

J-高速 H_∞ フィルタの追跡能力の評価Evaluation on Tracking Ability of the J-Fast H_∞ Filter

○陳 兵, 勝俣 友紀, 西山 清, 佐藤 克昌†

○Hei Chin, Tomonori Katsumata, Kiyoshi Nisiyama, Katsuaki Satou†

岩手大学, Iwate University

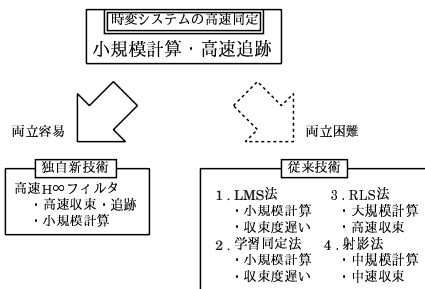
†(株) エー.アール.アイ, Amenity Research Institute

キーワード: ハイパー H_∞ フィルタ (hyper H_∞ filter), J-高速 H_∞ フィルタ (J-fast H_∞ filter)
高速アルゴリズム (fast algorithm), システム同定 (system identification)

連絡先: 〒020-8551 盛岡市上田 4-3-5 岩手大学 工学部 情報システム工学科 西山研究室
西山清, Tel.: (019)621-6475, Fax.: (019)621-6475, E-mail: nisiyama@cis.iwate-u.ac.jp

1. はじめに

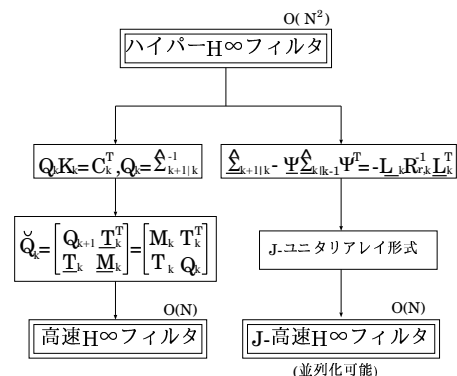
通信や制御の分野においてシステム同定が広く用いられている。特に、時変システムの同定問題はモバイル通信の普及と共にますます重要となっている [1]。しかし、従来法では追従性能と計算量を両立することは困難であった。

Fig. 1 高速 H_∞ フィルタと従来法の関係

高速 H_∞ フィルタは、西山によって提案された時変システムの同定理論から導出された適応アルゴリズムで [2]、従来法と比べて優れたトラッキング性能と外乱に対するロバスト性を兼ね備えてい

た。図 1 に高速 H_∞ フィルタと従来法の関係を示す。

また、J-ユニタリ変換を用いて、ハイパー H_∞ フィルタの新たな高速アルゴリズムである J-高速 H_∞ フィルタも導出されている [3]。J-高速 H_∞ フィルタは単位時間ステップ当たりの計算量が $O(N)$ であり、並列化が可能である。図 2 に高速 H_∞ フィルタと J-高速 H_∞ フィルタの関係を示す。

Fig. 2 高速 H_∞ フィルタと J-高速 H_∞ フィルタの導出

本研究では、J-高速 H_∞ フィルタの追跡能力に関して実際の音声信号を用いて考察する。

2. ハイパー H_∞ フィルタ

忘却係数は時変システムに対するトラッキング性能を改善するために現在広く用いられている。次に、忘却係数 ρ を H_∞ の意味で最適に決定できるハイパー H_∞ フィルタを示す。

次の状態空間モデルに対して、

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k, \mathbf{x}_k \in \mathcal{R}^N \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + v_k, \quad \mathbf{y}_k, v_k \in \mathcal{R} \quad (2)$$

$$z_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k, \quad z_k \in \mathcal{R}, \mathbf{H}_k \in \mathcal{R}^{1 \times N} \quad (3)$$

評価基準

$$\sup_{\mathbf{x}_0, \{\mathbf{w}_i\}, \{v_i\}} \frac{\sum_{i=0}^k \|e_{f,i}\|^2 / \rho}{\|\mathbf{x}_0 - \check{\mathbf{x}}_0\|_{\Sigma_0^{-1}}^2 + \sum_{i=0}^k \|\mathbf{w}_i\|^2 + \sum_{i=0}^k \|v_i\|^2 / \rho} < \gamma_f^2 \quad (4)$$

