_f^l$,$f(v(t))\in R_f^l$,$d_0(t)$,$d(t)$は有界な外乱とし，$A(\sigma)\in R^n\times n$は安定なシステム行列とする，$||f(v(t))|| \leqq \alpha+\beta||v(t)||^r$,($\alpha\geq 0$,$\beta\geq 0$,$0\leqq\gamma<1$)を満たせば,

$$E\dot{z}(t)=A(\sigma)z(t)+B(\sigma)f(v(t))+d(t) \quad (66)$$

$$v(t)=C(\sigma)z(t)+d_0(t) \quad (67)$$

の系で$z(t)$，$v(t)$は有界である．

証明：本文参照．

4.2 $\gamma\geq 1$の場合の内部状態の有界性の証明

Kalmanの正準構造及び適当な正則変換を使えば,

$$\overline{z}(t)=\begin{bmatrix}\overline{z}_1(t)\\ \overline{z}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\overline{z}}_1(t)\\ \overline{z}_2(t)\end{bmatrix} \quad (68)$$

である．ですから,(69)式になる．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}I & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\overline{z}}_1(t)\\ \overline{z}_2(t)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}\overline{A}_{s1}(\sigma) & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\overline{z}}_1(t)\\ \overline{z}_2(t)\end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix}\overline{B}_{s1}(\sigma)\\ B_{s2}(\sigma)\end{bmatrix}f(v(t))+\begin{bmatrix}\overline{d}_{s1}(t)\\ d_{s2}(t)\end{bmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

すなわち,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}I&0&0&0&0\\0&I&0&0&0\\0&0&I&0&0\\0&0&0&I&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\overline{z}}_{11}(t)\\ \overline{\overline{z}}_{12}(t)\\ \overline{\overline{z}}_{13}(t)\\ \overline{\overline{z}}_{14}(t)\\ \overline{z}_2(t)\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\overline{A}_{11}(\sigma)&\overline{A}_{12}(\sigma)&\overline{A}_{13}(\sigma)&\overline{A}_{14}(\sigma)&0\\0&\overline{A}_{22}(\sigma)&0&\overline{A}_{24}(\sigma)&0\\0&0&\overline{A}_{33}(\sigma)&\overline{A}_{34}(\sigma)&0\\0&0&0&\overline{A}_{44}(\sigma)&0\\0&0&0&0&I\end{bmatrix} \\ &* \begin{bmatrix}\overline{\overline{z}}_{11}(t)\\ \overline{\overline{z}}_{12}(t)\\ \overline{\overline{z}}_{13}(t)\\ \overline{\overline{z}}_{14}(t)\\ \overline{z}_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{B}_1(\sigma)\\ \overline{B}_2(\sigma)\\ 0\\ 0\\ B_{s2}(\sigma)\end{bmatrix}f(v(t))+\begin{bmatrix}\overline{d}_{s11}(t)\\ \overline{d}_{s12}(t)\\ \overline{d}_{s13}(t)\\ \overline{d}_{s14}(t)\\ d_{s2}(t)\end{bmatrix} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \begin{bmatrix}0 & \overline{C}_2(\sigma) & 0 & \overline{C}_4(\sigma) & \overline{C}_5(\sigma)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{\overline{z}}_{11}(t)\\ \overline{\overline{z}}_{12}(t)\\ \overline{\overline{z}}_{13}(t)\\ \overline{\overline{z}}_{14}(t)\\ \overline{z}_2(t)\end{bmatrix} \\ &= \overline{C}_2(\sigma)\overline{\overline{z}}_{12}(t)+\overline{C}_4(\sigma)\overline{\overline{z}}_{14}(t)+\overline{C}_5(\sigma)\overline{z}_2(t) \end{aligned} \quad (71)$$

$\overline{A}_{11}(\sigma)$，$\overline{A}_{22}(\sigma)$，$\overline{A}_{33}(\sigma)$，$\overline{A}_{44}(\sigma)$は安定なシステム行列である．従って，$\overline{\overline{z}}_{13}$，$\overline{\overline{z}}_{14}(t)$が有界である．(60)式より，$\overline{z}_2(t)$が有界である．(70)式より，$\overline{\overline{z}}_{12}(t)$が有界ければ，$\overline{\overline{z}}_{11}(t)$有界性がある．$\overline{\overline{z}}_{12}(t)$,