を満たす状態推定値 $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ は、次のレベル γ_f のハイパー H_∞ フィルタによって与えられる。ここで、 $\mathbf{G}_k, \mathbf{H}_k$ は既知行列とし、初期状態 \mathbf{x}_0 、システム雑音 $\{\mathbf{w}_k\}$ 、観測雑音 $\{v_k\}$ は未知外乱とし、 \mathbf{y}_k は観測信号とする。

[ハイパー H_∞ フィルタ]

$$\check{z}_{k|k} = \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k} \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{K}_{s,k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \quad (6)$$

$$\mathbf{K}_{s,k+1} = \hat{\Sigma}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T \cdot (\mathbf{H}_{k+1} \hat{\Sigma}_{k+1|k} \mathbf{H}_{k+1}^T + \rho)^{-1} \quad (7)$$

$$\hat{\Sigma}_{k+1|k} = (\hat{\Sigma}_{k|k-1} - \hat{\Sigma}_{k|k-1} [\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k^T] \cdot \mathbf{R}_{e,k}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_k \end{bmatrix} \hat{\Sigma}_{k|k-1}) / \rho \quad (8)$$

ここで、

$$e_{f,i} = \check{z}_{i|k} - \mathbf{H}_i \mathbf{x}_i, \quad \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k}$$

$$\mathbf{R}_{e,k} = \mathbf{R} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_k \\ \mathbf{H}_k \end{bmatrix} \hat{\Sigma}_{k|k-1} [\mathbf{H}_k^T \mathbf{H}_k^T]$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\rho\gamma_f^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_{0|-1} = \Sigma_0, 0 < \rho = 1 - \chi(\gamma_f) \leq 1, \gamma_f > 1 \quad (9)$$

$\chi(\gamma_f)$ は $\chi(1) = 1, \chi(\infty) = 0$ を満たす γ_f の単調減衰関数であり、駆動行列 \mathbf{G}_k は次のように生成される。

$$\mathbf{G}_k \mathbf{G}_k^T = \frac{\chi(\gamma_f)}{\rho} \hat{\Sigma}_{k|k} \quad (10)$$

γ_f はロバスト性のために次の存在条件を満たす限り出来るだけ小さく調節すべきである。

$$\hat{\Sigma}_{i|i-1}^{-1} + \frac{1 - \gamma_f^{-2}}{\rho} \mathbf{H}_i^T \mathbf{H}_i > 0, \quad i = 0, \dots, k \quad (11)$$

[スカラー存在条件] 次の存在条件を用いれば計算量 $\mathcal{O}(N)$ でハイパー H_∞ フィルタの存在性が判定できる。

$$-\varrho \hat{\xi}_i + \rho \gamma_f^2 > 0, \quad i = 0, \dots, k \quad (12)$$

ここで、

$$\varrho = 1 - \gamma_f^2, \quad \hat{\xi}_i = \frac{\rho \mathbf{H}_i \mathbf{K}_{s,i}}{1 - \mathbf{H}_i \mathbf{K}_{s,i}}, \quad (13)$$

ただし、 $\mathbf{K}_{s,i}$ は式 (7) で求めたフィルタゲインである。

3. J-高速 H_∞ フィルタ

ハイパー H_∞ フィルタは $\hat{\Sigma}_{k|k-1} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ の更新に $\mathcal{O}(N^2)$ の計算量が必要である。計算量の対策として、 $\underline{\mathbf{H}}_k = \underline{\mathbf{H}}_{k+1} \underline{\Psi}, \underline{\mathbf{H}}_k = [u(k), \dots, u(0), 0, \dots, 0]$ のとき、 $\underline{\Sigma}_{k+1|k}$ の差分に次の因式分解を考える。

$$\underline{\Sigma}_{k+1|k} - \underline{\Psi} \underline{\Sigma}_{k|k-1} \underline{\Psi}^T = -\underline{\mathbf{L}}_k \mathbf{R}_{r,k}^{-1} \underline{\mathbf{L}}_k^T, \underline{\mathbf{L}}_k = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{L}}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (14)$$

ただし、 $\underline{\Psi}$ はシフト行列を表す。

式 (14) は次のように縮退される。

$$\check{\Sigma}_{k+1|k} - \check{\Psi} \check{\Sigma}_{k|k-1} \check{\Psi}^T = \check{\mathbf{L}}_k \mathbf{R}_{r,k}^{-1} \check{\mathbf{L}}_k^T$$

$$\check{\Sigma}_{k+1|k} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\Sigma}_{k+1|k} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0}^T & 0 \end{array} \right] \in \mathcal{R}^{(N+1) \times (N+1)} \quad (15)$$

ここで、 $\mathbf{R}_{r,k}$ は必ずしも符号行列に制限されない 2×2 行列である。

また、ハイパー H_∞ フィルタの高速アルゴリズムである J-ユニタリアレイ形式を導出する前に、J-ユニタリ変換について簡単に説明する。

まず、 \mathbf{A} を任意のエルミット行列、 \mathbf{S} を符合行列として、次の式を満たす限り $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ が \mathbf{A} の不定平方根と定義される。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{S} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

\mathbf{A} は非負定ならば、式(16)が次式に縮退される。

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

一方、任意の符合行列 \mathbf{J} に対して次の式が満たされれば、行列 Θ は \mathbf{J} -ユニタリと定義される。

$$\Theta \mathbf{J} \Theta^* = \mathbf{J} \quad (18)$$

\mathbf{J} -ユニタリ行列 Θ を用いて $\mathbf{b} = \mathbf{a}\Theta$ になれば、ベクトル \mathbf{a} 、 \mathbf{b} が次の関係をもっている。

$$\mathbf{b} \mathbf{J} \mathbf{b}^* = \mathbf{a} \Theta \mathbf{J} \Theta^* \mathbf{a}^* = \mathbf{a} \mathbf{J} \mathbf{a}^* \quad (19)$$

次に、 \mathbf{J} -ユニタリ変換と因数分解を用いて、提案されたハイパー H_∞ フィルタの新たな更新形式、 \mathbf{J} -ユニタリアレイを導出する。

[\mathbf{J} -ユニタリアレイ形式] ハイパー H_∞ フィルタは次式と等価である。

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{K}_{s,k+1} (y_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_{s,k+1} = \frac{\mathbf{K}_{k+1}(:,1)}{R_{e,k+1}(1,1)} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{e,k+1}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{k+1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{R}_{e,k}^{-\frac{T}{2}} \mathbf{J}_1 & \rho^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{L}}_{k+1} \mathbf{R}_{r,k+1}^{-\frac{T}{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{e,k}^{\frac{1}{2}} & \check{\mathbf{C}}_{k+1} \tilde{\mathbf{L}}_k \mathbf{R}_{r,k}^{-\frac{1}{2}} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_k \end{bmatrix} \mathbf{R}_{e,k}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}_1 & \tilde{\mathbf{L}}_k \mathbf{R}_{r,k}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \Theta(k) \quad (22) \end{aligned}$$

ただし、 $\Theta(k)$ は任意の $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_1 \oplus -\mathbf{S})$ -ユニタリ行列であり、 $\mathbf{R}_{e,k} = \mathbf{R}_{e,k}^{\frac{1}{2}} \mathbf{J}_1 \mathbf{R}_{e,k}^{\frac{T}{2}}$, $\mathbf{R}_{r,k}^{-1} = \mathbf{R}_{r,k}^{-\frac{T}{2}} \mathbf{S} \mathbf{R}_{r,k}^{-\frac{1}{2}}$, $\check{\mathbf{C}}_{k+1}^T = [\check{\mathbf{H}}^T \check{\mathbf{H}}^T]$, $\check{\mathbf{H}}_k = \check{\mathbf{H}}_{k+1} \Psi \in \mathcal{R}^{1 \times (N+1)}$ が成り立つ。

また、 \mathbf{J} -ユニタリ行列の候補として、次式を満たす $\Theta(k)$ を採用する。

$$\begin{aligned} & \Theta(k) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \mathbf{R}_{e,k}^{\frac{1}{2}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}_{r,k}^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \Xi(k) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{e,k+1}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{J}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}_{r,k+1}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \quad (23) \end{aligned}$$

ここで、

$$\Xi(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{R}_{e,k}^{-1} \check{\mathbf{C}}_{k+1} \tilde{\mathbf{L}}_k \\ -\mathbf{R}_{r,k}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_k^T \check{\mathbf{C}}_{k+1}^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (24)$$

ただし、 $\mathbf{R}_{r,k+1}$ は次式を満たす。

$$\begin{aligned} & \Xi(k)^T \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{e,k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}_{r,k} \end{bmatrix} \Xi(k) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{e,k+1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{R}_{r,k+1} \end{bmatrix} \quad (25) \end{aligned}$$