$v(t)$について，まとめれば(72),(73)になる．$f(v(t))$から$v(t)$までの伝達特性は(74)式になる．

$$\dot{\overline{\overline{z}}}_{12}(t) = \overline{A}_{22}(\sigma)\overline{\overline{z}}_{12}(t) + \overline{B}_2(\sigma)f(v(t)) + \overline{A}_{24}(\sigma)\overline{\overline{z}}_{14}(t) + d_{s2}(t) \quad (72)$$

$$v(t) = \overline{C}_2(\sigma)\overline{\overline{z}}_{12}(t) + \overline{C}_5(\sigma)\overline{z}_2(t) + \overline{C}_4(\sigma)\overline{\overline{z}}_{14}(t) \quad (73)$$

$$= H(p)f(v(t)) + \overline{\overline{d}}_v(t) \quad (74)$$

ここで，

$$H(p) = \overline{C}_2(\sigma)[pI - \overline{A}_{22}(\sigma)]^{-1}\overline{B}_2(\sigma) - \overline{C}_5(\sigma)B_{s2}(\sigma) \quad (75)$$

$$\overline{\overline{d}}_v(t) = \overline{C}_2(\sigma)[pI - \overline{A}_{22}(\sigma)]^{-1}\overline{d}_2(t) - \overline{C}_5(\sigma)d_{s2}(t) + \overline{C}_4(\sigma)\overline{\overline{z}}_{14}(t) \quad (76)$$

$\overline{\overline{d}}_v(t)$有界である．$H(p)$は(13)式に(36)式を代入し，(15)式に代入すれば$A(\sigma), B(\sigma), C(\sigma), B_f, C_f(\sigma)$で書下すことができ，(77)式になる[3]．

$$H(p) = \begin{bmatrix} C_f(\sigma) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} pI - A(\sigma) & -B(\sigma) \\ -C(\sigma) & 0 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} B_f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (77)$$

補題 1 内部状態の有界性を保証するため(74)式の$H(p)$,$f(v(t))$の最高次数の項に次の条件を付ける．
条件1:$H(p)$は正実である．
条件2:$f(v(t)) = f_1(v(t)) - A_{2k-1}(\sigma)v(t)^{[2k-1]}$;
$||f_1(v(t))|| \leqq \alpha_1 + \beta_1||v(t)||^{\gamma_1}$;
$v^T(t)A_{2k-1}(\sigma)v(t)^{[2k-1]} > 0$,$(v(t) \neq 0)$.$k$は1以上の整数で,$v(t)^{[2k-1]}$は$v(t)$の$(2k-1)$次のクロネッカー積，$\alpha_1 \geq 0$，$\beta_1 \geq 0$，$0 \leqq \gamma_1 < (2k-1)$である．

$$\hat{v}(t) = v(t) - \overline{\overline{d}}_v(t) \quad (78)$$

$$\hat{v}(t) = H(p)\hat{f}(\hat{v}(t)) \quad (79)$$

$f(v(t))$と$\hat{f}(\hat{v}(t))$の性質は同じである．すなわち，

$$\hat{f}(\hat{v}(t)) = \hat{f}_1(\hat{v}(t)) - A_{2k-1}(\sigma)\hat{v}(t)^{[2k-1]} \quad (80)$$

$$||\hat{f}_1(\hat{v}(t))|| \leqq \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1||\hat{v}(t)||^{\hat{\gamma}_1} \quad (81)$$

$$\hat{v}^T(t)A_{2k-1}(\sigma)\hat{v}(t)^{[2k-1]} > 0, (\hat{v}(t) \neq 0) \quad (82)$$

kは1以上の整数で,$\hat{v}(t)^{[2k-1]}$は$\hat{v}(t)$の$(2k-1)$次のクロネッカー積，$\hat{\alpha}_1 \geq 0$，$\hat{\beta}_1 \geq 0$，$0 \leqq \hat{\gamma}_1 < (2k-1)$である．