式(23)を式(22)に代入して、両辺で \mathbf{J} -ユニタリ形式をとれば、次のハイパー H_∞ フィルタの高速アルゴリズムが得られる。

[\mathbf{J} -高速 H_∞ フィルタ] ハイパー H_∞ フィルタは次式によって計算量 $O(N)$ で実行できる。

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{K}_{s,k+1} (y_{k+1} - \mathbf{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k|k}) \quad (26)$$

$$\mathbf{K}_{s,k+1} = \mathbf{K}_{k+1}(:,1) / R_{e,k+1}(1,1) \quad (27)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{k+1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_k \end{bmatrix} - \tilde{\mathbf{L}}_k \mathbf{R}_{r,k}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_k^T \check{\mathbf{C}}_{k+1}^T \quad (28)$$

$$\mathbf{R}_{e,k+1} = \mathbf{R}_{e,k} - \check{\mathbf{C}}_{k+1} \tilde{\mathbf{L}}_k \mathbf{R}_{r,k}^{-1} \tilde{\mathbf{L}}_k^T \check{\mathbf{C}}_{k+1}^T \quad (29)$$

$$\mathbf{R}_{r,k+1} = \mathbf{R}_{r,k} - \tilde{\mathbf{L}}_k^T \check{\mathbf{C}}_{k+1}^T \mathbf{R}_{e,k}^{-1} \check{\mathbf{C}}_{k+1} \tilde{\mathbf{L}}_k \quad (30)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_{k+1} = \rho^{-\frac{1}{2}} \left(\tilde{\mathbf{L}}_k - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_k \end{bmatrix} \mathbf{R}_{e,k}^{-1} \check{\mathbf{C}}_{k+1} \tilde{\mathbf{L}}_k \right) \quad (31)$$

ただし、

$$\check{\mathbf{C}}_{k+1} = \begin{bmatrix} \check{\mathbf{H}}_{k+1} \\ \check{\mathbf{H}}_{k+1} \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{2 \times (N+1)}$$

$$\check{\mathbf{H}}_{k+1} = [\mathbf{H}_{k+1} \ u(k-N+1)] = [u(k+1) \ \mathbf{H}_k]$$

$$\mathbf{H}_k = [u(k), \dots, u(k-N+1)]$$

$$\mathbf{H}_1 = [u(1), 0, \dots, 0] \quad (32)$$

$$\mathbf{R}_{e,0} = \mathbf{R} + \mathbf{C}_0 \hat{\Sigma}_{0|-1} \mathbf{C}_0^T, \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \rho & 0 \\ 0 & -\rho\gamma_f^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_{0|-1} = \text{diag}\{\rho, \rho^2, \dots, \rho^N\}, \quad \rho = 1 - \chi(\gamma_f) \quad (33)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{0|0} = \check{\mathbf{x}}_0, \quad \tilde{\mathbf{L}}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}^{(N+1) \times 2}$$

$$\mathbf{R}_{r,0} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \rho^{-N} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_0 = \mathbf{0} \in \mathcal{R}^{N \times 2} \quad (34)$$

であり、 $\text{diag}\{\cdot\}$ は対角行列、 $R_{e,k+1}(1,1)$ は行列 $R_{e,k+1}$ の 1-1 成分をそれぞれ表す。

J-高速 H_∞ フィルタでは、 $\tilde{L}_k \in \mathcal{R}^{(N+1) \times 2}$ と $R_{r,k} \in \mathcal{R}^{2 \times 2}$ の更新によってフィルタゲイン $K_{s,k}$ を求めているので、単位ステップ当たりの計算量は $O(N)$ で済む。また、式 (28) から式 (31) は並列に実行が可能である。

$R_{r,k}$ と \tilde{L}_k の更新式 (30)、(31) は次式と等価である。

$$R_{r,k+1} = \rho(R_{r,k} - \tilde{L}_k^T \check{C}_{k+1}^T R_{e,k}^{-1} \check{C}_{k+1} \tilde{L}_k) \quad (35)$$

$$\check{L}_{k+1} = \tilde{L}_k - \begin{bmatrix} 0 \\ K_k \end{bmatrix} R_{e,k}^{-1} \check{C}_{k+1} \tilde{L}_k \quad (36)$$

この等価変換により、計算量は $O(N)$ の除算を定数倍の乗算に変更できることがわかる。

4. シミュレーションによる評価

4.1 基本原理

J-高速 H_∞ フィルタの性能を評価するために、FIR (finite impulse response) システムの同定を考える。システムの同定基本原理は図 3 に示されている。