証明:文献2参考．．

$H(p)$が正実となるように，補題1より，(72),(73)式の状態空間実現は(83),(84)式になる．

$$\dot{\hat{z}}_{12}(t) = \overline{A}_{22}(\sigma)\hat{z}_{12}(t) + \overline{B}_2(\sigma)\hat{f}(\hat{v}(t)) \quad (83)$$

$$\hat{v}(t) = \overline{C}_2(\sigma)\hat{z}_{12}(t) - C_5(\sigma)B_{s2}(\sigma)\hat{f}(\hat{v}(t)) \quad (84)$$

次の目的は内部状態$\hat{z}_{12}(t)$及び$\hat{v}(t)$の有界性を示す．$H(p)$が正実より，Kalman-Yakubovichの補助定理[4]，

$$\overline{P}_2(\sigma)\overline{A}_{22}(\sigma) + \overline{A}_{22}^T(\sigma)\overline{P}_2(\sigma) = -\overline{Q}_2 \quad (85)$$

$$\overline{B}_2^T(\sigma)\overline{P}_2(\sigma) = \overline{C}_2(\sigma) \quad (86)$$

$$C_5(\sigma)B_{s2}(\sigma) + (C_5(\sigma)B_{s2}(\sigma))^T = L^T L \quad (87)$$

が成立する．ここで$\overline{P}_2(\sigma)$は正定対称行列，$\overline{Q}_2$は準正定対称行列である．Lは通常の行列である．(87)式に対して，$\hat{f}(\hat{v}(t))$の二次形式を取る．

$$\hat{f}^T(\hat{v}(t))(C_5(\sigma)B_{s2}(\sigma))^T\hat{f}(\hat{v}(t)) \leqq 0 \quad (88)$$

Lyapunov関数の候補を

$$V(t, t-h_1, \cdots, t-h_k) = \frac{1}{2}\hat{z}_{12}^T(t)\overline{P}_2(\sigma)\hat{z}_{12}(t) > 0 \quad (89)$$

とおく，ただし，$\hat{z}_{12}(t) \neq 0$とする．つぎのように$\dot{V}(t, t-h_1, \cdots, t-h_k)$が求められる．

$$\dot{V}(t, t-h_1, \cdots, t-h_k) = -\frac{1}{2}\hat{z}_{12}^T(t)\overline{Q}_2\hat{z}_{12}(t) + \hat{z}_{12}^T(t)\overline{P}_2(\sigma)\overline{B}_2(\sigma)\hat{f}(\hat{v}(t)) \quad (90)$$

よって，(91)式になる．そして，(92)式になる[2]．

$$\dot{V}(t, t-h_1, \cdots, t-h_k) \leqq \hat{z}_{12}^T(t)\overline{P}_2(\sigma)\overline{B}_2(\sigma)\hat{f}(\hat{v}(t)) = \hat{z}_{12}^T(t)\overline{C}_2^T(\sigma)\hat{f}(\hat{v}(t))$$

$$= [\hat{v}(t)C_5(\sigma)B_{s2}(\sigma)\hat{f}(\hat{v}(t))]^T\hat{f}(\hat{v}(t))$$

$$= \hat{v}(t)\hat{f}(\hat{v}(t))$$

$$+\hat{f}^T(\hat{v}(t))(C_5(\sigma)B_{s2}(\sigma))^T\hat{f}(\hat{v}(t))$$

$$\leqq \hat{v}^T(t)\hat{f}(\hat{v}(t)) \tag{91}$$

$$\leqq \alpha_4 - \beta_4||\hat{v}(t)||^{2k} \tag{92}$$

$\alpha_4 > 0$,$\beta_4 > 0$. ですから，$\hat{z}_{12}(t)$は有限発散時間を持たない[2)]．補題1より，

$$-C_5(\sigma)B_{s2}(\sigma)\hat{f}(\hat{v}(t)) \leqq \alpha_5 + \beta_5||\hat{v}(t)||^{2k} \tag{93}$$

が得る．$-C_5(\sigma)B_{s2}(\sigma)\hat{f}(\hat{v}(t))$は$\hat{v}(t)$の有界関数である．(93)式から，$\hat{v}(t)$も有限発散時間を持たない．