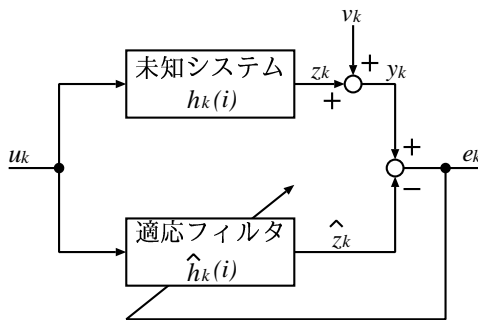


Fig. 3 適応フィルタによるシステム同定

図 3 より、システム同定問題は直接観測可能な受信信号 $\{u_k\}$ と観測値 $\{y_k\}$ からインパルス応答 $\{h_k(i)\}$ を逐次推定する問題に帰着できる。

4.2 追跡能力の評価

J-高速 H_∞ フィルタ (J-FHF) と一般に用いられている LMS を C 言語で実装し、それらの性能を未知システムのインパルス応答の推定に関して比較する。インパルス応答は時刻 $k=10000$ で図 4 のように変化し (実線 \rightarrow 破線)、タップ数が 128 とした。また、図 5 に使用する音声データ (標準化周波数 8kHz、サンプル時間 4s) を示す。

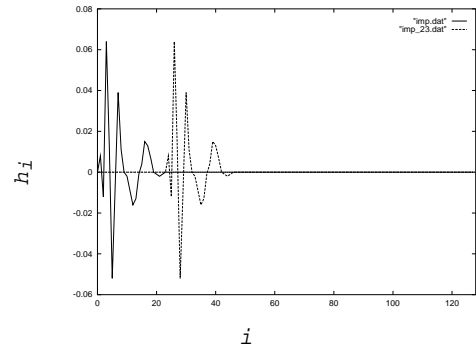


Fig. 4 未知システムのインパルス応答

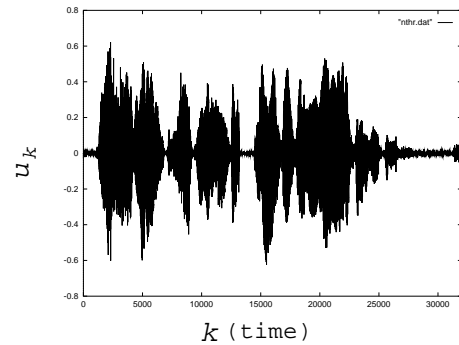
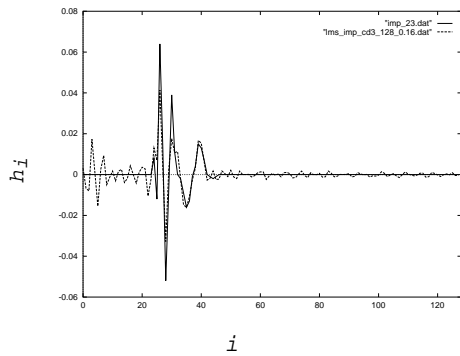
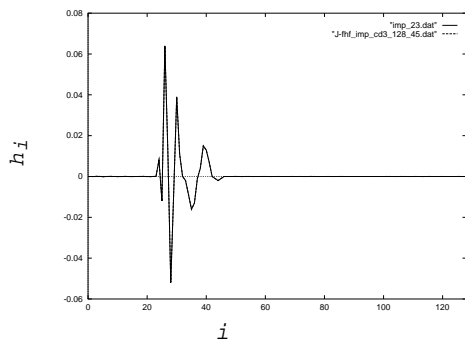


Fig. 5 シミュレーションに用いた音声データ

シミュレーションでは、LMS と J-FHF 共に時刻 $k=0$ で初期化し、図 4 のように時刻 $k=10000$ で示すインパルス応答を 23 タップシフトさせて追跡性能を比較した。図 6(a) に時刻 $k=32000$ での LMS によるインパルス応答の推定結果を、図 6(b) に同じく時刻 $k=32000$ での J-FHF によるインパルス応答の推定結果をそれぞれ示した。このグラフ中の実線は真のインパルス応答を、点線はフィルタによって推定したインパルス応答をそれぞれ示している。

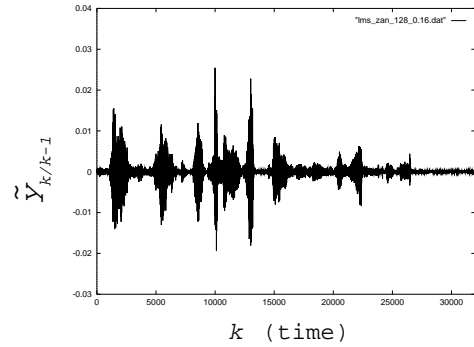


(a) LMS ($\mu=0.16$)