以上，$\hat{z}_{12}(t)$，$\hat{v}(t)$はtの有限区間内で発散はしないことを証明した．次に，背理法により,$t \to \infty$において$\hat{v}(t)$もが有界であることを証明する．さて，$\hat{v}(t)$が$t \to \infty$で発散する仮定しよう．このとき，(84)式より，

$$||\hat{v}(t)|| \leqq ||\overline{C}_2(\sigma)|| * ||\hat{z}_{12}(t)||$$

$$+||C_5(\sigma)|| * ||B_{s2}(\sigma)|| * ||\hat{f}(\hat{v}(t))||$$

$$= ||\overline{C}_2(\sigma)|| * ||\hat{z}_{12}(t)|| + ||M|| \tag{94}$$

が成立する．$||M||$は正定数である．ですから,$\hat{z}_{12}(t)$もまた発散する．すなわち，$||\hat{v}(t)|| \to \infty$，$||\hat{z}_{12}(t)|| \to \infty(t \to \infty)$である．このとき，$\hat{v}(t)$は有限発散時間を持たず，かつ$t \to \infty$において発散するから，$s$を正定数に定め，$t{\geq}T$に対して，

$$||\hat{v}(t)||^{2k} \geq \hat{v}(T)||^{2k} \geq \alpha_4/\beta_4 + s > 0 \tag{95}$$

(92)式と(95)式より，

$$\dot{V}(t, t-h_1, \cdots, t-h_k)$$

$$\leqq \alpha_4 - \beta_4||\hat{v}(T)||^{2k}$$

$$= \alpha_4 - \beta_4(\frac{\alpha_4}{\beta_4} + s)$$

$$= -\beta_4 s < 0 \tag{96}$$

である．$t \geq T$において，$\dot{V}(t, t-h_1, \cdots, t-h_k) < 0$，$V(t, t-h_1, \cdots, t-h_k)$は非増加関数であるから，

(89)式より，

$$V(t, t-h_1, \cdots, t-h_k)$$

$$= 1/2\hat{z}_{12}^T(t)\overline{P}_2(\sigma)\hat{z}_{12}(t)$$

$$\leqq V(T, T-h_1, \cdots, T-h_k)$$

$$= 1/2\hat{z}_{12}^T(T)\overline{P}_2(\sigma)\hat{z}_{12}(T) < \infty \tag{97}$$

が得られる．よって，

$$||\hat{z}_{12}(t)|| \leqq m||\hat{z}_{12}(T)|| < \infty(m > 0) \tag{98}$$

である．これは，仮定と予盾する．ですから，$t \to \infty$で$\hat{v}(t)$が有界である．$\hat{f}(\hat{v}(t))$は$\hat{v}(t)$の有界関数であり，$\overline{A}_{22}(\sigma)$が安定なシステム行列であるから，(83)式より，$\hat{z}_{12}(t)$が有界である．$\hat{v}(t)$と$\overline{\overline{d}}_v(t)$が有界から，(78)式より，$v(t)$が有界である．$\overline{A}_{24}(\sigma)$，$\overline{\overline{z}}_{14}(t)$，$d_{s2}(t)$が有界であり，$f(v(t))$は$v(t)$の有界関数であるから，(72)式より，$\overline{\overline{z}}_{12}(t)$が有界である．$\overline{A}_{11}(\sigma)$が安定なシステム行列であり，$\overline{\overline{z}}_{12}(t)$，$\overline{\overline{z}}_{13}(t)$，$\overline{\overline{z}}_{14}(t)$，$f(v(t))$が有界であるから，(70)式より，$\overline{\overline{z}}_{11}(t)$が有界である．$\overline{\overline{z}}_{11}(t)$，$\overline{\overline{z}}_{12}(t)$，$\overline{\overline{z}}_{13}(t)$，$\overline{\overline{z}}_{14}(t)$，$\overline{z}_2(t)$，$f(v(t))$が有界であるから，$z(t) = [\overline{\overline{z}}_{11}(t), \overline{\overline{z}}_{12}(t), \overline{\overline{z}}_{13}(t), \overline{\overline{z}}_{14}(t), \overline{z}_2(t)]^T$が有界である．これを次の定理になる．

定理 2 $z(t){\in}R^m$,$v(t){\in}R_f^l$,$f(v(t)){\in}R_f^l$,$d_0(t)$,$d(t)$は有界な外乱とする．

$$E\dot{z}(t) = A(\sigma)z(t) + B(\sigma)f(v(t)) + d(t) \tag{99}$$

$$v(t) = C(\sigma)z(t) + d_0(t) \tag{100}$$

の系では，次の条件

1.$A(\sigma){\in}R^{n\times n}$は安定なシステム行列である．

2.非線形部$||f(v(t))||$は次のように書けるとする．

$$f(v(t)) = f_1(v(t)) - A_{2k-1}(\sigma)v(t)^{[2k-1]} \tag{101}$$

$$||f_1(v(t))|| \leqq \alpha_1 + \beta_1||v(t)||^{\gamma_1} \tag{102}$$

$\alpha_1 \geq 0$，$\beta_1 \geq 0$，$0 \leqq \gamma < (2k-1)$は定数*(k*は*1*以上の整数*)*である．

3.$H(p)$は正実(あるいは$H(p) \equiv 0$)

4.$v^T(t)A_{2k-1}(\sigma)v(t)^{[2k-1]} > 0, (v(t) \neq 0)$ であれば，$z(t)$，$v(t)$は有界である．

証明：本文参照．

5. 数値例

次のむだ時間($h_1 = 0.50$，$h_2 = 1.0$，$h_3 = 1.5$，$h_4 = 2.0$)を有するシステムに対し，モデル追従形制御系を計算する．

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t-h_1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t-h_2) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} f(v(t)) + \begin{bmatrix} 0 \\ d(t) \end{bmatrix} \tag{103}$$

$$v(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} x(t-h_4) \tag{104}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix} x(t-h_3) + d_0(t) \tag{105}$$

$$f(v(t)) = v(t) + 3v(t)^2 + 5v(t)^3 - 0.2v(t)^5 \tag{106}$$

また，追従モデルは以下のものを使用する．

$$\dot{x}_m(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} x_m(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r_m(t) \tag{107}$$

$$y_m(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} x_m(t) \tag{108}$$

$$r_m(t) = 4sin0.5t + 8 \tag{109}$$

シュミレーションの応答を図1に示す．応答より，$y(t)$は漸近的に$y_m(t)$に収束している事がわかる．

6. おわりに

本稿では非線形むだ時間系のモデル追従形制御系の設計を示した．むだ時間に対応する時間に関する微分作用素pを導入し，pに関する多項式行列の簡単な代数演算で制御系が設計できる．数値例を用いて，その有効性を確認した．非線形系の場合システム行列の安定性のみでは不十分である．本論文では非線形部$f(v(t))$を$||f(v(t))|| \leqq \alpha + \beta||v(t)||^\gamma$となるものとし，$0 \leqq \gamma < 1$(定理1)と$\gamma \geq 1$(定理2)場合に分け状態の有界性を示した．$0 \leqq \gamma < 1$の場合は系の非線形性が弱い場合であり，$\gamma \geq 1$の場合は多項式系非線形系のように系の非線形性強い場合である．

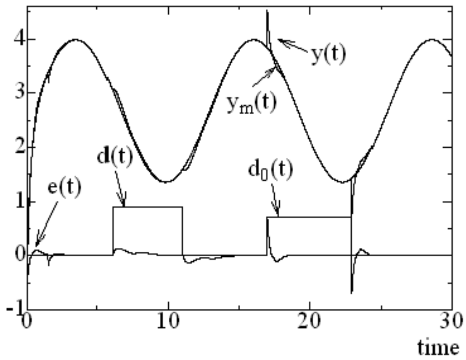

Fig. 1 Responses of the System for Nonlinear System with Time Delays.

参考文献

1) 秋山 孝夫，服部 秀郎，大久保 重範：むだ時間を含むシステムに関するモデル追従形制御系の設計，電気学会論文誌，Vol.118-c,No.4,497/502(1998)

2) 大久保 重範：外乱を考慮した非線形のモデル追従形制御系の設計,計測自動制御学会論文集，**21-**8,792/799(1985)

3) 大久保 重範：大域的に安定な多入出力非線形系のMRACS，計測自動制御学会論文集，**26-**1,46/53(1990)

4) 金井：ロバスト適応制御入門，オーム社，(1989)