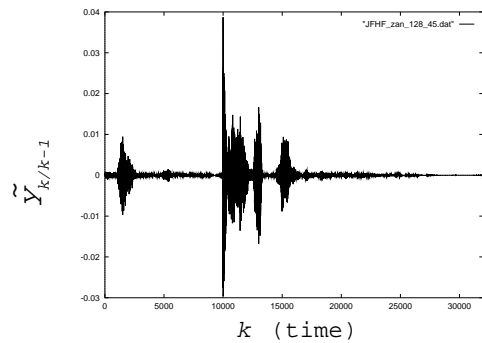


(b) J-FHF ($\gamma_f=45$)

Fig. 6 インパルス応答の最終推定値

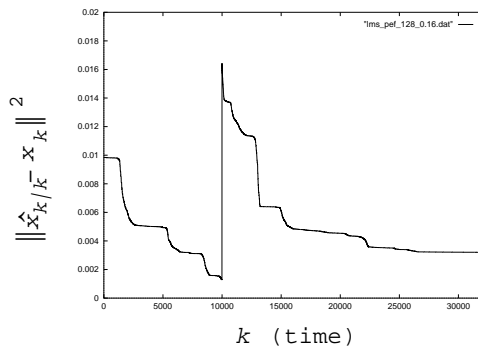


(a) LMS ($\mu=0.16$)

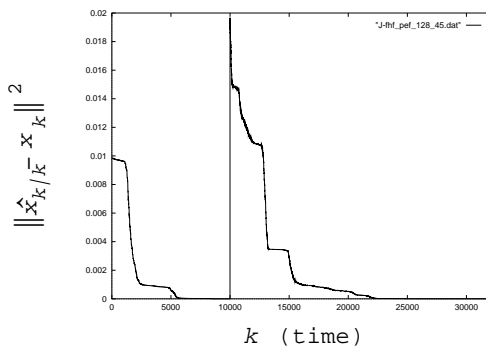


(b) J-FHF ($\gamma_f=45$)

Fig. 8 残留推定誤差の比較



(a) LMS ($\mu=0.16$)



(b) J-FHF ($\gamma_f=45$)

Fig. 7 インパルス応答の追跡性能

また、図 7(a) に $\mu = 0.16$ のときの LMS の追跡性能を、図 7(b) に $\gamma_f = 45$ のときの J-FHF の追跡性能を示す。ここで、各パラメータは最適に調節された。このグラフの横軸は時間、縦軸は真のインパルス応答と推定したインパルス応答との 2 乗誤差である。また、図 8(a) に LMS による出力推定誤差を、図 8(b) に J-FHF による出力推定誤差を示す。このグラフの横軸は時間、縦軸は出力とその推定値の誤差 $\tilde{y}_{k|k-1} = y_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}$ である。

図 6 から、J-FHF は実線と点線がほぼ一致しているため推定が良好であるが、LMS は実線と点線が大きくずれている。図 7 から、LMS は収束速度が遅いのにに対して、J-FHF は初期の収束速度もインパルス応答の変化への追従速度も速いことがわかる。また、図 8 から、LMS は出力推定誤差の収束速度が遅いのにに対して、J-FHF は出力推定誤差が速やかに零となることがわかる。以上より、J-

FHF は LMS と比べて格段に高い収束性能と追従性能をもつことがわかる。

5. おわりに

J-高速 H_∞ フィルタは LMS よりも優れた収束速度を示し、またインパルス応答の変化に対しても優れた追跡性能をもつことがわかった。また、J-高速 H_∞ フィルタの追跡能力 (γ_f の値) と存在時間の間にはトレードオフの関係があることがわかった。

今後の課題としては、タップ数を増やした場合でも J-高速 H_∞ フィルタを DSP に実装できるように計算量をさらに削減することである。

参考文献

- 1) 西山 清: 最適フィルタリング, 培風館, 2001.
- 2) K. Nishiyama: An H_∞ Optimization and Its Fast Algorithm for Time-Variant System Identification, IEEE Transactions on Signal Processing, **52**-5, pp.1335-1342, 2004.
- 3) K. Nishiyama: Fast J-Unitary Array Form of the Hyper H_∞ Filter, IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, Vol.E88-A, No.11, pp.3143-3150, 2005.